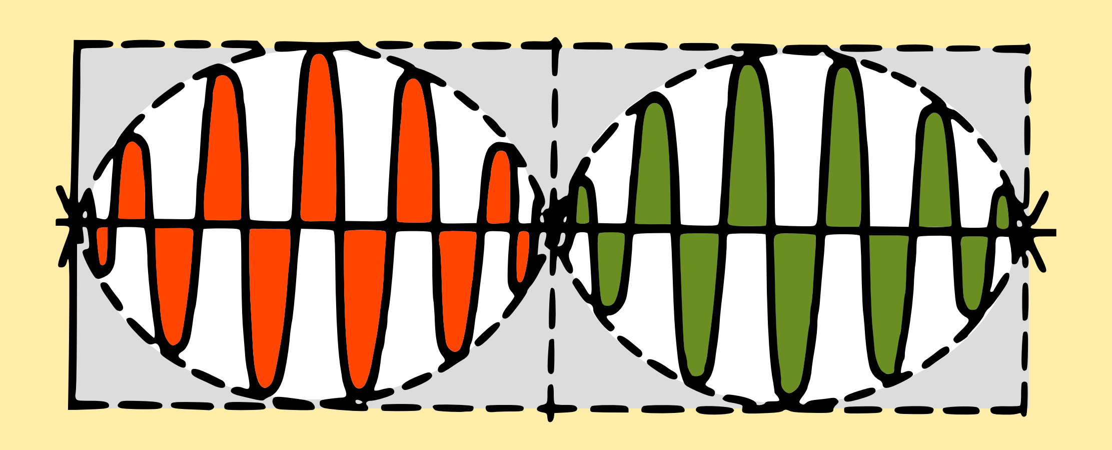
A. Akhiezer, I. Akhiezer

ELECTRO-MAGNÉTISME ET ONDES ÉLECTRO-MAGNÉTIQUES



Éditions Mir Moscou

А. И. АХИЕЗЕР, И. А. АХИЕЗЕР

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА»
МОСКВА

A. AKHIEZER, I. AKHIEZER

ÉLECTROMAGNÉTISME ET ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES



ÉDITIONS MIR MOSCOU

Traduit du russe
par V. KOLIMÉEV

На французском языке

Imprimé en Union Soviétique

ISBN 5-03-000469-6

AVANT-PROPOS

Le présent manuel diffère notablement des autres livres consacrés à l'électromagnétisme tant par l'ampleur des sujets traités que par la façon d'exposer les matières. Il n'existe aucune question quelque peu importante de la théorie moderne de l'électromagnétisme qui ne soit pas étudiée dans ce livre. D'une part, y sont examinées à un niveau scientifique moderne les questions théoriques générales et, d'autre part, une place importante est accordée aux caractères spécifiques des phénomènes électriques, magnétiques et optiques dans des types concrets de substances ainsi qu'aux principes des applications industrielles les plus importantes de ces phénomènes.

Le livre représente un ensemble unique dont tous les chapitres s'enchevêtrent de la façon la plus étroite. Néanmoins, il est divisé en quatre parties suivantes, intimement liées l'une à l'autre:

I. Eléments d'électromagnétisme et de physique de l'espace-temps.

II. Propriétés électriques et magnétiques de la substance.

III. Ondes électromagnétiques et optique.

IV. Interactions des ondes électromagnétiques avec les particules et les ondes.

L'ouvrage proposé constitue une partie du cours de physique générale et, à notre avis, il ne doit se substituer ni au cours de physique théorique, ni à celui de physique expérimentale. Cela signifie qu'en exposant le fonds d'idées de la physique moderne, nous avons cherché à nous en passer des finesses de l'appareil théorique et des détails des expériences de physique. C'est pourquoi ce livre se caractérise par un exposé clair et accessible, sans détails mathématiques et expérimentaux superflus, une attention particulière étant portée au côté théorique et non pas méthodique de la question.

Il est bien connu qu'en mathématiques les notions d'élémentaire et de non élémentaire ont subi ces dernières années de grandes modifications; en particulier, à la fin des études secondaires les élèves possèdent déjà des connaissances mathématiques que n'avaient naguère que les étudiants des facultés à la fin du premier semestre d'études. C'est pourquoi nous considérons que les méthodes d'établissement des formules, adoptées dans de nombreux cours de physique

générale sont tout à fait périmées. Cette remarque concerne aussi les aspects physiques de l'exposé. De nos jours, lorsque les écoliers sont déjà familiarisés avec les principes de la physique quantique et de la théorie de la relativité, il ne nous semble pas raisonnable de construire le cours d'électromagnétisme d'une manière artificielle, en évitant les notions quantiques. Bien entendu, ces notions doivent être expliquées et utilisées seulement dans le cadre de la physique générale. L'emploi dans ce livre de certaines notions de physique quantique nous a permis d'exposer les éléments de théorie de la conductibilité électrique des métaux et des semi-conducteurs, d'expliquer la nature du rayonnement de Vavilov-Cerenkov, de l'effet Compton, de la création de paires électron-positron, etc. Un chapitre distinct expose les principes de relativité restreinte et de relativité générale. La conclusion est consacrée aux questions du développement de la science de l'électromagnétisme.

L'ouvrage s'adresse avant tout aux étudiants en physique, mais pourra intéresser également les chercheurs et les enseignants. La lecture du livre implique la connaissance des mathématiques au niveau de deux premières années d'études aux facultés du physique.

Le chapitre *Physique de l'espace-temps* est écrit en collaboration avec Y. Stépanovski.

Nous tenons à remercier F. Bass, Y. Gourévitch et A. Riazanov qui nous ont prodigué des remarques bien utiles.

A. Akhiezer,
I. Akhiezer

INTRODUCTION

PLACE DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME DANS L'IMAGE PHYSIQUE MODERNE DU MONDE

Toute la matière de l'Univers, dans sa partie connue de nous, est constituée principalement par les électrons, protons, neutrons, neutrinos et photons. Ce sont des *particules* dites *élémentaires* ou *fondamentales*. Actuellement, le nombre de particules élémentaires découvertes s'élève à plusieurs centaines. Les propriétés des particules élémentaires sont extrêmement variées: il suffit de dire que les particules telles que le photon sont dépourvues de masse (on a en vue la masse au repos) alors que les plus lourdes des particules connues possèdent une masse près de 10 GeV; les particules telles que l'électron et le proton peuvent exister pendant un temps indéterminé alors que les particules à très brève vie, appelées résonances, se désintègrent spontanément pendant un temps de l'ordre de 10^{-23} s. Un trait est commun à toutes les particules: elles sont toutes soumises à l'action de certaines forces ou, comme on dit, aux *interactions*. Bien que les manifestations diverses de ces forces soient innombrables, les différents types d'interactions entre particules élémentaires ne sont qu'au nombre de quatre: la *gravitation* ou l'*interaction gravitationnelle*, les *interactions fortes*, les *interactions électromagnétiques* et les *interactions faibles*. D'ailleurs, il apparaît actuellement que les interactions électromagnétiques et faibles sont deux manifestations d'une seule et même interaction, de même que l'électricité et le magnétisme, qui étaient considérés primitivement comme deux interactions différentes, sont en réalité les manifestations des forces électromagnétiques uniques. Cependant, dans le domaine des énergies des particules interagissantes, réalisées à l'heure actuelle par voie expérimentale, les propriétés et les manifestations des branches électromagnétique et faible de l'interaction électrofaible unique sont si différentes qu'elles peuvent être considérées comme indépendantes l'une de l'autre. On peut penser que finalement les autres interactions se trouveront elles aussi non indépendantes et se réuniront en une interaction fondamentale unique à quatre manifestations différentes.

Toutes les particules élémentaires ne sont pas soumises à chaque type d'interactions. C'est seulement l'interaction gravitationnelle que subissent toutes les particules élémentaires. L'interaction gravitationnelle est basée sur la loi de l'attraction universelle de Newton

selon laquelle *tous les corps s'attirent avec une force proportionnelle au produit de leurs masses et inversement proportionnelle au carré de leur distance.*

Les forces gravitationnelles sont les plus faibles des forces connues. Il suffit d'indiquer que la force d'attraction gravitationnelle, qui s'exerce entre deux électrons, est 10^{45} fois plus faible que la force de leur répulsion électrique à la même distance. Les interactions fortes se caractérisent par des énergies qui sont des millions de fois plus hautes que les énergies mises en jeu dans des interactions électromagnétiques.

Dans la structure de notre monde, la manifestation principale des interactions fortes est l'existence de *noyaux atomiques.* On connaît plusieurs centaines de noyaux atomiques différents, mais tous ces noyaux ne sont constitués que de deux types de particules élémentaires: de neutrons et de protons « agglutinés » par les interactions fortes. Les forces électriques jouent elles aussi leur rôle, bien que moins important, dans la structure des noyaux. Le fait est que les protons portent une charge électrique et donc se repoussent. Il en résulte que les noyaux ayant un très grand nombre de protons (ou, comme on dit, un grand nombre atomique) ne peuvent pas être stables. C'est là la cause de ce que dans la nature il n'existe que des éléments chimiques de numéro atomique non supérieur à 92 (si on néglige des quantités infimes de plutonium naturel).

L'intensité des interactions fortes est près de 100 fois plus élevée que celle des interactions électromagnétiques (sans parler des interactions gravitationnelle et faible). Néanmoins ce n'est pas l'interaction forte qui gouverne le monde « en autocrate ». Cela tient à ce que toutes les particules ne sont pas soumises aux interactions fortes (bien que la plupart des particules connues, réunies sous le nom d'*hadrons*, le soient); l'électron et le photon ne subissent pas des interactions fortes. En outre, les interactions fortes se caractérisent par un *rayon d'action* très court, de l'ordre de 10^{-15} m, c'est-à-dire comparable aux dimensions des noyaux. C'est pourquoi, à des distances supérieures aux dimensions des noyaux atomiques, les interactions fortes ne jouent aucun rôle.

A des distances plus grandes, le rôle des forces électromagnétiques s'accroît du fait que ces forces ne s'affaiblissent que très lentement avec la distance. C'est précisément les forces électromagnétiques qui sont responsables de l'association des noyaux et des électrons en atomes et des atomes en molécules. Leurs manifestations sont les forces de frottement, les forces de liaison entre les particules dans les solides, les liquides et les gaz imparfaits, les forces régissant le plasma, en un mot, toutes les forces (excepté celle de gravitation) auxquelles on a affaire en dehors des laboratoires nucléaires.

Tous les composés chimiques à partir des plus simples, tels que l'eau et l'oxygène moléculaire, jusqu'à si complexes que les protéines

et les acides nucléiques, la base de la vie, sont constitués de molécules. Le monde de la chimie, de la biophysique et de la biochimie c'est le monde des forces électromagnétiques. La lumière, les ondes radio-électriques, les rayons X et les rayons ultraviolets, tous ces phénomènes sont de nature électromagnétique. On peut affirmer avec assurance qu'à notre échelle humaine le monde est gouverné par les forces électromagnétiques. C'est là que réside le rôle particulier et la très haute importance de l'électromagnétisme.

L'interaction électromagnétique est due à l'existence de *charges électriques* qui peuvent être de deux signes: les charges de même signe se repoussent alors que les charges de signes opposés s'attirent. C'est pourquoi les corps de grandes dimensions sont rarement chargés électriquement: les forces qui s'exercent entre les charges conduisent au rapprochement des charges de signes contraires, de sorte que les corps deviennent dans leur ensemble électriquement neutres.

L'interaction gravitationnelle ne connaît pas de masses négatives et donc la création et l'existence de systèmes « gravitationnellement neutres », non soumis à la gravitation, sont impossibles. C'est pourquoi les forces de gravitation bien qu'elles soient beaucoup plus faibles que les forces électriques, jouent le rôle dominant dans le cas des systèmes de grande masse, en particulier, à l'échelle de l'Univers.

A l'échelle cosmique, le monde est gouverné par les forces de gravitation. Il est vrai que dans le cas des grandes masses ou de vitesses relativistes (voisines de la vitesse de la lumière) les lois de la gravitation sont beaucoup plus compliquées que la loi de Newton. L'établissement de ces lois relève de la compétence de la théorie de la relativité générale d'Einstein, théorie qui, bien que ne se rapportant pas directement à l'électromagnétisme, constitue un développement logique de la théorie de la relativité restreinte sans laquelle la compréhension des phénomènes électromagnétiques est impossible et qui a été édifiée à la base de l'analyse des phénomènes électromagnétiques. C'est pourquoi nous ne laissons pas la théorie de la relativité générale tout à fait de côté, nous lui consacrons une partie du chapitre *Physique de l'espace-temps*.

Les interactions faibles se tiennent un peu à l'écart dans la structure du monde. Le fait est que nous ne connaissons pas d'objets dont la création soit due aux interactions faibles: on peut dire de façon imagée qu'elles « détruisent » (et dispersent) mais « ne créent pas ». Les interactions faibles sont responsables de la désintégration bêta des noyaux, de la valeur finie de la durée de vie du neutron (10^3 s) et de la désintégration des particules élémentaires à vie relativement longue (10^{-6} à 10^{-10} s) (certaines particules à vie plus courte, de l'ordre de 10^{-16} s, se désintègrent par suite de l'interaction électromagnétique).

Soulignons une fois de plus qu'il existe un vaste domaine des

phénomènes dans lesquels les quatre formes fondamentales d'interaction n'interfèrent pas et peuvent donc être considérées comme indépendantes l'une de l'autre. Vu cette circonstance, nous n'étudierons dans ce livre que la seule interaction électromagnétique et ceci dans le domaine où elle ne se coupe ni avec les interactions fortes, ni avec les interactions faibles.

Les premiers chapitres du livre sont consacrés aux manifestations les plus simples des propriétés électriques et magnétiques de la substance. Les chapitres suivants présentent l'étude des propriétés électriques et magnétiques des milieux concrets tels que les diélectriques, les conducteurs, les ferromagnétiques, les supraconducteurs. On cherche à rester, autant que possible, dans le cadre de la physique classique bien que dans le cas où il s'agit de la constitution des corps condensés, ceci s'avère insuffisant et l'on est amené à faire usage des éléments de physique quantique.

Après avoir étudié les faits pour lesquels l'unité de l'électricité et du magnétisme est de peu d'importance, on passe à la théorie unitaire des phénomènes électromagnétiques de Maxwell, qui comporte les lois générales de l'électromagnétisme, ensuite on réserve un chapitre distinct à la physique de l'espace-temps où l'on expose la théorie de la relativité restreinte et les idées principales de la théorie de la relativité générale.

Plus loin on examine les ondes électromagnétiques de différents types dans les divers milieux et systèmes physiques, leur propagation et les procédés de leur excitation. Le livre se termine par l'exposé des principaux faits et des lois fondamentales concernant l'interaction des particules chargées et des photons avec la substance.

I. ÉLÉMENTS D'ÉLECTROMAGNÉTISME ET DE PHYSIQUE DE L'ESPACE-TEMPS

CHAPITRE PREMIER

CHAMP ÉLECTROSTATIQUE DANS LE VIDE

§ 1.1. Loi de Coulomb

Tous les corps ne sont pas soumis à l'interaction électrique, mais seulement ceux qui portent une *charge électrique*; on les appelle *corps chargés électriquement* ou *corps électrisés*. Fait important, l'interaction électrique peut conduire tant à l'attraction qu'à la répulsion des corps électrisés. Ceci signifie que les charges électriques sont de deux espèces et peuvent être distinguées d'après le signe : les corps portant des charges de même signe se repoussent, alors que les corps portant des charges de signes contraires s'attirent.

La force d'interaction électrique prend sa forme la plus simple dans le cas où les corps chargés sont immobiles et se trouvent placés dans le vide. Si, en outre, les dimensions des corps sont petites par rapport à leur distance (on dit alors que l'on a affaire à des *points matériels*), la force d'interaction ne dépend que des charges des corps et de leur distance. Cette force est dirigée le long de la ligne joignant les corps et sa valeur est inversement proportionnelle au carré de la distance.

Mathématiquement, cette force peut s'écrire sous la forme $F = k_1 q_1 q_2 / r_{12}^2$, où q_1 et q_2 sont les charges des corps, r_{12} est la distance séparant les corps et k_1, une constante dont la valeur dépend du choix de l'unité de charge. Cette formule traduit la *loi de Coulomb*, loi fondamentale de l'interaction électrique. Cette loi fut découverte en 1771-1779 par Cavendish et plus tard, en 1786-1789, par Coulomb.

Le plus simple est de choisir l'unité de charge de telle sorte que la constante k_1 soit égale à l'unité. Un tel choix est fait dans le système d'unités CGS dit de Gauss qui est utilisé principalement dans des recherches fondamentales et théoriques. Dans ce système, la loi de Coulomb s'écrit sous la forme

$$F = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}.$$

Il s'ensuit de cette formule que dans le système CGS la charge électrique a les dimensions $[q] = L^{3/2} T^{-1} M^{1/2}$, c'est-à-dire que l'unité de charge est 1 $cm^{3/2}$ s^{-1} $g^{1/2}$.

Cette unité (qui n'a pas de nom spécial) étant très petite, on utilise en pratique une unité plus grande, le *coulomb* (symbole: C) qui est numériquement $3 \cdot 10^9$ fois plus grande que l'unité de charge dans le système de Gauss.

Le coulomb est l'unité de charge électrique dans le Système international (SI) qui est actuellement largement utilisé, surtout dans les techniques. A la différence du système de Gauss avec ses trois unités de base: le centimètre (cm), unité de longueur, le gramme (g), unité de masse, et la seconde (s), unité de temps, le SI comporte pour l'électromagnétisme quatre unités de base: le mètre (m), unité de longueur, le kilogramme (kg), unité de masse, la seconde (s), unité de temps, et l'ampère (A), unité d'intensité de courant électrique. Le coulomb est une unité dérivée égale à l'ampère-seconde: 1 C = = 1 A·s. Plus loin (au § 6.6), nous examinerons de plus près les systèmes CGS et SI ainsi que d'autres systèmes possibles et donnerons des définitions précises de toutes les unités qui se rencontrent dans l'électromagnétisme, alors que pour l'instant nous nous contenterons d'écrire la loi de Coulomb dans le système SI:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2},$$

où $(4\pi\varepsilon_0)^{-1}$ est une constante numériquement égale, par définition, à 10^{-7} de carré de la vitesse c de la lumière dans le vide. Comme $c = 3 \cdot 10^8$ m/s, nous obtenons

$$(4\pi\varepsilon_0)^{-1} = 9 \cdot 10^9 \ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-2}};$$

$$\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \ \mathrm{C^2 \cdot N^{-1} \cdot m^{-2}} = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \ \mathrm{F \cdot m^{-1}}$$

(F désigne le farad, unité de capacité électrique).

La loi de Coulomb peut s'écrire également sous forme vectorielle. Si $\mathbf{n}_{21}$ est le vecteur unitaire dirigé de q_2 vers q_1, la force $\mathbf{F}_1$ exercée sur la charge q_1 par la charge q_2 peut être représentée sous la forme

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{n}_{21} \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}^2}.$$

La charge électrique ne peut ni apparaître ni disparaître spontanément. En d'autres termes,

la charge électrique totale d'un système de corps isolé, égale à la somme (algébrique) des charges des corps constitutifs du système, ne peut pas varier au cours du temps.

Cette loi, appelée *loi de conservation de la charge électrique* (ou encore *principe de conservation de l'électricité*) est une des lois fondamentales de la nature. C'est ainsi par exemple que lors de l'électrisation par frottement les corps frottés se chargent toujours par des charges de signes contraires mais égales en module.

La loi de conservation de la charge électrique est également valable pour le monde des particules élémentaires. Par exemple,

les collisions entre les noyaux atomiques peuvent provoquer la création d'électrons mais la production de chaque électron entraîne l'apparition d'un positron, particule élémentaire qui ne diffère de l'électron que par le signe de sa charge électrique. Puisque tous les corps se composent d'atomes, constitués par les électrons et les noyaux, et les noyaux à leur tour se composent de protons et de neutrons, la charge électrique du proton ne différant que par le signe de la charge électronique, il découle de la loi de conservation de la charge électrique que la charge de tout corps est multiple de la charge de l'électron ou du proton. Cette charge a pour valeur numérique

$$e = 1{,}60219 \cdot 10^{-19}\ \text{C} = 4{,}80298 \cdot 10^{-10}\ \text{u.e.s. CGS}.$$

Les charges de toutes les particules élémentaires chargées, connues actuellement, sont égales à e ou multiples de e, ce qui explique le nom de charge élémentaire qu'on donne à e. *Nous ne connaissons aucune particule dont la charge soit égale à une partie fractionnaire de e.* C'est un des phénomènes remarquables de la nature, non expliqués jusqu'à présent.

Puisqu'entre les corps chargés s'exercent des forces électriques, on peut dire que

le corps chargé produit autour de lui un certain champ de force. Ce champ est dit électrique.

Pour pouvoir caractériser le champ électrique produit par un ou plusieurs corps électrisés, introduisons dans ce champ un petit corps chargé portant une petite charge électrique q_{es}. Un tel corps, que l'on appelle *charge d'essai*, ne modifie pratiquement pas le champ dans lequel il est introduit, si bien que la force **F** agissant sur la charge d'essai peut caractériser le champ produit par un corps chargé (ou un ensemble des corps chargés)

$$\mathbf{F} = q_{es}\mathbf{E}.$$

Ici, le vecteur **E** est indépendant de q_{es}, il ne se détermine que par les corps chargés et l'emplacement de la charge d'essai. Ce vecteur, qui varie en général d'un point à l'autre, s'appelle *intensité de champ électrique* produit par des corps chargés. Les dimensions de l'intensité de champ électrique sont $[E] = [F]/[q] = \text{N}\cdot\text{C}^{-1}$.

En déplaçant la charge d'essai d'un point à l'autre, on peut déterminer la structure de tout le champ électrique. Une méthode bien spectaculaire et commode de description d'un champ est la méthode graphique utilisant des lignes dites de force électriques.

On appelle ligne de force toute ligne qui a la propriété d'être tangente en chacun de ses points à la direction du champ en ce point.

La figure 1.1 montre les lignes de force de quatre champs électriques les plus simples dus à une seule charge ponctuelle (positive et négative) et à deux charges ponctuelles (de même signe et de signes contraires).

Les lignes de force partent toujours des charges positives et se terminent sur des charges négatives ou à l'infini.

Si en un point quelconque il n'y a pas de charge électrique, une seule ligne de force passe par ce point. Ainsi, les lignes de force ne se coupent qu'aux points où se trouvent les charges électriques.

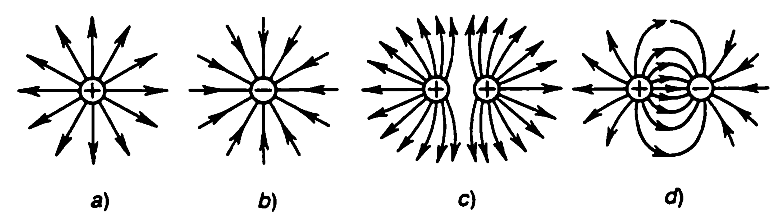


Fig. 1.1. Lignes de force des champs électriques les plus simples produits par: *a*, une charge ponctuelle positive ; *b*, une charge ponctuelle négative ; *c*, deux charges ponctuelles positives ; *d*, charges ponctuelles positive et négative

Le champ électrique a encore une propriété importante: il obéit au principe de la superposition. Ce principe consiste en ce que

l'intensité du champ E produite par l'ensemble des corps chargés est égale à la somme des intensités $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, . . . produites par chacun des corps séparément : $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \ldots$

Le principe de la superposition permet de ramener la détermination de l'intensité du champ produit par un corps chargé de forme complexe (ou par un système de corps) au calcul de la somme des intensités des champs engendrés par chacun des éléments infiniment petits de ce corps. Ainsi, il ne suffit finalement que de connaître l'intensité du champ d'une charge ponctuelle. Or, cette intensité peut être déterminée à l'aide de la loi de Coulomb: à une distance r de la charge q elle a pour valeur

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{n}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

où $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire ayant pour origine le point où se trouve la charge q et pour extrémité le point où est placée la charge d'essai.

Le champ électrique produit par des charges électriques immobiles et invariables dans le temps (un tel champ est dit *électrostatique*) présente encore une propriété importante: il est un champ potentiel ou *irrotationnel*. Cela signifie que le travail effectué par les forces d'un tel champ pour déplacer une charge électrique d'essai suivant un contour fermé quelconque est nul.

Pour nous convaincre de la validité de cette proposition, considérons d'abord le cas le plus simple, celui du champ produit par une seule charge ponctuelle q. Déplaçons dans ce champ la charge d'essai q_{es} d'un point quelconque de rayon vecteur **r** en un point voisin de rayon vecteur **r** + d**r** en accomplissant le travail

$$dA = \mathbf{F}\, d\mathbf{r} = q_{es}\mathbf{E}\, d\mathbf{r} = \frac{qq_{es}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, \mathbf{n}\, d\mathbf{r}.$$

Mais $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ si bien que $\mathbf{n}/r^2 = -\text{grad}\,(1/r)$, où le gradient est un vecteur de composantes $(\partial/\partial x,\ \partial/\partial y,\ \partial/\partial z)$, de sorte que $dA = -\frac{qq_{es}}{4\pi\varepsilon_0}\, d\mathbf{r}\, \text{grad}\,(1/r)$. Déplaçons maintenant la charge q suivant un trajet quelconque à une distance finie, du point a au point b. Nous effectuerons un travail

$$A_{a\to b} = -qq_{es} \int_{r=r_a}^{r=r_b} \text{grad}\, \frac{1}{r}\, d\mathbf{r} = \frac{qq_{es}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right).$$

Le travail des forces électriques est caractérisé par le *potentiel électrostatique* φ qui est une caractéristique du champ lui-même, indépendante de la valeur de la charge d'essai q_{es}, à savoir: le travail $A_{a\to b}$ s'écrit sous la forme $A_{a\to b} = q_{es}\{\varphi\,(r_a) - \varphi\,(r_b)\}$. Il est évident que pour une charge ponctuelle q le potentiel a pour expression

$$\varphi\,(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

où r est la distance de la charge au point d'observation. Cette relation n'est qu'une autre forme d'écriture de la loi de Coulomb. L'intensité du champ est liée au potentiel par la relation

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\, \varphi.$$

La formule donnant le travail $A_{a\to b}$ montre que le travail effectué par les forces électriques entre deux points dépend de la position relative de ces points et nullement du trajet suivi pour le déplacement de la charge. En particulier, si les points a et b sont confondus, le travail $A = 0$. En d'autres termes, *le travail des forces électriques effectué sur un contour fermé L est nul*:

$$\oint_L \mathbf{E}\, d\mathbf{r} = 0.$$

Nous pouvons en conclure que *le champ électrique ne peut pas avoir des lignes de force fermées.* En effet, le déplacement d'une charge d'essai le long d'une ligne de force fermée nous donnerait un travail non nul.

L'intégrale curviligne d'un champ vectoriel quelconque, par exemple de **E** (**r**), prise le long d'un contour fermé L est appelée

circulation du champ vectoriel le long de ce contour. Si le contour limite une surface infiniment petite, la circulation est proportionnelle à l'aire Δs de cette surface. Plus exactement: si l'on introduit un vecteur aire $\Delta \mathbf{s}$ orienté normalement à la surface, la circulation est égale au produit scalaire de $\Delta \mathbf{s}$ par un certain vecteur appelé *rotationnel* et noté par le symbole rot. Pour un contour quelconque L on a la formule

$$\oint_L \mathbf{A}\, d\mathbf{l} = \int_\Sigma \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}.$$

où $d\mathbf{l}$ est un élément de contour, Σ, une surface quelconque s'appuyant sur L et $d\mathbf{s}$, un élément de son aire orienté d'une façon déterminée: le sens de $d\mathbf{s}$ est lié au sens de parcours de L par la règle du tire-bouchon. Cette relation est connue sous le nom de *formule de Stokes.*

Le rotationnel peut être obtenu sous la forme explicite si l'on considère trois éléments de surface infiniment petits en forme de rectangles dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées. Nous obtiendrons alors

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}$$

et des relations analogues pour les autres projections du rot $\mathbf{A}$. Sous forme vectorielle, le rotationnel peut être représenté par le produit vectoriel de l'opérateur nabla

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

et du vecteur $\mathbf{A}$:

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = [\nabla \mathbf{A}].$$

Comme la circulation du champ électrostatique le long de tout contour fermé est nulle, nous avons

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0.$$

C'est la raison pour laquelle le champ électrostatique est dit *irrotationnel.*

La quantité $U = qq_{es}/(4\pi\varepsilon_0 r)$ peut être considérée non seulement comme une énergie potentielle de la charge d'essai q_{es} dans le champ produit par la charge q, mais également comme une énergie potentielle mutuelle de deux charges équivalentes q et q_{es} se trouvant à la distance r l'une de l'autre. En se servant d'une telle interprétation de U, on peut trouver l'énergie potentielle totale W du système de charges ponctuelles $q_1, q_2, \ldots$, placées aux points $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots$ Cette énergie est égale à la somme des énergies potentielles de chacune des paires de charges, c'est-à-dire que

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{q_1q_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|} + \frac{q_1q_3}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3|} + \frac{q_2q_3}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3|} + \ldots\right\}.$$

Connaissant le potentiel du champ produit par une charge unique, on peut calculer le potentiel du champ dû à n'importe quel système de charges. A cet effet, il suffit de se rappeler que suivant le principe de la superposition les intensités des champs produits par différentes charges s'ajoutent et donc les potentiels s'ajoutent eux aussi:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}.$$

Ici, $\mathbf{r}_i$ est la coordonnée de la charge q_i, et la somme est étendue à toutes les charges du système.

Si le potentiel φ le long d'une direction quelconque reste invariable, la composante du champ $\mathbf{E}$ le long de cette direction est nulle. C'est pourquoi *les surfaces équipotentielles, c'est-à-dire les surfaces où* $\varphi(\mathbf{r}) = C^{te}$, *sont orthogonales aux lignes de force.* Dans le cas particulier d'une charge ponctuelle unique, les surfaces équipotentielles sont des sphères au centre desquelles se trouve la charge, et les lignes de force sont dirigées le long des rayons.

L'unité de potentiel est le volt (V). Pour déplacer une charge de 1 C d'un point du champ à un autre, la différence de potentiel entre ces points étant égale à 1 V, il faut effectuer un travail égal à 1 J (1 J = 1 C·1 V).

§ 1.2. Théorème de Gauss et équation de Poisson

Le *flux d'intensité du champ électrique* à travers une surface quelconque Σ est défini par

$$N = \int_{\Sigma} \mathbf{E}\, d\mathbf{s}.$$

où $d\mathbf{s}$ est un élément de surface, c'est-à-dire un vecteur dirigé en chacun des points suivant la normale $\mathbf{n}$ à la surface et égal en module à l'élément d'aire ds.

Le plus simple est de calculer le flux d'intensité du champ électrique d'une charge ponctuelle q à travers une sphère au centre de laquelle elle est placée (fig. 1.2). Dans ce cas, l'intensité du champ $\mathbf{E}$ est dirigée en chaque point suivant $\mathbf{n}$ et est égale à $q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$, où r est le rayon de la sphère. L'aire d'une surface sphérique étant égale à $4\pi r^2$, la valeur du flux d'intensité est indépendante du rayon de la sphère et est égale à q/ε_0.

Il est aisé de s'assurer que la formule $N = q/\varepsilon_0$ est valable non seulement pour la sphère mais également pour toute surface fermée enveloppant la charge ponctuelle. En effet, si l'on désigne par α l'angle que font entre eux les vecteurs $\mathbf{n}$ et $\mathbf{E}$ (fig. 1.3), alors $\cos\alpha \times$ $\times\, ds = r^2 d\Omega$, où $d\Omega$ est un élément d'angle solide. Puis, $E =$

$= q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$, on a donc $dN = q d\Omega/(4\pi\varepsilon_0)$, et vu qu'à toute la surface fermée correspond un angle solide de 4π, on obtient $N = q/\varepsilon_0$.

On peut généraliser ce résultat au cas de n'importe quel nombre de charges q_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$) disposées d'une manière absolument quelconque. En effet, suivant le principe de la superposition, le champ électrique produit par un système de charges est égal à la somme des champs produits séparément par chacune des charges. C'est pourquoi le flux N lui-même est égal à la somme des flux de champ produits séparément par chacune des charges. Ceci nous conduit à une conclusion importante:

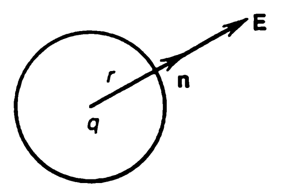


Fig. 1.2. Calcul du flux d'intensité du champ électrique d'une charge ponctuelle à travers une sphère

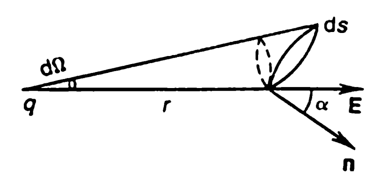


Fig. 1.3. Etablissement du théorème de Gauss

le flux de champ électrique à travers une surface fermée quelconque est toujours égal à la somme des charges enveloppées par cette surface, divisée par ε_0:

$$N = \int_\Sigma \mathbf{E}\, d\mathbf{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i .$$

Cette proposition générale porte le nom de *théorème de Gauss.*

En utilisant le théorème de Gauss, il est facile de calculer les champs produits par des corps symétriquement chargés. Considérons par exemple une sphère à symétrie sphérique de la distribution volumique de la charge $\rho(r)$. Il est clair par raison de symétrie que dans ce cas le champ est dirigé suivant les rayons et ne peut dépendre que de la distance au centre de la sphère (fig. 1.4). Aussi, pour surface fermée est-il commode de choisir une surface sphérique dont le centre est celui de la sphère considérée. Si r est le rayon de cette surface, le flux d'intensité du champ électrique à travers cette surface sera égal à $4\pi r^2 E$. En égalant cette quantité à q_r/ε_0, où q_r est la charge à l'intérieur de la surface de rayon r, nous obtenons $E = q_r/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$ et donc $\varphi = +q_r/(4\pi\varepsilon_0 r)$.

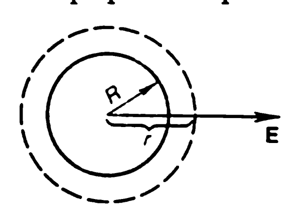


Fig. 1.4. Champ électrique d'une sphère chargée

Si $r > R$ (R étant le rayon de la sphère), il convient d'entendre par q_r la charge totale q contenue à l'intérieur de la sphère. Ainsi,

l'intensité du champ et le potentiel à l'extérieur de la sphère (pour toute distribution de la charge présentant une symétrie sphérique à l'intérieur de la sphère) ont pour expression :

$$E = q/(4\pi\varepsilon_0 r^2), \quad \varphi = q/(4\pi\varepsilon_0 r) \quad (r > R),$$

c'est-à-dire sont donnés par les mêmes formules que dans le cas d'une charge ponctuelle.

Si toute la charge est concentrée sur la surface de la sphère ($r = R$), il est évident que l'intensité du champ à l'intérieur de la sphère est nulle. Si la sphère est chargée uniformément avec une densité

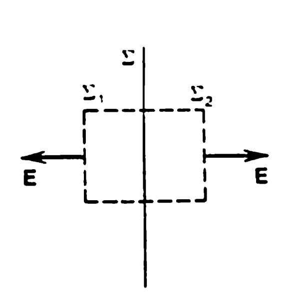


Fig. 1.5. Champ électrique d'un plan charg

Fig. 1.6. Champ électrique d'un cylindre chargé

de charge volumique ρ, on a $q_r = {}^4/_3\, \pi r^3 \rho$, ce qui signifie que l'intensité du champ à l'intérieur de la sphère est proportionnelle à r, alors que le potentiel varie comme r^2 :

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r, \quad \varphi = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(R^2 - r^2) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

(la constante figurant dans l'expression de φ est choisie de telle sorte qu'à la surface de la sphère $\varphi = q/(4\pi\varepsilon_0 R)$).

Proposons-nous de déterminer maintenant l'intensité du champ produit par un plan Σ uniformément chargé que nous supposerons illimité. Il est évident par raison de symétrie que dans ce cas le champ est dirigé normalement au plan et ne dépend pas des coordonnées le long du plan. Prenons comme surface fermée la surface d'un parallélépipède dont deux faces Σ_1 et Σ_2 sont parallèles au plan Σ et se trouvent à la même distance de ce plan (fig. 1.5). Le flux d'intensité du champ n'est différent de zéro qu'à travers ces deux faces et puisque le champ sur ces faces est partout le même et dirigé perpendiculairement aux faces, le flux $N = 2ES$, où S est l'aire de la face. D'un autre côté, suivant le théorème de Gauss, $N = \varepsilon_0^{-1}\sigma S$, où σ est la

densité superficielle de charge. Ainsi,

$$E = (2\varepsilon_0)^{-1}\sigma.$$

Nous voyons que l'intensité du champ est indépendante de la distance au plan chargé (ce résultat est lié évidemment à la supposition que le plan Σ est illimité). Dans le cas d'un plan de dimensions finies la valeur de l'intensité est proche de la valeur limite $(2\varepsilon_0)^{-1}\sigma$ au voisinage de la partie centrale mais en diffère fortement près des bords. Le potentiel dû à un plan chargé illimité a pour expression

$$\varphi(x) = (2\varepsilon_0)^{-1}\sigma x + \varphi_0,$$

où φ_0 est le potentiel du plan lui-même et x, la distance à ce plan.

Déterminons maintenant l'intensité du champ d'un cylindre circulaire infiniment long de rayon r_0 (fig. 1.6). L'intensité du champ est dirigée dans ce cas suivant les rayons et ne dépend que de la distance r à l'axe du cylindre. En prenant comme surface fermée un cylindre coaxial de rayon r et de hauteur l, nous obtenons $N = 2\pi r l E$. D'un autre côté, suivant le théorème de Gauss, $N = l\tau/\varepsilon_0$, où τ est la densité linéaire de charge, ce qui donne

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}, \quad \varphi = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{r_0} + \varphi_0,$$

où φ_0 est le potentiel sur la surface du cylindre.

Le théorème de Gauss peut être utilisé non seulement pour déterminer les intensités des champs dans le cas de la disposition symétrique des charges. En faisant usage de ce théorème, on peut également obtenir une relation différentielle importante qui lie le potentiel φ (r) à la densité volumique de charge au même point ρ (r). Pour établir cette relation, entourons le point considéré P par une petite surface fermée quelconque et cherchons le flux d'intensité du champ électrique ΔN à travers cette surface. D'après le théorème de Gauss. $N = \varepsilon_0^{-1}\langle\rho\rangle\Delta V$, où ΔV est le volume limité par la surface, et $\langle\rho\rangle$, la densité moyenne de charge à l'intérieur du volume ΔV. En faisant tendre la surface vers le point P, nous obtenons $\lim\limits_{\Delta V\to 0}\Delta N/\Delta V = \rho/\varepsilon_0$, où ρ est la densité volumique de charge au point P. La quantité $\lim\limits_{\Delta V\to 0}\Delta N/\Delta V$ s'appelle *divergence du champ électrique* en un point et est notée div **E**. Ainsi,

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0.$$

Cette relation importante qui lie l'intensité du champ **E** à la densité volumique de charge porte le nom d'*équation de Poisson*.

On obtient une équation équivalente si l'on se rappelle que $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$. L'opérateur différentiel div grad est appelé *laplacien*

(ou *opérateur de Laplace*) et noté Δ. Ainsi

$$\Delta\varphi = -\rho/\varepsilon_0.$$

En l'absence de charge cette équation prend la forme (*équation de Laplace*)

$$\Delta\varphi = 0.$$

En coordonnées cartésiennes, la forme explicite de la divergence du champ (comme, d'ailleurs, de tout autre vecteur) est facile à obtenir si l'on choisit comme ΔV un parallélépipède rectangle de côtés Δx, Δy, Δz parallèles aux axes de coordonnées. Il vient

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

En nous basant sur la définition du gradient, nous voyons qu'en coordonnées cartésiennes

$$\Delta\varphi = \partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 + \partial^2\varphi/\partial z^2.$$

Si un scalaire φ quelconque ne dépend que de la longueur du vecteur $\mathbf{r}$, on a $\varphi = \frac{\mathbf{r}}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}$; en prenant comme ΔV dans la définition de la divergence une sphère de rayon r centrée sur l'origine des coordonnées et en faisant tendre r vers zéro, nous obtenons

$$\Delta\varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right).$$

§ 1.3. Dipôle et quadripôle électriques

Déterminons le potentiel produit par un *dipôle*, c'est-à-dire par deux charges électriques ponctuelles égales en valeur absolue et de signes contraires se trouvant à faible distance l'une de l'autre (fig. 1.7). Suivant le principe de la superposition le potentiel en un point P a pour valeur

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_+|} - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_-|}\right\},$$

Fig. 1.7. Détermination du potentiel d'un dipôle

où $\mathbf{r}_+$, $\mathbf{r}_-$ sont les coordonnées des charges dont le module est q. Le cas le plus important pour les applications est celui où la distance du point P d'observation (point où l'on calcule le potentiel) au dipôle est grande par rapport à la longueur du dipôle: $l = |\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-|$, $r \gg l$. Dans ce cas $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\pm| = r - \mathbf{r}\mathbf{r}_\pm/r$ et donc

$$\varphi(\mathbf{r}) = \mathbf{r}\mathbf{d}/(4\pi\varepsilon_0 r^3),$$

où $\mathbf{d} = q\,(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-)$. Le vecteur **d** est appelé *moment électrique du dipôle*. L'intensité du champ électrique du dipôle est

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad}\varphi(\mathbf{r}) = \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{nd}) - \mathbf{d}}{4\pi\varepsilon_0 r^3},$$

où $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Le module de cette intensité s'exprime par

$$E(\mathbf{r}) = \frac{d}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\vartheta}$$

(ϑ étant l'angle formé par les vecteurs **n** et **d**). Nous voyons que l'intensité du champ du dipôle décroît avec la distance comme r^{-3} (c'est-à-dire plus rapidement que l'intensité du champ d'une charge unique, qui décroît comme r^{-2}) et qu'elle ne présente pas une symétrie sphérique mais est anisotrope ; l'intensité du champ le long de la direction **d** est deux fois celle le long de la direction perpendiculaire (les lignes de force du champ du dipôle sont représentées sur la figure 1.1, *d*).

Recherchons l'énergie W du dipôle dans un champ électrique extérieur **E**. Si $\varphi(\mathbf{r})$ est le potentiel de ce champ, alors $W = q\,[\varphi(\mathbf{r}_+) - \varphi(\mathbf{r}_-)]$. Supposons que le champ **E** varie peu sur la longueur l ; alors $\varphi(\mathbf{r}_+) - \varphi(\mathbf{r}_-) = (\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-)\operatorname{grad}\varphi$ et donc

$$W = -\mathbf{dE}.$$

Si le champ est uniforme et le dipôle est *rigide* (c'est-à-dire que son moment électrique ne varie pas avec le temps), la seule quantité qui peut varier est l'angle θ formé par **d** et **E**. Comme on l'apprend en mécanique, $-dW/d\theta = K$, où K est le moment d'une force. Ainsi, $K = Ed\sin\theta$ ou, sous forme vectorielle,

$$\mathbf{K} = [\mathbf{dE}].$$

Cette formule est également applicable dans le cas d'un champ non uniforme ; dans un champ non uniforme le dipôle rigide sera soumis en plus du couple de rotation **K** encore à une force $\mathbf{f} = \operatorname{grad}(\mathbf{dE})$. Comme $\mathbf{dE} = d_xE_x + d_yE_y + d_zE_z$, sa projection sur l'axe des x est $f_x = d_x\partial E_x/\partial x + d_y\partial E_y/\partial x + d_z\partial E_z/\partial x$. Mais $E_y = -\partial\varphi/\partial y$, $E_z = -\partial\varphi/\partial z$, si bien que $\partial E_y/\partial x = -\partial^2\varphi/\partial x\partial y = \partial E_x/\partial y$, $\partial E_z/\partial x = \partial E_x/\partial z$ et

$$f_x = \mathrm{d}_x\frac{\partial E_x}{\partial x} + \mathrm{d}_y\frac{\partial E_x}{\partial y} + \mathrm{d}_z\frac{\partial E_x}{\partial z}.$$

En se servant de l'opérateur différentiel vectoriel nabla (v. § 1.1) $\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$ (**i**, **j**, **k** étant des vecteurs unitaires normaux orientés le long des axes x, y, z), on peut écrire $f_x = (\mathbf{d}\nabla)E_x$ et, par conséquent,

$$\mathbf{f} = (\mathbf{d}\nabla)\,\mathbf{E}.$$

On peut arriver à la notion de dipôle en résolvant le problème général du potentiel dû à un système de charges, considéré loin de ce système. D'après le principe de la superposition

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_a \frac{q_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|},$$

où $\mathbf{r}_a$ est le rayon vecteur de la charge q_a. En développant cette expression en série suivant les puissances de $\mathbf{r}_a$, nous trouvons: $\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \ldots$, où le terme $\varphi^{(n)}$ est proportionnel à $r_a^{(n+1)}$. Il est évident que $\varphi^{(0)} = (4\pi\varepsilon_0 r)^{-1} \sum\limits_a q_a$ n'est autre que le potentiel produit par la charge totale d'un système placée en un point quelconque de ce système (que nous avons pris pour origine des coordonnées $r = 0$). Puis,

$$\varphi^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{rd}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}, \quad \mathbf{d} = \sum_a e_a \mathbf{r}_a.$$

Si le système considéré n'est constitué que de deux charges égales et opposées, ces formules se ramènent aux formules obtenues plus haut pour le potentiel du dipôle et traduisent ainsi la notion généralisée de moment dipolaire.

Fixons notre attention sur le fait que les termes $\varphi^{(0)}$, $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$, ... de la série (mais non pas leur somme φ) dépendent du choix de l'origine des coordonnées $r = 0$: par exemple, si l'on déplace l'origine des coordonnées d'un vecteur $\mathbf{b}$, le moment dipolaire variera de la quantité $\Delta\mathbf{d} = \mathbf{b} \sum\limits_a q_a$. Pourtant une telle indétermination est de peu d'importance. Le fait est que la notion de dipôle est utilisée surtout dans le cas d'un système électriquement neutre: c'est seulement dans ce cas que le champ du dipôle détermine le champ d'un système de charges et n'est pas qu'une petite correction à apporter dans le champ de la charge totale du système. Mais c'est précisément dans ce cas que $\sum\limits_a q_a = 0$, si bien que la valeur de $\mathbf{d}$ ne dépend pas du choix de l'origine des coordonnées.

Considérons maintenant le terme suivant $\varphi^{(2)}$ du développement du potentiel. En tenant compte que $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{r} = \frac{1}{r^5}(3x_i x_j - r^2\delta_{ij})$, nous obtenons

$$\varphi^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0 r^3} \sum_{i,j} n_i n_j Q_{ij}; \quad Q_{ij} = \sum_a q_a (3x_{ai}x_{aj} - r_a^2\delta_{ij}),$$

où $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ et δ_{ij} est le tenseur unitaire ou le *symbole de Kronecker* ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$); l'ensemble des quantités Q_{ij} est appelé *tenseur du moment électrique quadripolaire*. Puisque le tenseur Q_{ij} est symétrique ($Q_{ij} = Q_{ji}$) et $\sum\limits_i Q_{ii} = 0$, il comporte

cinq composantes indépendantes. Le potentiel du quadripôle décroît avec la distance comme r^{-3} et donc le champ comme r^{-4}. Ainsi, dans le cas où un système de charges a un moment dipolaire différent de zéro (sans parler de la charge totale), le potentiel $\varphi^{(2)}$ n'introduit dans l'expression de φ qu'une petite correction. Mais si $\sum_a q_a = 0$ et la symétrie dans la disposition des charges est telle que $d = 0$, le potentiel $\varphi^{(2)}$, ou comme on l'appelle le *potentiel du quadripôle*, représente le terme principal du développement de φ suivant les puissances de r_a.

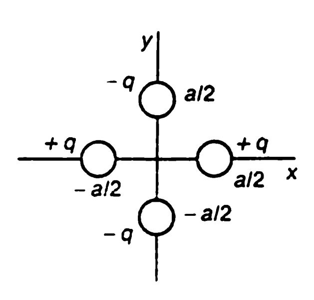


Fig. 1.8. Exemple de quadripôle

Considérons à titre d'exemple un système de quatre charges q, $-q$, q, $-q$ placées aux sommets d'un carré de côté a (fig. 1.8). Le moment dipolaire d'un tel système est nul et son moment quadripolaire n'a que deux composantes non nulles: $Q_{xx} = -Q_{yy} = 3qa^2$.

Recherchons le potentiel de notre quadripôle. En introduisant l'angle polaire θ et l'angle azimutal χ du vecteur $\mathbf{n}$ ($n_x = \sin\theta\cos\chi$, $n_y = \sin\theta\sin\chi$, $n_z = \cos\theta$), nous trouvons $\sum_{i,j} n_i n_j Q_{ij} = 3qa^2 \times$ $\times \sin^2\theta\cos 2\chi$. C'est pourquoi le potentiel devient

$$\varphi^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{3qa^2}{8\pi\varepsilon_0 r^3}\sin^2\theta\cos 2\chi.$$

En calculant le gradient de $\varphi^{(2)}(\mathbf{r})$, on peut trouver l'intensité du champ du quadripôle.

§ 1.4. Conducteur dans le champ électrostatique

Au point de vue de leur comportement dans le champ *électrostatique* (c'est-à-dire dans un champ électrique invariable dans le temps) tous les corps se répartissent en deux classes: les *conducteurs* et les *isolants* ou les diélectriques.

Le conducteur est un corps dans lequel le champ électrostatique a pour effet de provoquer un mouvement coordonné (de l'ensemble) des charges, c'est-à-dire un courant électrique. L'isolant est un corps dans lequel un champ électrostatique suffisamment faible ne provoque pas de courant électrique.

Dans des champs très intenses le courant circule également dans un diélectrique (ce phénomène est appelé *claquage électrique*).

C'est sur l'exemple de gaz qu'on peut comprendre le plus facilement la différence entre un conducteur et un diélectrique. Un gaz neutre est un diélectrique parce que les atomes ou les molécules qui

le constituent sont électriquement neutres et ne doivent donc pas se déplacer sous l'effet d'un champ électrique extérieur. Au contraire, un gaz ionisé — *le plasma* — est un conducteur parce que les électrons et les ions n'y sont pas liés les uns aux autres et peuvent donc se déplacer indépendamment sous l'action d'un champ extérieur. Une situation analogue se produit également dans le cas des solutions: les solutions contenant des molécules neutres de la substance dissoute sont des isolants, alors que les solutions contenant des ions, que l'on appelle solutions d'*électrolytes*, sont des conducteurs. (Exemple: une faible solution du sel de cuisine contenant non pas les molécules NaCl mais les ions Na^+ et Cl^-.)

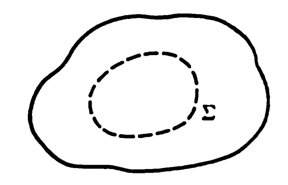


Fig. 1.9. Nullité de la densité volumique de charge dans un conducteur

Les choses se passent beaucoup moins simplement dans le cas des corps condensés. Pourquoi certains cristaux et liquides (par exemple les métaux) conduisent-ils le courant électrique et d'autres non ? Nous aborderons cette question dans la deuxième partie du livre, et pour l'instant, nous allons étudier les propriétés de ces deux classes de corps qui ne dépendent pas des détails de leur structure.

Il est facile de comprendre que le déplacement des charges dans un conducteur qui est introduit dans un champ électrique extérieur doit s'arrêter rapidement. En effet, au cas contraire, le conducteur placé dans un champ électrique pourrait être utilisé pour la réalisation du moteur perpétuel de première espèce : les charges en mouvement auraient effectué continuellement un travail (en particulier, une chaleur serait dégagée continuellement dans le conducteur), alors que l'état des charges créatrices du champ électrostatique serait inchangé. Cela signifie que le champ électrique à l'intérieur du conducteur doit s'annuler.

Ainsi, à l'état d'équilibre, le champ électrique à l'intérieur d'un conducteur est nul. Il en résulte que la densité volumique de charge à l'intérieur d'un conducteur est elle aussi nulle. En effet, délimitons dans la masse du conducteur une surface fermée quelconque Σ (fig. 1.9). Comme l'intensité du champ sur la surface Σ est nulle, le flux d'intensité à travers cette surface est lui aussi nul. Il s'ensuit d'après le théorème de Gauss que la charge à l'intérieur de la surface est nulle et, puisque la surface Σ peut être choisie arbitrairement, la densité volumique de charge dans le conducteur est nulle.

C'est pourquoi si l'on communique au conducteur une certaine charge volumique, les charges distinctes (ou, comme on dit, les *porteurs de courant*) quitteront le volume du conducteur pour se placer sur sa surface. Elles se répartiront sur la surface de telle sorte que soient nulles l'intensité du champ à l'intérieur du conducteur et sa composante tangentielle $\mathbf{E}_t$ sur la surface du conducteur (si

cette dernière condition n'était pas remplie, les charges seraient animées d'un mouvement continu sur la surface du conducteur, ce qui est impossible pour la même raison que celle qui rend impossible le déplacement continu des charges à l'intérieur du conducteur). Nous voyons que

à l'extérieur du conducteur, au voisinage de sa surface, l'intensité du champ doit être dirigée normalement à la surface du conducteur.

Sa valeur E_n est facile à lier à la densité superficielle de charge σ. Appliquons à cet effet le théorème de Gauss en prenant comme surface Σ un cylindre dont les bases sont infiniment voisines de la surface et lui parallèles, l'une d'elles étant à l'intérieur et l'autre à l'ex-

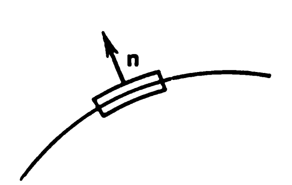


Fig. 1.10. Relation entre E_n et la densité superficielle de charge

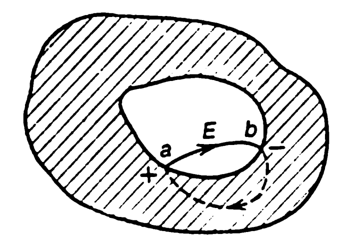


Fig. 1.11. Champ électrique à l'intérieur d'une cavité entourée de conducteur

térieur du conducteur (fig. 1.10). Ce n'est que le flux d'intensité du champ électrique à travers la base extérieure du cylindre, égal à $E_n\Delta S$ (ΔS étant l'aire de la base), qui est différent de zéro. Quant à la charge à l'intérieur du cylindre, elle est égale à $\sigma\Delta S$, nous avons donc $E_n = \varepsilon_0^{-1}\sigma$. Si $\sigma > 0$, $E_n > 0$, c'est-à-dire que l'intensité du champ au voisinage de la surface est dirigée suivant la normale intérieure **n**.

Comme l'intensité du champ et la densité volumique de charge à l'intérieur du conducteur sont nulles, on peut s'attendre à ce qu'après l'élimination d'une partie de la substance du conducteur le champ dans la cavité ainsi formée sera toujours nul. Pour nous en convaincre, supposons le contraire, c'est-à-dire que le champ dans la cavité soit non nul. Puisque le champ à l'intérieur de la substance du conducteur est nul, les lignes de force à l'intérieur de la cavité doivent partir de la surface intérieure du conducteur et se terminer à cette surface, et leurs extrémités doivent porter des charges superficielles de signes contraires. Prenons maintenant l'une quelconque de ces lignes et fermons-la par une ligne arbitraire située dans la couche conductrice (fig. 1.11). La circulation de l'intensité du champ

électrique le long d'un tel contour fermé est $\oint \mathbf{E}\, d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{E}\, d\mathbf{r}$, mais comme $\mathbf{E} \parallel d\mathbf{r}$, cette intégrale est positive alors que la circulation de l'intensité du champ électrostatique le long de tout contour fermé doit être nulle. Il en ressort que *l'intensité du champ à l'intérieur d'une cavité fermée entourée d'un conducteur est nulle.*

Cette propriété du champ est étroitement liée au théorème de Gauss qui est à son tour une conséquence de la loi de Coulomb. Si la loi de Coulomb n'était pas valable et la force d'interaction électrique variait avec la distance suivant la loi de $r^{-2+\nu}$, où $\nu \neq 0$, l'intensité du champ dans la cavité devrait être différente de zéro. Les mesures expérimentales de l'intensité du champ dans la cavité ont permis d'évaluer la limite supérieure de la quantité ν ; il se trouve qu'elle est inférieure à 10^{-9}.

C'est sur ce fait qu'est basée la *méthode de protection électrostatique*: pour protéger un appareil contre l'action des champs électrostatiques étrangers, il doit être entouré d'une couche conductrice, par exemple, d'une enveloppe métallique fermée d'épaisseur quelconque. Cette enveloppe ne doit pas être obligatoirement continue, elle peut être réalisée en forme de toile métallique ou de grillage. Des considérations relatives aux dimensions montrent que le champ perturbateur extérieur ne pénètre à l'intérieur d'un volume limité par une grille métallique qu'à une profondeur comparable à la dimension de l'orifice, c'est-à-dire à la dimension de la maille de grille. Si la grille utilisée est à mailles suffisamment serrées, la profondeur de pénétration est très faible.

Considérons un conducteur constitué de deux sphères de rayon différent, reliées l'une à l'autre par un fil mince. En l'absence du fil les potentiels des sphères seraient $\varphi_1 = q_1/(4\pi\varepsilon_0 r_1)$ et $\varphi_2 = q_2/(4\pi\varepsilon_0 r_2)$, où q_1, q_2 sont les charges et r_1, r_2, les rayons des sphères, alors que l'intensité du champ à la surface des sphères serait $E_1 = \varphi_1/r_1$ et $E_2 = \varphi_2/r_2$. Si maintenant nous relions les sphères par un fil, il en résultera surtout l'égalisation des potentiels des sphères (la distribution des charges sur les sphères restera presque la même). Mais si $\varphi_1 = \varphi_2$, alors $E_1/E_2 = r_2/r_1$, c'est-à-dire que les intensités du champ sont inversement proportionnelles aux rayons des sphères. Les densités superficielles de charges $\sigma_1 = q_1/(4\pi r_1^2)$, $\sigma_2 = q_2/(4\pi r_2^2)$ sont elles aussi inversement proportionnelles aux rayons des sphères: $\sigma_1/\sigma_2 = r_2/r_1$.

Le résultat obtenu est également vrai dans un cas plus général que celui de deux sphères de rayon différent reliées entre elles par un conducteur. A savoir, *plus petit est le rayon de courbure du conducteur, plus grande est l'intensité du champ près de sa surface et plus forte est la densité superficielle de charge.* C'est pourquoi les intensités des champs sont particulièrement élevées près des bords pointus du conducteur.

§ 1.5. Induction électrostatique

Examinons ce qui se passe lorsqu'un conducteur non chargé est introduit dans un champ électrostatique donné produit par des charges extérieures quelconques. L'intensité du champ électrostatique à l'intérieur du conducteur doit être nulle. Initialement, le champ dans le volume occupé plus tard par le conducteur était différent de zéro, alors que maintenant, après l'introduction du conducteur, il doit s'annuler. Par voie de conséquence sur le conducteur placé dans le champ électrostatique doivent prendre naissance des charges dont le champ, superposé au champ des charges extérieures, doit assurer une compensation complète du champ à l'intérieur du conducteur. Ce phénomène — l'apparition de charges électriques sur le conducteur introduit dans un champ électrostatique — porte le nom d'*induction électrostatique*. En vertu de la loi de conservation de la charge, la charge totale induite sur le conducteur doit être nulle. Ainsi,

l'induction électrostatique donne lieu à l'apparition des charges égales en valeur absolue et de signes contraires.

Soit par exemple un champ produit par une sphère chargée dans lequel est introduit un conducteur. Avant l'introduction du conduc-

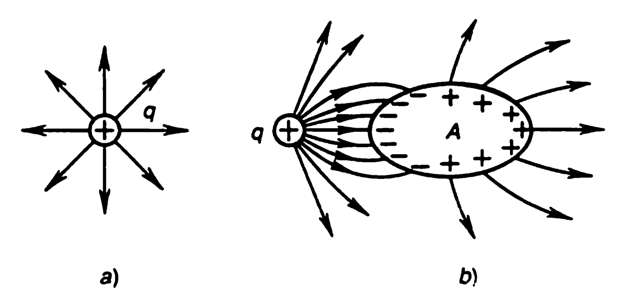


Fig. 1.12. Déformation du champ électrique en cas d'introduction d'un conducteur

teur, les lignes de force du champ avaient la forme des droites partant du centre de la sphère (fig. 1.12, *a*). Après l'introduction du conducteur A (fig. 1.12, *b*) le champ dans son volume doit disparaître. Ceci signifie que certaines des lignes de force partant de q doivent se terminer sur la surface de A, alors que d'autres doivent, après l'interruption, partir de cette surface. Mais là où commencent et se terminent les lignes de force se trouvent des charges électriques. Ainsi, le conducteur introduit dans un champ électrostatique doit se charger et ceci de telle sorte que sur la partie de la surface du conducteur la plus proche de la charge q apparaissent des charges de

signes opposés à q, et sur la partie la plus éloignée de la surface de A les charges de même signe que q.

Les lignes de force du champ déformé sont orthogonales à la surface du conducteur introduit dans le champ, alors que la densité de charge superficielle induite σ est liée à la composante normale E_n du champ par la relation connue $\sigma = \varepsilon_0 E_n$. Puis, puisque $\mathbf{E} = -\text{grad}\,\varphi$, la nullité de l'intensité du champ implique la constance du potentiel:

le potentiel a une seule et même valeur en tous les points du conducteur tant à l'intérieur qu'à sa surface.

Ceci signifie que la surface du conducteur est une surface équipotentielle. Soulignons que ces conclusions sont valables tant dans le cas où le conducteur est introduit dans un champ électrostatique extérieur que dans celui où le champ est produit par une charge communiquée au conducteur.

Comme la densité volumique de charge dans le conducteur est nulle, le potentiel du champ produit par des conducteurs chargés satisfait à l'équation de Laplace $\Delta\varphi = 0$. Si l'on cherche le potentiel du champ produit par un conducteur auquel on a communiqué une charge déterminée, on doit prendre celle des solutions de cette équation qui a une valeur constante à la surface du conducteur. Dans ce cas, vu que $E_n = -\partial\varphi/\partial n$ et en même temps $E_n = \varepsilon_0^{-1}\sigma$, la charge totale Q du conducteur doit être liée au potentiel φ par la relation

$$Q = -\varepsilon_0 \int \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, ds,$$

où l'intégration est effectuée sur toute la surface du conducteur et ds est un élément de cette surface ($\partial/\partial n = \mathbf{n}\nabla$ étant la dérivée suivant la direction de la normale).

Si le conducteur est placé dans un champ extérieur, on doit prendre celle des solutions de l'équation de Laplace qui coïncide avec le potentiel de ce champ loin du conducteur où le champ de départ n'est pas déformé.

Le calcul de la densité des charges superficielles sur un conducteur placé dans un champ électrique est dans le cas général un problème complexe ; ce n'est que dans certains cas les plus simples qu'on arrive à obtenir une solution directe sans avoir recours à l'équation de Laplace.

Déterminons d'abord le champ d'une charge ponctuelle en présence d'une plaque conductrice plane. La plaque sera supposée illimitée et mise à la terre de sorte que la charge sur sa face inférieure est nulle (s'est écoulée vers la terre). Il est évident que ce problème est équivalent à celui du champ produit par une charge ponctuelle en présence d'un conducteur comportant une frontière

plane et occupant un demi-espace $z < 0$ (fig. 1.13, *a*). S'il n'y avait pas de conducteur, la charge q produirait au point A un potentiel $\varphi_q = q/(4\pi\varepsilon_0 r)$. Les charges induites sur la surface du conducteur engendrent un potentiel supplémentaire

$$\varphi_\sigma(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\sigma\, ds}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_\sigma|},$$

où σ est la densité de charge superficielle et $\mathbf{r}_\sigma$ le rayon vecteur du point appartenant à la surface. Ainsi, le potentiel modifié $\varphi = \varphi_q + \varphi_\sigma$.

Proposons-nous de déterminer le potentiel φ_σ en supposant que pour $z > 0$ l'action de tout le plan chargé $z = 0$ est équivalente

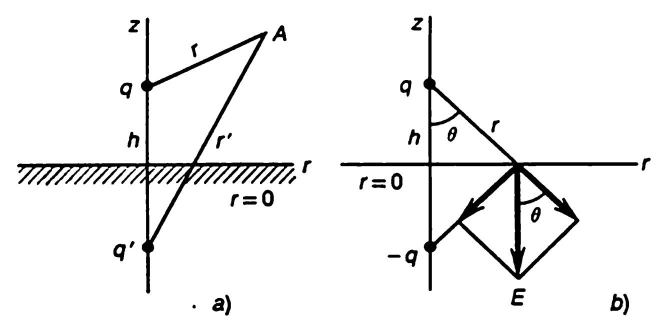


Fig. 1.13. Charge ponctuelle en présence d'une plaque conductrice plane

à l'action d'une certaine charge ponctuelle unique q' située dans le demi-plan inférieur. En d'autres termes, nous supposons que $\varphi_\sigma = q'/(4\pi\varepsilon_0 r')$, où r' est la distance de la charge fictive q' au point A. Il est facile de voir que la condition $\varphi_q + \varphi_\sigma = \mathrm{C^{te}}$ pour $z = 0$ sera satisfaite si la charge fictive est placée en un point qui est l'image dans un miroir du point d'emplacement de la charge réelle q par rapport à la frontière du conducteur et si l'on pose $q' = -q$.

On peut se demander dans quelle mesure est exacte la solution ainsi obtenue du problème. La réponse est donnée par le *théorème d'unicité* de la solution du problème électrostatique:

si l'on a trouvé par un procédé quelconque (ou on a deviné!) une fonction φ (r satisfaisant à l'équation de Laplace $\Delta\varphi = 0$ et telle que le champ $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$ qui lui correspond satisfait aux conditions aux limites (aux surfaces du conducteur) de l'électrostatique $E_t = 0$ et s'annule pour $r \to \infty$, le potentiel du champ est déterminé de façon univoque par cette fonction φ (r).

Toutes ces conditions étant remplies dans notre cas, on a $q' = -q$. D'un autre côté, puisque le problème électrostatique comporte une solution unique, nous pouvons être sûrs que la solution trouvée est exacte. Une telle méthode de résolution d'un problème

électrostatique, dans laquelle l'action des charges réelles réparties sur une surface est remplacée par l'action de certaines charges ponctuelles fictives (qui peuvent être plusieurs dans le cas de plusieurs surfaces) est connue sous le nom de *méthode des images électriques.*

Après cela il devient facile de trouver la densité de charge superficielle. En effet, connaissant le potentiel φ, il n'est pas difficile de déterminer la projection E_n du champ $\mathbf{E} = -\text{grad}\ \varphi$ sur la direction de la normale extérieure à la surface du conducteur (fig. 1.13, *b*). Pour $z = 0$ le champ est dirigé suivant la normale intérieure et $E = q \cos \theta/(2\pi\varepsilon_0 r^2) = qh/(2\pi\varepsilon_0 r^3)$, si bien que

$$\sigma = -qh/(2\pi r^3).$$

La charge superficielle totale est égale à $-q$.

Comme les charges superficielles sont de signe opposé à celui de la charge q, elles attirent cette dernière. Autrement dit, la charge q est attirée par le conducteur. La force F de cette attraction est égale à la force d'attraction des charges q et $-q$, c'est-à-dire que $F = q^2/(16\pi\varepsilon_0 h^2)$.

§ 1.6. Capacité électrique d'un conducteur

On sait que si une certaine charge est communiquée à un conducteur isolé, elle se répartit sur la surface du conducteur de telle sorte que cette surface devient équipotentielle. Nous supposerons que le potentiel créé par la charge sur le conducteur soit nul à une distance infiniment grande du conducteur. Alors, si nous augmentons de deux fois la charge du conducteur, le potentiel du champ produit par le conducteur sera doublé et donc sera doublé le potentiel du conducteur. Ainsi, la charge q du conducteur est proportionnelle à son potentiel φ:

$$q = C\varphi,$$

où C est un coefficient de proportionnalité dont la valeur dépend des dimensions et de la forme du conducteur. Il est appelé *capacité électrique*, ou *capacité* tout court, du conducteur. L'unité de capacité est le farad (F): $\text{F} = \text{C}\cdot\text{V}^{-1}$.

Dans le système C.G.S. les dimensions de la capacité coïncident avec celles de la longueur: $1\ \text{F} = 9\cdot 10^{11}$ cm. Il est facile de voir que si le conducteur a la forme d'une sphère, sa capacité en C.G.S. est égale à R, où R est le rayon de la sphère.

Si des conducteurs (non chargés) sont approchés d'un conducteur chargé, le potentiel de celui-ci diminue (pour la même charge sur le conducteur) parce que sur les conducteurs voisins sont induites des charges, dont le signe est contraire plus près du conducteur chargé et le même, plus loin de ce conducteur. Cette diminution du potentiel d'un conducteur chargé à l'approche d'autres conducteurs non

chargés peut être interprétée comme une augmentation de la capacité du conducteur chargé.

L'augmentation de la capacité est particulièrement grande lorsque le conducteur (fig. 1.14) est entouré d'un autre conducteur fermé mis à la terre (le rôle de la terre peut être joué par un simple conducteur massif, par exemple, le châssis d'un récepteur). En effet, dans ce cas les charges induites sur le conducteur fermé, de même signe

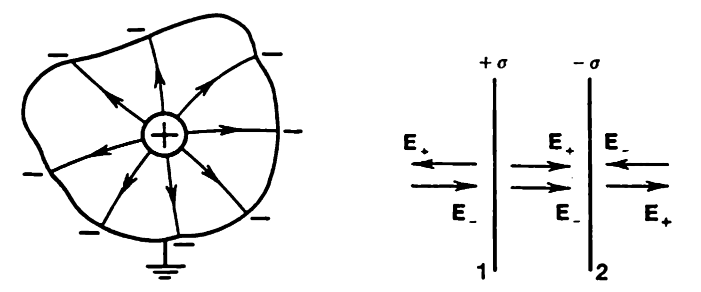


Fig. 1.14. Condensateur

Fig 1.15 Condensateur plan

que la charge du conducteur intérieur, s'écouleront vers la terre, alors que la charge induite totale, de signe contraire, sera égale en module à la charge du conducteur intérieur parce que toutes les lignes de force issues du conducteur intérieur se ferment sur le conducteur qui l'entoure.

Considérons deux conducteurs portant des charges q et $-q$. Soient φ_1 et φ_2 les potentiels dus à ces charges. Alors la différence de ces potentiels $\varphi_1 - \varphi_2$ est proportionnelle à la charge q.

Le rapport de la charge à la différence de potentiel est appelé capacité d'un système de conducteurs, et le système lui-même s'appelle condensateur.

La capacité d'un condensateur

$$C = q/(\varphi_1 - \varphi_2)$$

se détermine uniquement par la géométrie des conducteurs (armatures du condensateur) et ne dépend pas de q.

Le condensateur le plus simple est un *condensateur plan* dont les armatures sont constituées par deux plaques conductrices parallèles. En supposant ces plaques très grandes, il est facile de déterminer la capacité d'un condensateur plan. Rappelons que l'intensité du champ produit par un dipôle représentant un plan chargé est égale à $\sigma/(2\varepsilon_0)$, où σ est la densité superficielle de charge. Les intensités des champs de deux plans chargés à densités superficielles de charge σ et $-\sigma$ s'ajoutent dans l'espace entre les plans et se retranchent à l'extérieur de ceux-ci (fig. 1.15) de sorte que $E = \sigma/\varepsilon_0$ à l'intérieur

du condensateur et $E = 0$ à son extérieur. Cette conclusion n'est certes valable que dans le cas des plaques très grandes, c'est-à-dire des plaques dont les dimensions sont très supérieures à la distance entre elles. En multipliant l'intensité du champ E par la distance d des plaques, nous trouvons la différence entre les potentiels φ_1 et φ_2 des deux plaques: $\varphi_1 - \varphi_2 = Ed = \sigma d/\varepsilon_0$. La charge d'une armature étant $q = \sigma S$, où S est l'aire de l'armature, la capacité d'un condensateur plan a pour expression

$$C = \varepsilon_0 S/d.$$

§ 1.7. Energie du champ électrique

Lorsque nous chargeons un conducteur, nous lui communiquons en même temps une certaine réserve d'énergie. En effet, chaque nouvelle charge transmise au conducteur subit une force de répulsion de la part des charges déjà accumulées sur le conducteur et pour surmonter cette force il faut accomplir un travail.

Si dq' est la charge transmise au conducteur, le travail effectué est évidemment égal à l'énergie dW de cette charge dans le champ produit par les éléments de charge apportés précédemment, c'est-à-dire que $dW = dq'\varphi'$, où φ' est le potentiel du conducteur créé par les charges transmises avant la charge dq'. Ce potentiel est égal, d'après ce qui a été établi au paragraphe précédent, à $\varphi' = q'/C$, où q' est la charge du conducteur à l'instant d'introduction de l'élément de charge dq', et C, la capacité du conducteur. Ainsi,

$$dW = \frac{q'}{C}\, dq' = d\,\frac{q'^2}{2C}.$$

C'est pourquoi, si la charge finale du conducteur est égale à q, le travail total effectué lors de l'accumulation de cette charge a pour valeur

$$W = q^2/(2C).$$

Ce travail se transforme en *énergie électrique du conducteur.*

En tenant compte que $q = C\varphi$, où φ est le potentiel du conducteur portant la charge q (le potentiel à une distance infiniment grande du conducteur est supposé nul), on peut récrire l'expression donnant l'énergie du conducteur sous la forme

$$W = \frac{1}{2}\, C\varphi^2 = \frac{1}{2}\, q\varphi.$$

Fixons notre attention sur le facteur 1/2 figurant dans la dernière formule: si le potentiel φ était créé par des charges étrangères et non par la charge q, l'énergie de la charge q dans un tel champ serait $q\varphi$.

Si l'on considère un système de plusieurs conducteurs portant des charges q_1, q_2, . . ., leur énergie électrique a pour expression

$$W = \frac{1}{2} q_1\varphi_1 + \frac{1}{2} q_2\varphi_2 + \ldots,$$

où φ_1, φ_2, . . . sont les potentiels des conducteurs produits par toutes les charges q_1, q_2, . . . En particulier, l'énergie d'un condensateur a pour valeur

$$W = \frac{1}{2} q (\varphi_1 - \varphi_2),$$

où q est la charge d'une armature et φ_1, φ_2 sont les potentiels des deux armatures. Cette expression peut se récrire également sous la forme

$$W = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C (\varphi_1 - \varphi_2)^2,$$

où C est la capacité du condensateur.

Examinons de plus près un condensateur plan. Puisque sa capacité est égale à $\varepsilon_0 S/d$, l'énergie du condensateur plan peut être représentée sous la forme

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \sigma^2 S d,$$

où σ est la densité superficielle de charges. Cette formule a un sens physique bien simple. $\sigma/(2\varepsilon_0)$ étant l'intensité du champ créé par une des plaques (armatures), chacune des plaques subit de la part de l'autre une force d'attraction

$$F = \frac{\varepsilon_0}{2} \sigma^2 S.$$

C'est pourquoi $W = Fd$, c'est-à-dire que l'énergie W est égale au travail qu'il faut effectuer pour écarter les plaques à la distance d. En se rappelant que $E = \sigma/\varepsilon_0$, on peut représenter l'énergie du condensateur sous la forme $W = \frac{1}{2}\sigma E V = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 V$, où $V = Sd$ est le volume du condensateur. Nous voyons que *l'énergie électrique du condensateur est proportionnelle au volume occupé par le champ électrique*. On peut donc introduire la notion de *densité d'énergie électrique*

$$w = W/V = \varepsilon_0 E^2/2,$$

qui dépend uniquement de l'intensité du champ électrique.

Dans le système d'unités de Gauss la densité d'énergie électrique est donnée par la formule

$$w = E^2/(8\pi).$$

Cette expression peut s'interpréter ainsi : l'énergie électrique est concentrée non pas dans les charges mais dans le champ électrique, et chaque élément de volume dV contient une énergie $dW = w dV$. Nous verrons plus loin que c'est précisément une telle interprétation qui est valable dans le cas le plus général des champs à variations absolument quelconques dans l'espace et dans le temps : la formule $W = \frac{1}{2} q\varphi$ valable en électrostatique perd son sens alors que la formule $W = \int w dV$ pour l'énergie du champ reste toujours valable (tant qu'il s'agit du vide).

Un conducteur chargé subit des forces de la part du champ qu'il a engendré lui-même. Comme les éléments de charge sont portés par la surface du conducteur et se repoussent, ces forces s'appliquent à la surface, c'est-à-dire ont le caractère des forces de tension ou de pression interne. La force exercée sur l'unité de surface est $\mathbf{f} = \frac{1}{2}\sigma\mathbf{E}$, où σ est la densité superficielle de charge. (Le facteur $\frac{1}{2}$ y figure du fait que nous ne devons prendre en compte que le champ qui est produit par tous les éléments de surface, déduction faite de l'élément considéré, mais le champ dû à celui-ci est égal à la moitié du champ total.) En tenant compte que $\sigma = \varepsilon_0 E$, nous obtenons

$$\mathbf{f} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \mathbf{n},$$

où $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire suivant la normale extérieure à la surface du conducteur. Cette même formule peut être obtenue d'une autre manière en se rappelant la relation générale $p = -\partial W/\partial V$ entre la pression interne p et l'énergie W du corps et en y introduisant l'énergie du champ au lieu de W. Nous voyons que les forces agissent comme si les lignes de force étaient représentées par des fils matériels élastiques et tendus auxquels est appliquée une tension élastique $\varepsilon_0 E^2/2$.

En pratique, pour déterminer les forces exercées sur le conducteur, il est commode de procéder de la façon suivante. Introduisons des paramètres géométriques ξ_1, ξ_2, . . . qui caractérisent la forme et les dimensions du conducteur et jouent le rôle des coordonnées déterminant la position relative de ses différents éléments. Une variation $\delta\xi$ d'un quelconque de ces paramètres fait naître une force f qui effectue un travail $\delta A = f\delta\xi$. Mais le travail produit lorsque la charge du conducteur reste inchangée est égal à la diminution de l'énergie W, c'est-à-dire que $\delta A = -\delta W$ de sorte que $f = -\partial W/\partial\xi$ pour $q = \mathrm{C^{te}}$. En remarquant que dans l'expression $W = q^2/(2C)$ c'est la capacité C qui dépend des paramètres ξ, nous obtenons l'ex-

pression définitive

$$f = \frac{q^2}{2C^2} \frac{\partial C}{\partial \xi}.$$

En y posant $\xi = V$, cherchons la pression excédentaire agissant de l'intérieur d'un conducteur chargé. En multipliant Δp par le coefficient de dilatation tridimensionnelle du conducteur, nous trouverons la variation de son volume. La déformation d'un conducteur (c'est-à-dire la variation de son volume et de sa forme) sous l'action des forces électriques est appelée *électrostriction*.

Indiquons, avant de clore ce chapitre, certaines propriétés de l'énergie électrostatique des conducteurs.

Les charges apportées aux conducteurs se répartissent sur leurs surfaces de telle sorte que l'énergie du champ électrostatique qui en résulte soit minimale (*théorème de Thomson*). L'introduction d'un conducteur non chargé dans le champ d'un système de charges déterminé conduit toujours à une diminution de l'énergie du champ.

L'énergie potentielle d'un système de charges $W = (8\pi\varepsilon_0)^{-1} \times \times \sum_{i,k} q_i q_k / r_{ik}$, où r_{ik} est la distance entre les charges q_i et q_k, ne comporte pas de minimum (de maximum) en tant que fonction des coordonnées des charges. En effet, pour trouver le minimum (ou le maximum) de l'énergie potentielle considérée comme une fonction des coordonnées x, y, z d'une charge quelconque, il faut résoudre les équations $\partial W/\partial x = 0$, $\partial W/\partial y = 0$, $\partial W/\partial z = 0$ par rapport aux coordonnées x, y, z. Les valeurs de x, y, z obtenues à partir de ces équations doivent, dans le cas du minimum, vérifier en particulier les inégalités

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} > 0.$$

Or, chacune des fonctions $1/r_{ik}$ satisfait pour $r_{ik} \neq 0$ à l'équation de Laplace $\Delta (1/r_{ik}) = 0$; ceci signifie que la fonction W satisfait elle aussi à cette équation. C'est pourquoi les inégalités sus-indiquées ne peuvent pas être satisfaites pour les dérivées secondes de la fonction W. Il s'ensuit que

une configuration statique de charges électriques soumises uniquement à des forces électrostatiques ne peut pas être stable (*théorème d'Earnshaw*).

Du théorème d'Earnshaw il résulte que si dans un atome agissent essentiellement des forces électriques, cet atome ne peut pas être une configuration statique du noyau et des électrons. Autrement dit, les électrons de l'atome doivent se trouver obligatoirement en état de mouvement. Dans le cas contraire, l'atome serait instable.

Dans les métaux, les électrons peuvent être considérés comme des charges libres (dans un certain sens comme il sera montré au

chap. 9). Ils ne quittent pas spontanément le métal parce qu'ils sont maintenus par les charges positives (constituant ce qu'on appelle carcasse ionique). Dans les métaux solides et liquides les ions sont séparés par des distances de l'ordre de 10^{-10} m, mais ils n'éclatent pas malgré les forces de répulsion coulombienne. Les forces qui lient les ions se ramènent finalement elles aussi aux forces coulombiennes ; pourtant elles ne peuvent être expliquées que dans le cadre de la mécanique quantique. Ces forces ont pour origine l'identité des électrons et on peut dire d'une façon grossièrement approchée qu'elles sont dues à ce que les ions « possèdent en commun » les seuls et mêmes électrons. (Les forces qui lient par exemple deux ions négatifs Cl^- en une molécule Cl_2 sont de nature analogue. Cette question sera reprise avec plus de détail au § 12.7.)

FORMULES FONDAMENTALES

Loi de Coulomb dans le vide	$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}$
Potentiel	$\varphi = q/(4\pi\varepsilon_0 r)$
Relation entre l'intensité du champ et le potentiel	$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$
Caractère irrotationnel du champ électrostatique	$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \oint \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = 0$
Théorème de Gauss	$N \equiv \int_\Sigma \mathbf{E}\, d\mathbf{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \Sigma q_i$
Equation de Poisson	$\Delta\varphi = -\rho/\varepsilon_0$
Potentiel et champ d'un dipôle	$\varphi_d = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{rd}}{r^3}$, $\mathbf{E}_d = \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{nd}) - \mathbf{d}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$
Densité d'énergie électrique	$w = \varepsilon_0 E^2/(8\pi)$

CHAPITRE 2

ÉLECTROSTATIQUE DES DIÉLECTRIQUES

§ 2.1. Induction électrique et polarisation

Au chap. 1 il a été établi que le déplacement des charges dans les molécules d'un diélectrique placé dans un champ électrostatique conduit à une diminution du champ résultant dans le diélectrique. Ceci signifie que si une charge q est introduite dans un diélectrique, l'intensité du champ qu'elle produit à une distance r n'est plus égale à $q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$, comme c'était dans le cas où la charge se trouvait dans le vide, mais a une valeur plus faible. A savoir, si le diélectrique est homogène, isotrope et illimité, on a

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2},$$

où ε est une grandeur caractéristique de chaque diélectrique, supérieure à l'unité et indiquant combien de fois l'intensité du champ diminue par rapport à l'intensité dans le vide. On l'appelle *permittivité électrique* du diélectrique (parfois elle est appelée *permittivité relative* et notée ε_r), alors que la constante ε_0 s'appelle *permittivité du vide*. Par exemple, pour l'eau $\varepsilon = 81$, pour l'alcool $\varepsilon = 26$, pour le verre $\varepsilon = 5$, pour le kérosène $\varepsilon = 2$, pour l'air $\varepsilon = 1{,}006$.

La diminution de l'intensité du champ dans le diélectrique signifie à son tour que la force d'interaction électrique entre deux charges ponctuelles q_1 et q_2 placées dans le diélectrique est, pour la même distance entre les charges, ε fois plus faible que dans le vide:

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}.$$

De même que dans le vide, le champ électrostatique dans les diélectriques est irrotationnel, c'est-à-dire que rot $\mathbf{E} = 0$, et est lié au potentiel φ par la même formule $\mathbf{E} = -\text{grad}\ \varphi$.

La diminution de la force d'interaction entre les charges dans le diélectrique conduit à la diminution du potentiel dans le diélectrique. La charge q produit dans le diélectrique, à une distance r, un potentiel

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r}.$$

Enfin, puisque l'intensité du champ est ε fois plus faible dans le diélectrique que dans le vide, le flux d'intensité du champ électrique est lui aussi ε fois plus faible dans le diélectrique que dans le vide. C'est pourquoi, si l'on introduit un vecteur

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$$

(on l'appelle *déplacement électrique* ou *induction électrique*),

le flux Ψ de ce vecteur à travers une surface fermée quelconque S est égal, comme dans le vide, à la charge électrique vraie totale $\sum q^{(e)}$ contenue dans le volume limité par cette surface (théorème de Gauss) :

$$\Psi = \int \mathbf{D}\, d\mathbf{s} = \sum q^{(e)}.$$

Sous forme différentielle, cette loi s'écrit div $\mathbf{D} = \rho$, ρ étant la densité volumique de charges vraies.

Soulignons que les charges vraies $q^{(e)}$ qui interviennent dans le théorème de Gauss n'entrent pas dans la composition des molécules

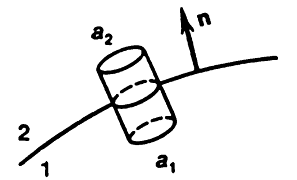


Fig. 2.1. Continuité de D_n à la surface de séparation de deux diélectriques

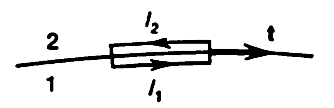


Fig. 2.2. Continuité de E_t à la surface de séparation entre deux diélectriques

de diélectrique. En particulier, si une surface fermée ne contient pas de charges vraies, le flux de déplacement électrique $\mathbf{D}$ à travers cette surface est nul.

Il en résulte qu'à la surface frontière entre deux diélectriques la composante normale du vecteur $\mathbf{D}$ doit être continue. En effet, considérons un cylindre (fig. 2.1) dont les bases a_1 et a_2 se situent dans les diélectriques *1* et *2* dans le voisinage immédiat de leur surface de séparation et parallèlement à cette surface. Le flux de déplacement électrique à travers la base supérieure est égal à $\mathbf{D}_2\mathbf{n}\, \Delta S$, où $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire, normal à la surface de séparation et dirigé du premier diélectrique vers le second, et ΔS, l'aire de la base ; le flux à travers la base inférieure sera égal à $-\mathbf{D}_1\mathbf{n}\, \Delta S$. Si l'on fait tendre vers zéro la hauteur du cylindre, le flux de déplacement électrique à travers la surface latérale du cylindre tendra vers zéro et, comme les charges vraies à l'intérieur du cylindre sont nulles, nous obtiendrons $\mathbf{D}_2\mathbf{n}\, \Delta S - \mathbf{D}_1\mathbf{n}\, \Delta S = 0$, d'où

$$D_{1n} = D_{2n}$$

(l'indice inférieur n désigne les composantes normales des vecteurs).

Montrons maintenant que la composante tangentielle du champ électrique se conserve au passage d'un milieu à un autre. Considérons à cet effet un petit contour, dont les deux côtés l_1 et l_2 se situent dans les diélectriques *1* et *2* respectivement, au voisinage immédiat de la surface de séparation et parallèlement à cette surface (fig. 2.2),

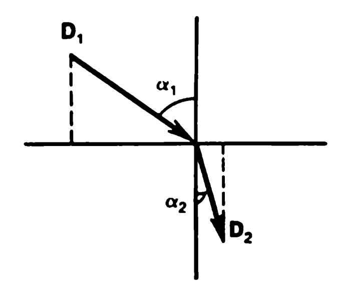


Fig. 2.3. Réfraction des lignes de force par la surface frontière entre deux diélectriques

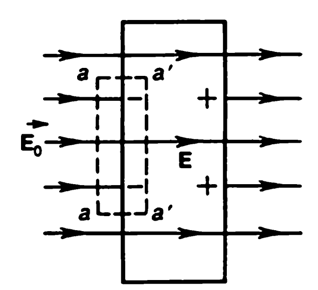


Fig. 2.4. Relation entre l'induction électrique et la polarisation

et déterminons le travail effectué par les forces du champ électrostatique pour déplacer une charge d'essai q le long de ce contour. Le travail produit lors du déplacement de la charge q le long du côté l_1 est égal à $qE_{1t}l_1$, où E_{1t} est la composante tangentielle du champ $\mathbf{E}_1$; d'une manière analogue, le travail accompli pour déplacer la charge le long du côté l_2 est égal à $-qE_{2t}l_2$. Si l'on fait tendre vers zéro la distance entre l_1 et l_2, le travail des forces du champ pour le déplacement de la charge le long de deux autres côtés du contour perpendiculaires à l_1 et l_2 tendra lui aussi vers zéro ; dans ce cas $l_2 - l_1 = \Delta l$. Ainsi, le travail total est égal à $qE_{1t}\Delta l - qE_{2t}\Delta l$. Mais le champ que nous considérons est statique et ce travail doit donc être nul : $qE_{1t}\Delta l - qE_{2t}\Delta l = 0$, d'où il découle l'assertion énoncée plus haut sur la continuité de la composante tangentielle du champ électrique lors du passage d'un milieu à un autre :

$$E_{1t} = E_{2t}.$$

Le fait que la composante normale de l'induction électrique et la composante tangentielle de l'intensité du champ électrique sont continues permet d'établir ce qui arrive à la ligne de force au passage d'un diélectrique à un autre. Il est facile de voir que la ligne de force est réfractée à la surface frontière entre deux diélectriques. Effectivement, après avoir récrit les conditions aux limites sous la forme

$$D_1 \cos \alpha_1 = D_2 \cos \alpha_2, \qquad E_1 \sin \alpha_1 = E_2 \sin \alpha_2,$$

où α_1 et α_2 sont des angles que la ligne de force fait avec la normale à la surface de séparation (fig. 2.3), et compte tenu de ce que $D_1 =$

$= \varepsilon_0\varepsilon_1 E_1$ et $D_2 = \varepsilon_0\varepsilon_2 E_2$ (ε_1 et ε_2 étant les permittivités électriques des deux diélectriques), nous obtenons

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Ainsi, il résulte des conditions aux limites $D_{1n} = D_{2n}$ et $E_{1t} = E_{2t}$ que les lignes de force subissent une réfraction, la loi de la réfraction étant la suivante:

le rapport de la tangente de l'angle d'incidence à la tangente de l'angle de réfraction est constant et égal au rapport des permittivités électriques ; en outre, la ligne de force de part et d'autre de la surface de séparation et la normale à la surface de séparation sont dans un même plan. Si le diélectrique est en contact avec un conducteur, les lignes de force à la limite de séparation sont perpendiculaires à la surface du conducteur.

Si le conducteur est chargé, la composante normale D_n du vecteur déplacement électrique est liée à la densité superficielle de charge σ sur le conducteur par la relation $D_n = \sigma$ (la normale étant supposée être extérieure par rapport au conducteur). Il s'ensuit qu'à la limite de séparation entre un diélectrique et un conducteur la composante normale de l'intensité du champ électrique $E_n = \sigma/(\varepsilon_0\varepsilon)$. La composante tangentielle E_t de l'intensité du champ à la surface du conducteur est nulle: $E_t = 0$.

La diminution de l'intensité du champ dans un diélectrique par rapport au vide (pour les mêmes charges vraies) est liée, comme il a été dit, au déplacement des charges dans les molécules du diélectrique sous l'effet du champ.

Le déplacement des charges de signes contraires dans un diélectrique est appelé polarisation de ce diélectrique.

Considérons, par exemple, une plaque diélectrique placée dans un champ électrique uniforme d'intensité $\mathbf{E}_0$ perpendiculaire à la plaque (fig. 2.4). Dans ce cas, le diélectrique se polarise de telle sorte que les charges de signes contraires des dipôles voisins, se trouvant à l'intérieur du diélectrique, se compensent et ne seront pas compensées que les charges négatives à l'extrémité gauche et les charges positives à l'extrémité droite. La plaque diélectrique se transforme en un dipôle macroscopique dont le moment, égal à $q_r h$, est dirigé le long de $\mathbf{E}_0$ (q_r étant la charge non compensée sortie sur la surface de la plaque et h, l'épaisseur de la plaque). Il est clair que ce moment dipolaire est égal à la somme des moments dipolaires $\mathbf{d}$ de toutes les molécules du diélectrique et donc est proportionnel au volume V de la plaque:

$$q_r h \frac{\mathbf{E}_0}{E_0} = \sum \mathbf{d} = \mathbf{P}V.$$

Le *vecteur polarisation électrique* $\mathbf{P}$ caractérise le moment dipolaire d'un volume unité: $\mathbf{P} = \mathbf{d}/V$.

La charge non compensée q_r, et donc la polarisation, peut être facilement reliée au déplacement électrique **D**. Appliquons à cet effet le théorème de Gauss pour le champ dans le vide. Prenons comme surface fermée un parallélépipède $aaa'a'$ (fig. 2.4). Nous obtiendrons $(\mathbf{E}_0 - \mathbf{E})\, S = q_r/\varepsilon_0$, où **E** est l'intensité du champ dans le diélectrique et S, l'aire de la face aa. Remarquant que $q_r h = PV = PhS$, nous trouverons $\mathbf{P} = \varepsilon_0\, (\mathbf{E}_0 - \mathbf{E})$.

Rappelons-nous maintenant que la composante normale du vecteur **D** est continue à la surface limite du diélectrique, si bien que dans le cas considéré $\varepsilon_0\mathbf{E}_0 = \mathbf{D}$. Ceci nous conduit à une relation importante qui est à la base de toute l'électrodynamique des diélectriques :

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}.$$

En tenant compte que $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$, on a $\mathbf{P} = \varepsilon_0\, (\varepsilon - 1)\, \mathbf{E} = k_a\mathbf{E}$. Le coefficient k_a s'appelle la *susceptibilité diélectrique absolue*, et la quantité $\alpha = k_a/(4\pi\varepsilon_0)$ est la *polarisabilité*.

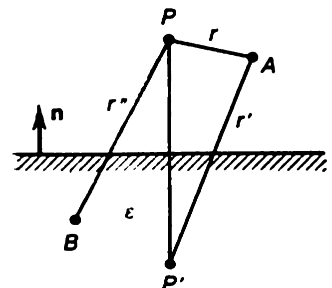


Fig. 2.5. Méthode des images dans l'électrostatique des diélectriques

Proposons-nous de déterminer maintenant le potentiel produit par une charge ponctuelle dans le cas où le diélectrique ne remplit pas tout l'espace mais seulement un demi-espace à frontière plane (fig. 2.5). Pour résoudre ce problème, appliquons la méthode des images électriques, c'est-à-dire supposons que l'intensité du champ dans le vide (au-dessus du diélectrique) soit la même qu'en l'absence du diélectrique mais en présence d'une certaine charge supplémentaire q' placée au point P' qui est l'image du point P (en lequel se trouve la charge réelle q). Quant au champ dans le diélectrique, il sera supposé le même que celui produit par une certaine charge ponctuelle fictive q'' placée dans un diélectrique illimité au point P (le même en lequel se trouve la charge réelle). Ainsi, nous supposons que le potentiel dans le vide, en un point quelconque A, se détermine par la formule

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r} + \frac{q'}{r'}\right),$$

et le potentiel dans le diélectrique, en un point quelconque B, par la formule

$$\varphi_\varepsilon = \frac{q''}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r''},$$

où r, r', r'' sont les distances des points A et B aux points P et P'.

Essayons maintenant de définir les constantes q' et q'' de telle sorte que soient satisfaites les conditions aux limites sur la surface du diélectrique, c'est-à-dire que soient continues la composante tangentielle de l'intensité du champ et la composante normale du déplacement électrique. Si nous y arrivons, nous aurons la certitude que notre supposition est justifiée.

La continuité de la composante tangentielle de l'intensité du champ est équivalente à la continuité du potentiel. Cela signifie qu'à la surface frontière du diélectrique, où les points A et B se confondent et $r = r' = r''$, les potentiels φ et φ_ε doivent être égaux d'où il résulte que $q + q' = q''/\varepsilon$. Cherchons maintenant les composantes normales du vecteur déplacement électrique. Les intensités des champs électriques dans le vide et dans le diélectrique ont respectivement pour valeurs

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q\mathbf{r}}{r^3} + \frac{q'\mathbf{r}'}{r'^3}\right); \quad \mathbf{E}_\varepsilon = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\,\frac{q''\mathbf{r}''}{r''^3}$$

(les rayons vecteurs $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}''$ ont pour origine le point P, et le rayon vecteur $\mathbf{r}'$, le point P'). C'est pourquoi le déplacement électrique dans le vide et dans le diélectrique se détermine par les formules

$$\mathbf{D} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{q\mathbf{r}}{r^3} + \frac{q'\mathbf{r}'}{r'^3}\right); \quad \mathbf{D}_\varepsilon = \frac{q''\mathbf{r}''}{r''^3}.$$

Sur la surface frontière du diélectrique $r = r' = r''$ et, en outre, $\mathbf{rn} = \mathbf{r}''\mathbf{n} = -\mathbf{r}'\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$ étant le vecteur unitaire, normal à la frontière). De ce fait, l'égalité $\mathbf{Dn} = \mathbf{D}_\varepsilon\mathbf{n}$, qui doit être vérifiée sur la frontière, donne $q - q' = q''$.

En partant de cette relation et de l'équation $q + q' = q''/\varepsilon$, nous trouvons les grandeurs cherchées q' et q'':

$$q' = -\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\,q, \quad q'' = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon+1}\,q.$$

Remarquons que la force avec laquelle la charge q est attirée par le diélectrique a pour expression

$$F = \frac{qq'}{16\pi\varepsilon_0 h^2} = -\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\,\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 h^2}.$$

§ 2.2. Diélectrique dans un champ électrique uniforme

La diminution dans un même rapport (de ε fois) de l'intensité du champ électrique en tous les points d'un diélectrique n'a lieu que si ce diélectrique est illimité, homogène et isotrope. Si le diélectrique est limité (mais homogène et isotrope), la variation du champ ne se ramène pas à sa diminution à une échelle déterminée : au contraire, on y observe en règle générale une variation considérable de la structure spatiale du champ.

La détermination de l'intensité du champ des charges en présence d'un diélectrique limité est un problème complexe de physique mathématique, dont la solution analytique ne s'obtient que pour quelques cas les plus simples. En résolvant ce problème, on utilise chaque fois le principe déjà connu qui consiste en ce que chaque problème d'électrostatique admet une solution unique et de ce fait, si l'on réussit à satisfaire aux conditions aux limites sur la surface du diélectrique à l'aide de la superposition des champs électrostatiques connus, on peut avoir la certitude que cette superposition représente le champ vrai.

Considérons, par exemple, le problème de la modification d'un champ électrostatique uniforme d'intensité $\mathbf{E}_0$ dans lequel est introduite une sphère diélectrique de rayon a, de permittivité ε. L'introduction d'un diélectrique dans un champ uniforme conduit en général à ce que le champ à l'intérieur du diélectrique devient non uniforme. Mais nous adoptons une hypothèse, qui sera justifiée par la suite, dans laquelle le champ à l'intérieur d'une sphère diélectrique placée dans un champ uniforme reste uniforme. Quant au champ à l'extérieur de la sphère, il ne peut plus être considéré comme uniforme. Nous supposerons que l'influence de la sphère (en dehors de celle-ci) soit telle comme si elle représentait un certain dipôle situé au centre de la sphère. En d'autres termes, si l'on désigne par $\mathbf{d}$ le moment dipolaire de ce dipôle équivalent, nous supposerons que l'intensité du champ à l'extérieur de la sphère soit de la forme

$$\mathbf{E}^{(e)} = \mathbf{E}_0 + \frac{3(\mathbf{dn})\,\mathbf{n} - \mathbf{d}}{4\pi\varepsilon_0 r^3},$$

où $\mathbf{r}$ est le rayon vecteur mené du centre de la sphère au point d'observation et $\mathbf{n}$, le vecteur unitaire dans cette direction. Supposons que le champ à l'intérieur de la sphère est uniforme et écrivons son intensité sous la forme

$$\mathbf{E}^{(i)} = \mathbf{E} - \nu\mathbf{P}/(4\pi\varepsilon_0),$$

où $\mathbf{P} = \mathbf{d}/V$ est la polarisation de la sphère et ν, un certain coefficient numérique.

Montrons que les quantités $\mathbf{d}$ et ν peuvent être choisies de façon que les conditions aux limites sur la surface de la sphère soient satisfaites. Ces conditions consistent en la continuité de la composante tangentielle de l'intensité du champ $\mathbf{E}^{(e)}\mathbf{t} = \mathbf{E}^{(i)}\mathbf{t}$ ($\mathbf{t}$ étant le vecteur unitaire tangent à la surface de la sphère) et de la composante normale du vecteur déplacement électrique $\mathbf{D}^{(e)}\mathbf{n} = \mathbf{D}^{(i)}\mathbf{n}$. En tenant compte que $\mathbf{D}^{(e)} = \varepsilon_0\mathbf{E}^{(e)}$, $\mathbf{D}^{(i)} = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}^{(i)}$, récrivons la dernière condition sous la forme $\mathbf{E}^{(e)}\mathbf{n} = \varepsilon\mathbf{E}^{(i)}\mathbf{n}$. Mais $\mathbf{nt} = 0$ si bien que pour $r = a$, nous avons

$$\mathbf{E}^{(e)}\mathbf{t} = \mathbf{E}_0\mathbf{t} - \frac{\mathbf{dt}}{4\pi\varepsilon_0 a^3}, \quad \mathbf{E}^{(i)}\mathbf{t} = \mathbf{E}_0\mathbf{t} - \nu\mathbf{Pt}/(4\pi\varepsilon_0),$$

d'où, compte tenu que $\mathbf{d}=\frac{4}{3}\pi a^3\mathbf{P}$, nous obtenons $\nu=\frac{4}{3}\pi$. La condition de continuité de la composante normale du vecteur induction donne

$$\mathbf{E}_0\mathbf{n}+\frac{\mathbf{dn}}{2\pi\varepsilon_0 a^3}=\varepsilon\left(\mathbf{E}_0\mathbf{n}-\frac{1}{3\varepsilon_0}\mathbf{Pn}\right)$$

ou $\mathbf{E}_0\mathbf{n}+2\mathbf{Pn}/(3\varepsilon_0)=\varepsilon\left(\mathbf{E}_0\mathbf{n}-\frac{1}{3\varepsilon_0}\mathbf{Pn}\right)$, d'où il vient $(2+\varepsilon)\times$ $\times\ \mathbf{Pn}/(3\varepsilon_0)=(\varepsilon-1)\,\mathbf{E}_0\mathbf{n}$. On peut satisfaire à cette condition si l'on choisit $\mathbf{P}$ égal à

$$\mathbf{P}=3\varepsilon_0\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\mathbf{E}_0.$$

Pour une telle valeur de $\mathbf{P}$ l'intensité du champ à l'intérieur de la sphère diélectrique s'exprime par

$$\mathbf{E}^{(i)}=\frac{3}{\varepsilon+2}\mathbf{E}_0.$$

Nous voyons que le champ à l'intérieur de la sphère diélectrique placée dans un champ uniforme reste réellement uniforme. Puisque $\varepsilon>1$, le champ intérieur $E^{(i)}$ est moins intense que le champ E_0 existant avant l'introduction du diélectrique de $(\varepsilon+2)/3$ fois et non de ε fois (remarquons que toujours $[(\varepsilon+2)/3]<\varepsilon$). A l'extérieur de la sphère le champ est non uniforme, mais loin de la sphère il s'approche d'un champ uniforme et son intensité ne diffère pas de l'intensité $\mathbf{E}_0$ du champ qui existait avant l'introduction de la sphère (fig. 2.6).

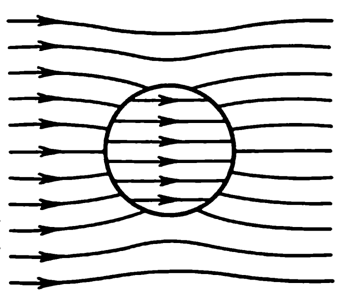


Fig. 2.6. Lignes de force d'un champ englobant une sphère diélectrique

Remarquons qu'en substituant $1/\varepsilon$ à ε dans la formule qui relie $\mathbf{E}^{(i)}$ à $\mathbf{E}_0$, on obtient une formule qui détermine l'intensité du champ dans une cavité sphérique pratiquée dans un diélectrique illimité de permittivité ε dans lequel le champ était, en l'absence de la cavité, uniforme et d'intensité E_0.

Ainsi, lorsqu'un diélectrique limité en forme de sphère est introduit dans un champ uniforme, le champ à l'intérieur de cette sphère reste uniforme (bien que son intensité varie). Une question se pose : quelles sont les autres formes d'un diélectrique limité pour lesquelles il possède cette propriété. Il est apparu que dans le cas général le diélectrique peut prendre la forme d'un ellipsoïde ; lorsqu'un tel diélectrique est placé dans un champ électrostatique uniforme d'intensité $\mathbf{E}_0$, le champ qui s'y établit est uniforme et a une intensité

$\mathbf{E}^{(i)}$ telle que

$$\mathbf{E}^{(i)} = \mathbf{E}_0 - N\mathbf{P}/\varepsilon_0^{-1},$$

où $\mathbf{P} = (\varepsilon - 1)\, \varepsilon_0 \mathbf{E}^{(i)}$ et N est un coefficient numérique (plus exactement un tenseur) dépendant de la forme de l'ellipsoïde et de sa position par rapport au champ extérieur. On l'appelle *coefficient de dépolarisation* ou *facteur démagnétisant* (cette dernière appellation est liée à une situation analogue qui existe dans le cas d'un corps magnétique introduit dans un champ magnétique, v. chap. 12). Pour une sphère $N = 1/3$. Pour un cylindre infiniment long dont l'axe est dirigé le long du champ extérieur $N = 1/2$.

§ 2.3. Energie du champ dans un diélectrique

Si une charge quelconque est placée dans un diélectrique homogène illimité, le potentiel qu'elle produit est ε fois plus faible que le potentiel créé par la même charge dans le vide. C'est pourquoi la capacité d'un condensateur augmente de ε fois si l'espace entre ses armatures est rempli d'un diélectrique homogène. En particulier, la capacité d'un condensateur plan rempli d'un diélectrique est $C = \varepsilon_0 \varepsilon S/d$.

Quant à l'énergie électrique accumulée dans un condensateur, elle se détermine par la même formule $W = \frac{1}{2} C\, (\varphi_1 - \varphi_2)^2 = q^2/(2C)$. Comme $\varphi_1 - \varphi_2 = Ed$, on a $W = \varepsilon_0 \varepsilon E^2 V/2$, où V est le volume du champ dans le condensateur. Cette formule montre que l'énergie emmagasinée dans 1 m³ de diélectrique a pour valeur

$$w = \varepsilon_0 \varepsilon E^2/2 = \mathbf{E}\mathbf{D}/2.$$

Elle est égale à la somme de l'énergie du champ électrique proprement dite et de la partie de l'énergie du diélectrique qui est liée à la présence du champ. La grandeur w peut s'interpréter comme la densité d'énergie interne, si le condensateur est thermiquement isolé. Si le diélectrique est maintenu à température constante, la grandeur w joue le rôle de la densité d'énergie libre. Si la permittivité ε du diélectrique est indépendante de la température, l'énergie libre se confond avec l'énergie interne. La grandeur w est appelée *densité d'énergie électrique* dans le diélectrique.

Fig. 2.7. Condensateur plan à deux diélectriques

Considérons maintenant des condensateurs à diélectrique non homogène.

La figure 2.7 représente un condensateur plan stratifié rempli de deux diélectriques de permittivités ε_1 et ε_2 ; la surface frontière entre les diélectriques est plane et parallèle aux armatures. Pour

déterminer la capacité d'un tel condensateur on part du fait que le vecteur induction électrique est le même dans les deux diélectriques et égal à

$$\mathbf{D} = \sigma \mathbf{n},$$

où σ est la densité superficielle de charge ($\sigma > 0$) et $\mathbf{n}$, le vecteur unitaire de la normale à l'armature positivement chargée, orienté vers le diélectrique. C'est pourquoi les intensités du champ dans les deux diélectriques sont $E_1 = \sigma/(\varepsilon_0\varepsilon_1)$, $E_2 = \sigma/(\varepsilon_0\varepsilon_2)$, tandis que les différences de potentiel appliquées aux deux couches diélectriques sont données par les formules

$$\varphi_1 - \varphi_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_1} d_1; \qquad \varphi_0 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_2} d_2,$$

où φ_0 est le potentiel de la surface frontière entre les diélectriques et d_1, d_2 sont les épaisseurs des deux couches diélectriques.

Ainsi, la différence de potentiel totale entre les bornes du condensateur est $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}\right)$ et, comme la charge portée par une armature $q = \sigma S$, nous obtenons la formule suivante pour la capacité d'un condensateur à deux diélectriques:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{S\varepsilon_0}{d_1/\varepsilon_1 + d_2/\varepsilon_2}.$$

Il est maintenant facile de calculer l'énergie d'un tel condensateur:

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}\right) S.$$

Cette expression permet de déterminer les forces qui s'exercent sur les armatures du condensateur. En calculant la force exercée sur l'armature portant la charge positive dans le cas d'un condensateur à vide, nous avons multiplié cette charge par l'intensité du champ produit par l'armature portant la charge négative. Dans le cas d'un condensateur à plusieurs couches diélectriques nous ne connaissons pas les intensités des champs créés par chacune des armatures séparément. D'ailleurs, pour calculer les forces il n'est pas nécessaire de connaître les intensités des champs produits par chacune des armatures. On peut le faire d'une façon plus simple si l'on considère l'énergie électrique du condensateur comme son énergie potentielle, ce qui est légitime si, une fois chargé, le condensateur est débranché des charges extérieures et abandonné à lui-même. Dans ce cas le travail effectué par les forces exercées sur les armatures lors de leur déplacement virtuel est égal à la diminution de l'énergie électrique du condensateur. Imaginons que l'armature *1*, par exemple, se déplace de telle sorte que l'épaisseur de la première couche augmente de δd_1 (à d_2 constante); si la variation correspondante de l'énergie est

δW, le travail de la force F_1 appliquée à l'armature *1* lors du déplacement δd_1 sera $F_1\delta d_1 = -\delta W$, d'où

$$F_1 = -\frac{\partial W}{\partial d_1} = -\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0\varepsilon_1} S$$

(pour calculer la dérivée, l'épaisseur d_2 doit être supposée constante). Le signe moins dans cette expression signifie que la force F_1 est dirigée dans le sens de diminution de d_1, c'est-à-dire vers l'armature *2*.

D'une manière analogue on peut montrer que l'armature *2* est soumise à la force $F_2 = -\partial W/\partial d_2$. Cette force est dirigée dans le sens de diminution de l'épaisseur d_2, c'est-à-dire vers l'armature *1*. Etant opposées l'une à l'autre, ces deux forces ne sont pas égales en module comme dans le cas d'un condensateur à vide. Il semble à première vue que la loi de l'égalité de l'action et de la réaction y est violée. Or, en réalité, il n'en est pas ainsi parce que le condensateur contient encore un troisième corps, un diélectrique. C'est pourquoi on doit considérer que la force F_1 agit sur l'armature *1* non de la part de l'armature *2* mais de la part du diélectrique adjacent à l'armature *1*, et la force F_2 agit sur l'armature *2* de la part du diélectrique qui lui est adjacent. Le diélectrique est soumis à son tour à l'action des forces de la part des armatures *1* et *2*, égales respectivement à $-F_1$ et $-F_2$ et dirigées vers les armatures. La force résultante exercée sur le diélectrique a pour expression

$$F_d = -F_2 + F_1 = \frac{D^2}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right) S.$$

Elle est dirigée vers le diélectrique ayant une plus faible permittivité. Si, par exemple, l'une des armatures d'un condensateur à air est plongée dans le kérosène de telle sorte qu'elle soit parallèle à la surface du kérosène, ce dernier sera attiré vers l'intérieur du condensateur parce que sa permittivité est plus forte que celle de l'air.

Ainsi, sur la surface de séparation de deux diélectriques il s'exerce une force. Rapportée à l'aire de la couche frontière, elle est égale à la différence entre les densités d'énergie du champ de part et d'autre de la surface frontière: $F_d = S\,(w_2 - w_1)$, où $w_1 = D^2/(2\varepsilon_0\varepsilon_1)$, $w_2 = D^2/(2\varepsilon_0\varepsilon_2)$.

Les forces qui s'exercent sur un diélectrique placé dans un champ électrique sont dites *pondéromotrices*. Déterminons la densité volumique de ces forces dans le cas le plus simple d'un diélectrique gazeux, où le champ agissant sur les charges de diverses molécules ne diffère pratiquement pas du champ moyen régnant dans le milieu. En considérant la molécule comme un dipôle de petite dimension l, on peut représenter la force qu'elle subit sous la forme suivante:

$$\mathbf{f} = -q\mathbf{E}(\mathbf{r}) + q\mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{l}) = q(\mathbf{l}\nabla)\mathbf{E} = (\mathbf{d}\nabla)\mathbf{E}$$

(nous avons utilisé l'opérateur différentiel vectoriel nabla ∇ de composantes $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$). En multipliant $\mathbf{f}$ par la concentra-

tion n des molécules et en nous rappelant que $n\mathbf{d}$ est la polarisation **P** du diélectrique, nous obtenons

$$\mathbf{F} = (\mathbf{P}\nabla)\,\mathbf{E} = \varepsilon_0\,(\varepsilon - 1)\,(\mathbf{E}\nabla)\,\mathbf{E}.$$

Il est aisé de s'assurer que si le champ **E** est dirigé suivant l'axe x et dépend uniquement de x, alors $F = \frac{1}{2}\varepsilon_0\,(\varepsilon - 1)\,\mathrm{d}E^2/\mathrm{d}x$. Il se trouve que dans le cas général, où le champ a une direction quelconque et dépend de trois coordonnées, l'expression donnant la force **F** peut être mise sous une forme similaire:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\,(\varepsilon - 1)\,\mathrm{grad}\,E^2.$$

Ainsi, la force agissant sur un volume unité du diélectrique est proportionnelle au gradient du carré du champ. Cette force est dirigée dans le sens d'augmentation du module de l'intensité du champ, de sorte que le diélectrique est toujours entraîné vers la région où le champ est plus intense. C'est ce qui explique en particulier l'attraction des morceaux de papier ou de billes de sureau par des conducteurs chargés.

Remarquons encore que la formule que nous avons obtenue pour la densité de forces pondéromotrices est valable non seulement pour les gaz mais également pour les liquides, si leur polarisabilité est proportionnelle à la densité de molécules.

FORMULES FONDAMENTALES

Loi de Gauss	$\int \mathbf{D}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \sum q^{(i)}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}$
Conditions aux limites	$D_{1n} = D_{2n}, \quad E_{1t} = E_{2t}$
Relation entre l'induction et la polarisation	$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$
Lois fondamentales de l'électrostatique	$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 0, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho$

CHAPITRE 3

COURANT ÉLECTRIQUE CONTINU

§ 3.1. Densité de courant électrique

Revenons aux conducteurs. Ainsi que nous l'avons déjà dit, dans les conducteurs (à la différence des diélectriques) les charges intérieures peuvent se déplacer librement sous l'effet d'un champ électrique appliqué. Le déplacement des particules chargées dans les conducteurs sous l'action d'un champ électrique appliqué porte le nom général de *courant électrique*.

Les conducteurs de l'électricité sont les métaux, les semi-conducteurs, les électrolytes et les gaz ionisés (plasma). Les particules chargées mobiles dans les métaux sont les électrons. Quant aux ions, ils sont immobiles dans les métaux et forment ce que l'on appelle *carcasse ionique*; c'est pourquoi dans les métaux le courant électrique est constitué par le mouvement des électrons. Il en est de même pour les semiconducteurs: là encore seuls les électrons sont mobiles. La conductibilité des électrolytes est due aux ions. Enfin, la conductibilité du plasma est produite à la fois par le déplacement d'électrons et par celui d'ions.

Pour obtenir une caractéristique quantitative du courant, considérons un petit volume de conducteur (pour plus de simplicité, prenons un volume unité) et écrivons pour lui la somme des produits des charges des particules mobiles par leurs vecteurs vitesses:

$$\mathbf{j} = \sum_{(V=1)} e\mathbf{v},$$

où la somme $\sum$ est étendue à toutes les particules chargées contenues dans le volume unité considéré du conducteur. Cette grandeur, que l'on appelle *densité de courant*, sert à caractériser le courant.

Il est clair qu'en l'absence de champ la densité de courant est nulle. En effet, les particules chargées du conducteur participent à l'agitation thermique, mais ce mouvement étant désordonné, la valeur moyenne du vecteur vitesse de la particule est nulle. Cela signifie qu'en l'absence de champ pour chaque espèce de particules dans tout élément de volume, les nombres de particules à vitesse $\mathbf{v}$ et à vitesse $-\mathbf{v}$ sont égaux. C'est pourquoi, si $\mathbf{E} = 0$, la somme déterminant la densité de courant $\mathbf{j}$ est elle aussi nulle. Si le champ dans le conducteur est différent de zéro, il se produit un mouvement coor-

donné des particules chargées du conducteur lors duquel la densité de courant est non nulle. Pour cette raison, par la vitesse **v** figurant dans l'expression de la densité de courant **j** il faut entendre la vitesse du mouvement d'ensemble des particules et on peut faire sortir la valeur de **v** de sous le signe somme. La somme restante est égale à qn, où n est la concentration des particules. Ainsi

$$\mathbf{j} = qn\mathbf{v}$$

(dans le cas des porteurs de courant de plusieurs espèces, il faut encore effectuer la sommation sur toutes ces espèces).

Comme la grandeur **j** détermine la quantité d'électricité traversant en 1 s une surface de 1 m² d'aire, orientée perpendiculairement au vecteur **j**, la quantité d'électricité dI qui traverse en 1 s une surface ds orientée de manière quelconque sera $dI = \mathbf{j}\, d\mathbf{s}$, où le vecteur $d\mathbf{s} = \mathbf{n}\, ds$ (**n** étant le vecteur unitaire normal à la surface). Si S est une surface quelconque donnée, la quantité d'électricité qui la traversera en 1 s sera égale à

$$I = \int_S \mathbf{j}\, d\mathbf{s}.$$

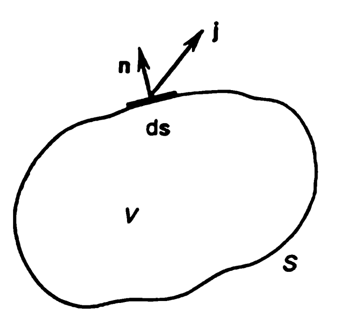


Fig. 3.1. Etablissement de l'équation de continuité

Cette grandeur est appelée *intensité de courant* traversant la surface S. Ainsi, *l'intensité de courant à travers une surface quelconque est le flux de densité de courant à travers cette surface.*

L'intensité de courant s'exprime en ampères: $1\ \text{A} = 1\ \text{C}\cdot\text{s}^{-1}$.

La densité de courant électrique peut en général varier d'un point à l'autre et dépendre en outre du temps. C'est pourquoi on peut parler du *champ vectoriel de densité de courant* ou, en abrégé, du *champ de courant* ainsi que des *lignes de courant*, c'est-à-dire des lignes dont la tangente en chacun de leurs points a la direction du vecteur **j** existant en ce point. Ce champ satisfait à une relation importante qui découle de la loi de conservation de la charge. Pour établir cette relation, considérons une surface fermée quelconque S (fig. 3.1) et déterminons la variation en 1 s de la charge Q contenue dans le volume V limité par la surface S. Puisque la charge ne peut ni apparaître, ni disparaître, la variation de la charge Q en 1 s doit être égale à l'intensité totale du courant entrant dans le volume V à travers la surface S, c'est-à-dire que $\dot{Q} = -I$, où I est l'intensité du courant sortant du volume V. En y introduisant

$$Q = \int_V \rho\, dV, \quad I = \int_S \mathbf{j}\, d\mathbf{s},$$

où ρ est la densité volumique de charge (ds a la direction de la normale extérieure à la surface S), nous obtenons

$$\int_S \mathbf{j}\, d\mathbf{s} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV.$$

Le premier membre de cette égalité représente le flux de vecteur $\mathbf{j}$ à travers la surface fermée. Nous avons déjà rencontré une expression de ce type à l'occasion du théorème de Gauss. En faisant usage des résultats qui y ont été obtenus, on peut transformer l'intégrale de surface en intégrale de volume:

$$\int_S \mathbf{j}\, d\mathbf{s} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{j}\, dV.$$

De ce fait, $\int_V \operatorname{div} \mathbf{j}\, dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV$, d'où il résulte, le volume V étant absolument quelconque, que

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Cette relation connue sous le nom d'*équation de continuité* exprime en termes mathématiques la loi de conservation de la charge électrique.

§ 3.2. Loi d'Ohm

Proposons-nous de définir les conditions dans lesquelles peut exister un courant électrique continu. Le fait est que pour que le courant puisse circuler dans le conducteur un champ électrique doit exister, de plus, au courant continu correspond en vertu de l'équation de continuité une densité de charge indépendante du temps et donc un champ électrique constant. Or, au chapitre 1 on a affirmé maintes fois que dans un conducteur le champ électrostatique est toujours nul. Comment le courant continu peut-il circuler dans ce cas?

En effet, dans un champ purement électrostatique l'existence d'un courant continu est impossible. Ceci découle d'ailleurs du fait que les lignes de courant continu sont fermées; aussi, une charge qui se déplace le long d'une ligne de courant doit-elle effectuer continuellement un travail alors qu'aucun changement ne se produit dans le champ électrostatique environnant, ce qui est en contradiction avec la loi de conservation de l'énergie.

Ce paradoxe se lève de la façon suivante. L'existence d'un courant continu est possible mais à condition de faire intervenir des forces non électrostatiques. A savoir: il faut qu'au moins en certains endroits des lignes de courant les charges mobiles soient soumises à des forces non électrostatiques. On les appelle *forces extérieures*. Pour obtenir ces forces on utilise des *sources* dites *de courant continu*:

les piles hydro-électriques, les accumulateurs, les piles thermo-électriques ainsi que les dynamos à courant continu. En réservant pour les chapitres suivants l'étude du mécanisme de fonctionnement de ces sources, nous nous contenterons pour l'instant d'introduire les forces extérieures de façon purement formelle ou, comme on dit, de façon phénoménologique.

Désignons par **E**′ l'intensité totale du champ qui agit sur une charge unité dans un conducteur. Elle comprend aussi bien l'intensité **E** du champ électrostatique que l'intensité $\mathbf{E}^{(e)}$ du champ de forces extérieures, c'est-à-dire que $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{E}^{(e)}$. C'est ce champ résultant **E**′ qui détermine la densité de courant **j**, et puisque pour $\mathbf{E}' = 0$ la densité de courant est nulle, comme il a été dit précédemment, il est logique de supposer que pour des valeurs suffisamment petites de l'intensité **E**′ la densité de courant doit être proportionnelle à ces valeurs. Il se trouve qu'il en est justement ainsi et que pour des conducteurs isotropes il existe une simple proportionnalité entre **j** et **E**′ :

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}'.$$

Quant aux conducteurs anisotropes (par exemple, monocristallins) les composantes j_i et E'_i des vecteurs **j** et **E**′ sont liées par la relation linéaire générale

$$j_i = \sum_k \sigma_{ik} E'_k,$$

où les indices i et k (i, $k \equiv x$, y, z) servent à désigner les trois axes de coordonnées cartésiennes, et les grandeurs σ_{ik} satisfont à la condition de symétrie $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$. Ces grandeurs, de même que la grandeur σ, sont appelées *conductivité électrique d'un conducteur*. La conductivité est différente pour divers conducteurs et dépend de plusieurs facteurs physiques tels que la température, la présence d'impuretés, etc. Dans le système SI, la conductivité s'exprime en siemens par mètre ($S \cdot m^{-1}$, $S = A \cdot V^{-1}$).

La relation linéaire qui lie la densité de courant à l'intensité totale du champ est connue sous le nom de *loi d'Ohm* (sous forme différentielle). Bien que cette loi paraisse être très simple, elle nécessite quelques explications. Le fait est que si une charge en mouvement dans un conducteur est soumise à un champ constant, cette charge doit, paraît-il, s'accélérer de façon continue, c'est-à-dire qu'elle ne peut pas avoir une vitesse constante, alors qu'en vertu de la loi d'Ohm nous obtenons pour un champ **E**′ donné une valeur finie de la densité de courant à laquelle correspond d'après la formule $\mathbf{j} = qn\mathbf{v}$ une valeur finie correspondante de la vitesse **v** de la particule. Comment se fait-il que les charges sont animées dans les conducteurs d'un mouvement uniforme au lieu d'un mouvement uniformément accéléré? La réponse à cette question est la sui-

vante : *les charges dans un conducteur sont mobiles, mais elles ne peuvent pas être considérées comme tout à fait libres.*

Expliquons ceci sur l'exemple d'un électrolyte. Soit une particule de masse m et de charge q qui s'y déplace sous l'action d'un champ $\mathbf{E}'$. Si cette particule était libre, son mouvement serait décrit par l'équation $m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E}'$. Mais en réalité l'électrolyte présente une certaine viscosité de sorte que le mouvement de la particule fait naître un frottement. La force de frottement est opposée à la vitesse de la particule et est égale à $-\eta\mathbf{v}$, où η est le coefficient de frottement. Ainsi, le mouvement de la particule se décrit par l'équation $m\dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{E}' - \eta\mathbf{v}$ dont la solution est de la forme

$$\mathbf{v} = \frac{q}{\eta}\mathbf{E}' + \mathbf{a}e^{-(\eta/m)t},$$

où $\mathbf{a}$ est une constante d'intégration. Elle peut se déterminer à partir des conditions initiales. Si à l'instant initial $t = 0$ la vitesse de la particule était nulle, il est évident que $\mathbf{a} = -\frac{q}{\eta}\mathbf{E}'$ et donc

$$\mathbf{v} = \frac{q}{\eta}\mathbf{E}'\left(1 - e^{-(\eta/m)t}\right).$$

Nous voyons qu'avec le temps la vitesse augmente et tend vers une valeur limite $(q/\eta)\,\mathbf{E}'$ indépendante du temps (fig. 3.2). Au bout d'un temps $\tau = m/\eta$ après l'application du champ (ce temps est appelé *temps de relaxation*), la vitesse sera différente de e^{-1} fois de sa valeur limite, alors qu'au bout de $2m/\eta$ la différence ne sera égale qu'à $e^{-2} \sim 10^{-1}$ de la valeur limite. Ainsi la vitesse prend rapidement sa valeur limite $(q/\eta)\,\mathbf{E}'$ proportionnelle à l'intensité du champ. En introduisant cette valeur dans l'expression générale de la densité de courant $\mathbf{j} = qn\mathbf{v}$, nous obtenons $\mathbf{j} = (q^2n/\eta)\,\mathbf{E}'$. En comparant cette expression et la formule $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}'$, nous trouvons la conductivité électrique :

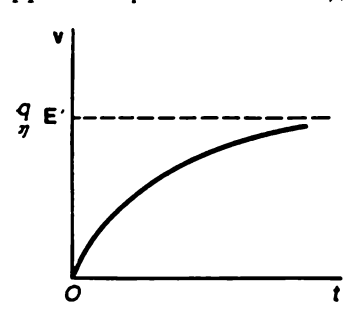


Fig. 3.2. Etablissement de la loi d'Ohm

$$\sigma = \frac{q^2n}{\eta} = \frac{q^2n}{m}\tau.$$

Ainsi nous avons montré que la prise en compte de la force de frottement lors du mouvement des particules chargées dans un électrolyte conduit réellement à la loi d'Ohm. L'établissement de la conductivité finie dans d'autres systèmes physiques (métaux, décharge gazeuse) sera étudié dans la partie II de ce livre.

§ 3.3. Circuit électrique filiforme

Proposons-nous maintenant d'établir la relation entre l'intensité du courant circulant dans un conducteur et la force extérieure qui lui est appliquée. Pour plus de simplicité, nous supposons que les dimensions de la section du conducteur traversée par le courant sont petites devant la longueur du conducteur. Un tel conducteur filiforme peut être évidemment considéré comme un filet ou un tube de courant. En vertu de la loi de conservation de la charge, l'intensité de courant est la même dans chaque section du conducteur. Le conducteur étant supposé mince, la densité de courant peut être considérée comme constante suivant la section. La constance de l'intensité de courant conduit donc à la relation $j = I/S$, où I est l'intensité de courant et S, l'aire de la section droite du conducteur. On voit que la densité de courant est inversement proportionnelle à l'aire de la section du tube.

Reportons-nous maintenant à la loi d'Ohm sous forme différentielle $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}'$, qui lie le vecteur densité de courant $\mathbf{j}$ au champ total $\mathbf{E}'$ (le conducteur étant supposé isotrope). Cette relation étant locale d'après son sens même, la conductivité σ peut être considérée comme une fonction des coordonnées ou, plus exactement, comme étant différente dans diverses sections du conducteur.

En écrivant la loi d'Ohm sous la forme $\mathbf{E}' = \rho\mathbf{j}$, où $\rho = 1/\sigma$ est la *résistivité électrique*, intégrons cette relation le long de tout le conducteur fermé (le conducteur doit évidemment être fermé de même qu'une ligne de courant). En désignant par $d\mathbf{l}$ un élément de longueur du conducteur, orienté de la même façon que le vecteur densité de courant, nous pouvons écrire $\oint \mathbf{E}'\,d\mathbf{l} = \oint \rho\mathbf{j}\,d\mathbf{l}$. Puisque par définition $d\mathbf{l} \parallel \mathbf{j}$, on a $\mathbf{j}d\mathbf{l} = j\,dl$. En y introduisant $j = I/S$ et en remarquant que l'intensité de courant I est la même dans toutes les sections S du conducteur, nous obtenons

$$\oint \rho\mathbf{j}\,d\mathbf{l} = I \oint \frac{\rho\,dl}{S},$$

où l'intégration est effectuée le long de tout le conducteur fermé, et la résistivité et l'aire de la section S peuvent varier le long du conducteur. Ainsi, $\frac{I}{S}\oint \rho\,dl = \oint \mathbf{E}'d\mathbf{l}$ ou encore

$$I = \mathscr{E}/R,$$

où $\mathscr{E} = \oint \mathbf{E}'\,d\mathbf{l}$, $R = \oint \frac{\rho\,dl}{S}$.

La grandeur $\mathscr{E}$ est appelée *force électromotrice* (f.é.m.) agissant dans le conducteur, et R est la *résistance électrique* du conducteur. Ainsi, l'intensité de courant I est égale au rapport de la force électromotrice

à la résistance du conducteur. Cette relation est connue sous le nom de *loi d'Ohm* pour tout conducteur fermé ou, comme on dit encore, *pour un circuit électrique*.

La force électromotrice dans un tube de courant représente la circulation du champ total $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{E}^{(e)}$ le long du contour du tube. Le champ électrostatique entrant dans cette somme étant irrotationnel, c'est-à-dire que $\oint \mathbf{E}d\mathbf{l} = 0$, on obtient $\mathscr{E} = \oint \mathbf{E}^{(e)}\, d\mathbf{l}$. Ainsi, il se trouve que la force électromotrice représente en fait la circulation du champ extérieur le long d'un tube de courant.

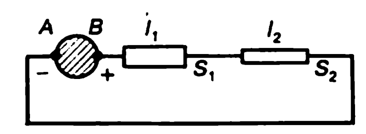


Fig. 3.3. Montage en série des résistances

Si $\mathbf{E}^{(e)} = 0$, alors $\mathscr{E} = 0$. Qui plus est, si le champ $\mathbf{E}^{(e)}$ était d'origine purement électrostatique (ou d'origine non électrostatique mais était irrotationnel), sa circulation serait nulle et donc la f.é.m. le serait également. Dans ce cas le courant serait nul comme il en résulte de la loi d'Ohm. Cela confirme encore une fois que dans un champ purement électrostatique l'existence d'un courant continu est impossible, ce courant ne peut exister qu'en présence de champs non potentiels.

La signification physique de la force électromotrice est très simple. Comme $e\mathbf{E}'$ est la force totale qui s'exerce sur la charge e, le produit $e\mathbf{E}'d\mathbf{l}$ représente le travail effectué par cette force sur le parcours $d\mathbf{l}$. C'est pourquoi la f.é.m. peut s'interpréter comme le travail effectué par les forces extérieures pour déplacer une charge positive unité le long de tout le tube de courant fermé. Comme le courant continu ne peut pas passer en l'absence de f.é.m., on peut dire que les sources de courant continu sont des sources de f.é.m.

La f.é.m. a évidemment les dimensions d'un potentiel et se mesure en volts (V).

Reportons-nous maintenant à la formule donnant la résistance électrique. Si un circuit est constitué par des conducteurs distincts de résistivités différentes ρ_1, ρ_2, . . . (fig. 3.3 sur laquelle l_1 et l_2 sont les longueurs des conducteurs, S_1 et S_2, les aires de leurs sections, et le cercle hachuré désigne une source de f.é.m.), la résistance de ce circuit a pour expression

$$R = R^{(i)} + \frac{\rho_1 l_1}{S_1} + \frac{\rho_2 l_2}{S_2} + \dots ,$$

où $R^{(i)}$ est la résistance interne de la source de f.é.m. Les grandeurs $R_1 = \rho_1 l_1/S_1$, $R_2 = \rho_2 l_2/S_2$, . . . sont les résistances des différentes portions de circuit, de sorte que la résistance de tout le circuit vaut la somme des résistances de toutes ses portions y compris la ré-

sistance de la source de f.é.m. :

$$R = R^{(i)} + R_1 + R_2 + \ldots$$

La résistance se mesure en ohms ($1\Omega = 1\ V \cdot 1\ A^{-1}$).

La loi d'Ohm permet de déterminer l'intensité de courant et les différences de potentiel pour les différentes portions d'un réseau électrique linéaire, si complexe soit-il, comportant de nombreuses dérivations (*nœuds*) et mailles dans lesquelles peuvent agir non une seule mais plusieurs f.é.m. Les règles correspondantes (connues sous le nom de *lois de Kirchhoff*) sont faciles à établir : il suffit d'appliquer à chacune des dérivations la loi de conservation de la charge. Les conclusions définitives sont les suivantes :

(1) Choisissons pour chaque nœud le sens positif du courant d'une manière arbitraire (se dirigeant vers le nœud ou s'en écartant). Alors la somme algébrique des intensités qui passent par chaque nœud est nulle : $\sum I = 0$ (la somme est étendue à tous les conducteurs qui aboutissent au nœud).

(2) Choisissons d'une manière arbitraire pour chaque maille le sens positif de parcours. Alors pour chaque maille $\sum IR = \sum \mathscr{E}$, où la somme est étendue à toutes les portions de la maille et $\mathscr{E}$ est la valeur algébrique de la f.é.m. agissant dans cette portion.

§ 3.4. Chaleur Joule

Le courant continu représente, nous l'avons vu, un mouvement coordonné, à vitesse constante, des particules chargées dans un conducteur. Nous avons également vu que bien que le champ soit stationnaire dans le cas du courant continu, l'état de courant est incompatible avec des conditions d'électrostatique et de ce fait la circulation du courant continu n'est possible qu'en présence de forces extérieures qui s'exercent sur des particules chargées et sont d'origine non électrostatique. De par elles-mêmes, ces forces accéléreraient de façon continue les particules chargées, c'est-à-dire que si les particules chargées n'étaient soumises qu'à l'action de ces forces, elles ne pourraient pas se déplacer avec une vitesse constante. Un mouvement uniforme s'obtient grâce à l'effet de freinage des particules chargées, dont le mécanisme d'action est différent dans divers conducteurs (v. Partie II).

Comme il a été indiqué précédemment, le plus simple est de partir du concept de force de frottement. Dans ce cas le mouvement d'une particule chargée se décrit par l'équation $m\dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{E}' + \mathbf{f}_{fr}$, où $\dot{\mathbf{v}}$ est l'accélération de la particule, q, sa charge, $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{E}^{(e)}$, le champ total agissant sur la particule et $\mathbf{f}_{fr} = -\eta\mathbf{v}$, la force de frottement, proportionnelle dans le cas des faibles vitesses à la vitesse de la particule, η étant le coefficient de frottement. Lors d'un mouvement uniforme $\dot{\mathbf{v}} = 0$ et la somme de toutes les forces est

nulle, c'est-à-dire que

$$q\mathbf{E}' = -\mathbf{f}_{fr} = \eta\mathbf{v}.$$

En multipliant $q\mathbf{E}'$ par un élément de parcours de la particule $\mathrm{d}\mathbf{s} = \mathbf{v}\mathrm{d}t$, nous trouverons le travail $\mathrm{d}A$ effectué par la force $q\mathbf{E}'$ sur la particule pendant un temps $\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}A = q\mathbf{E}'\mathrm{d}\mathbf{s} = q\mathbf{E}'\mathbf{v}\mathrm{d}t,$$

et vu que $q\mathbf{E}' = -\mathbf{f}_{fr}$, nous obtenons

$$\mathrm{d}A = -\mathbf{f}_{fr}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \eta\mathbf{v}^2\mathrm{d}t.$$

Le frottement s'accompagne toujours d'un dégagement de chaleur ou plus exactement, le travail de la force de frottement est égal à la quantité de chaleur reçue par le milieu ambiant. Ceci nous conduit à la conclusion que le travail effectué par la force $q\mathbf{E}'$ se transforme intégralement en chaleur dégagée dans le conducteur.

En d'autres termes, le passage d'un courant continu s'accompagne d'un dégagement de chaleur dans le conducteur. Rapportée à une seule particule, cette chaleur est égale à $\eta v^2\mathrm{d}t$. Si nous multiplions cette expression par la densité de particules n, nous trouverons la chaleur $\mathrm{d}Q_1$ dégagée dans le volume unité du conducteur pendant le temps $\mathrm{d}t$; elle est égale à $\mathrm{d}Q_1 = n\eta v^2\mathrm{d}t$. En tenant compte que la densité de courant $j = qnv$ et que, d'après le § 3.2, la conductivité électrique σ est liée au coefficient de frottement η par la relation $\sigma = q^2n/\eta$, nous obtenons

$$\mathrm{d}Q_1 = \frac{1}{\sigma}\,j^2\,\mathrm{d}t = \rho j^2\,\mathrm{d}t,$$

où $\rho = 1/\sigma$ est la résistivité du conducteur. Ainsi,

la chaleur dégagée dans 1 m³ de conducteur en 1 s (chaleur Joule) est égale au produit du carré de la densité de courant par la résistivité du conducteur :

$$Q_1 = \rho j^2.$$

La chaleur dégagée dans tout le conducteur pendant le temps t est

$$Q = \int_V \rho j^2 t\,\mathrm{d}V,$$

où l'intégration doit porter sur tout le volume V du conducteur.

Examinons de plus près un conducteur filiforme. Dans ce cas, $\mathrm{d}V = S\mathrm{d}l$, où $\mathrm{d}l$ est un élément de longueur du conducteur et S, l'aire de la section correspondante du conducteur. En remarquant que l'intensité du courant total $I = jS$, mettons l'expression de Q sous la forme suivante:

$$Q = \oint \rho\,\frac{I^2}{S^2}\,St\,\mathrm{d}l.$$

L'intensité du courant I étant constante le long de tout le conducteur, on peut la faire sortir de sous le signe d'intégration, quant à la grandeur $R = \oint (\rho/S)\, dl$, elle représente la résistance du conducteur. Ainsi,

$$Q = RI^2t,$$

c'est-à-dire que la chaleur Joule est égale au produit du carré de l'intensité de courant par la résistance du conducteur et la durée de passage du courant t. La chaleur dégagée en 1 s est

$$W = RI^2.$$

Cette grandeur s'exprime en watts: 1 W = 1 $A^2 \cdot \Omega$.

En traversant un conducteur de résistance R, le courant y produit une différence de potentiel $\varphi_1 - \varphi_2 = RI$. Aussi, la chaleur Joule peut-elle s'exprimer également sous la forme

$$Q = I(\varphi_1 - \varphi_2)\, t = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{R}\, t.$$

Si un circuit fermé comporte une force électromotrice $\mathscr{E}$, l'intensité du courant I qui traverse ce circuit est liée à $\mathscr{E}$ par la loi d'Ohm: $I = \mathscr{E}/(R^{(e)} + R^{(i)})$, où $R^{(e)}$ est la résistance du conducteur branché aux bornes de la source de f.é.m. et $R^{(i)}$, la résistance interne de cette source. En se servant de cette formule, on peut exprimer par l'intermédiaire de $\mathscr{E}$ les quantités de chaleur dégagées en 1 s dans le conducteur extérieur et à l'intérieur de la source de f.é.m.:

$$Q^{(e)} = I^2R^{(e)} = \mathscr{E}^2R^{(e)}/(R^{(e)} + R^{(i)})^2,$$
$$Q^{(i)} = I^2R^{(i)} = \mathscr{E}^2R^{(i)}/(R^{(e)} + R^{(i)})^2.$$

La quantité de chaleur totale a pour expression

$$Q = Q^{(e)} + Q^{(i)} = I^2(R^{(e)} + R^{(i)}) = \frac{\mathscr{E}^2}{R^{(e)} + R^{(i)}} = \mathscr{E}I.$$

C'est cette quantité d'énergie que la source de f.é.m. doit fournir chaque seconde. Elle est égale au produit de la f.é.m. par l'intensité de courant.

Cette relation énergétique permet de donner une autre interprétation de la présence d'une force extérieure nécessaire au passage d'un courant continu. Puisque le passage du courant est lié à un dégagement continu de chaleur, cette chaleur doit être constamment fournie par une source extérieure quelconque. C'est cette fonction que remplissent les sources de f.é.m. La f.é.m. est l'énergie fournie en 1 s par une source de courant pour une intensité de 1 A.

FORMULES FONDAMENTALES

Vecteur densité de courant	$\mathbf{j} = \sum e_i n_i \mathbf{v}_i$
Equation de continuité	$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$
Loi d'Ohm	$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$
Densité de chaleur Joule (rapportée à l'unité de temps)	$q = \rho \mathbf{j}^2$

CHAPITRE 4

CHAMP MAGNÉTIQUE DANS LE VIDE

§ 4.1. Force de Lorentz

Le champ électrique et la charge électrique sont liés l'un à l'autre de deux manières: d'une part, le champ électrique est produit par une charge électrique, d'autre part, le champ électrique agit sur la charge électrique. Le champ électrique n'est pas le seul qui soit lié de cette façon à la charge électrique. Il existe encore un champ, dit *magnétique*, qui est engendré par une charge électrique et agit sur elle.

Pourtant une différence essentielle existe entre le champ électrique et le champ magnétique:

alors que le champ électrique est toujours produit par une charge électrique, que cette dernière soit au repos ou en mouvement, le champ magnétique n'est engendré que par une charge en mouvement. Alors que le champ électrique exerce son action sur une charge toujours, qu'elle soit au repos ou en mouvement, le champ magnétique n'agit que sur une charge en mouvement.

D'un autre côté, il n'existe ni de repos absolu, ni de mouvement absolu: le mouvement est toujours relatif. C'est pourquoi, si une charge quelconque est au repos dans un certain système de référence, elle n'y produit qu'un champ électrique, mais il suffit de passer à un autre système de référence, par rapport auquel la charge est animée d'un mouvement, et la charge engendra dans ce système aussi bien un champ électrique qu'un champ magnétique. D'une manière analogue, lorsqu'une charge se déplace dans un champ magnétique, elle est soumise à une certaine force de la part de ce champ. Mais il suffit de passer à un système de référence dans lequel la charge est au repos, que cette force disparaît, mais la charge ne deviendra pas libre: elle sera soumise à l'action du champ électrique qui règne dans ce système de référence. Ce champ électrique dépend du champ magnétique initial et de la vitesse relative des deux systèmes de référence. On peut en venir à cette conclusion que

les champs électrique et magnétique constituent un tout unique — un champ électromagnétique à deux composantes: le champ électrique et le champ magnétique.

Ces deux champs sont vectoriels et, de même que le champ électrique, le champ magnétique peut varier d'un point à l'autre et dépendre du temps.

Nous devons caractériser le champ magnétique par une certaine grandeur vectorielle analogue à l'intensité de champ électrique **E**. Cette grandeur est désignée **B** mais selon la tradition on l'appelle non pas intensité de champ magnétique mais *induction magnétique*. La notion d'*intensité de champ magnétique* **H** existe elle aussi et sera expliquée plus loin.

Les lignes dont les tangentes en chaque point sont dirigées le long du vecteur induction **B** sont appelées *lignes de force magnétique*.

L'expérience montre que la force **f** exercée sur une charge q en mouvement dans un champ magnétique à une vitesse **v** est proportionnelle à q et à v et est dirigée perpendiculairement à **v**. Il s'ensuit de façon univoque que l'expression de la force doit avoir la structure d'un produit vectoriel de la vitesse **v** de la particule par l'induction magnétique **B**. Nous poserons

$$\mathbf{f} = q\,[\mathbf{vB}].$$

Si la charge q est soumise à la fois à l'action d'un champ magnétique **B** et d'un champ électrique **E**, la force résultante s'exprime par

$$\mathbf{f} = q\,(\mathbf{E} + [\mathbf{vB}]).$$

Cette force est appelée *force de Lorentz*.

Il découle de la formule de **f** que les champs électrique et magnétique, bien que tous les deux soient des champs vectoriels, sont de nature vectorielle différente. Pour expliquer cette circonstance importante il convient de se rappeler la définition du produit vectoriel d'après laquelle le produit vectoriel des vecteurs unitaires **i** et **j** (le long des axes x et y) est toujours égal au vecteur unitaire **k** (le long de l'axe z), que le système de coordonnées soit à droite ou à gauche. C'est pourquoi les produits vectoriels de deux vecteurs ordinaires dans les systèmes à droite (R) et à gauche (L), ont des sens opposés. Il est clair que le sens des vecteurs tels que le déplacement, la vitesse, l'accélération, la force, ainsi que l'intensité de champ électrique, ne dépend pas du choix du système R ou L. Cela signifie que si l'on effectue une réflexion dans l'espace qui inverse le sens de tous les trois axes de coordonnées, les projections sur les nouveaux axes des vecteurs déplacement, vitesse, accélération, force, intensité de champ électrique **E** changeront de signe elles aussi. De tels vecteurs sont dits *polaires*.

Mais la réflexion dans l'espace représente le passage du système R au système L dans lequel les projections sur les axes de coordonnées du produit vectoriel des vecteurs ordinaires, c'est-à-dire polaires, ne changent pas mais conservent leur signe. Ceci signifie que si

la nature vectorielle de l'induction magnétique **B** était la même que celle de l'intensité de champ électrique **E**, c'est-à-dire si le vecteur **B** était polaire, l'orientation mutuelle de deux composantes de la force **f**, de la force électrique $q\mathbf{E}$ et de la force magnétique $q\,[\mathbf{vB}]$, changerait lors du passage du système R au système L. Physiquement, un tel changement est absurde. Ceci signifie que le vecteur **B** ne peut pas être polaire. Autrement dit, à la différence du vecteur **E**, les projections du vecteur **B** ne doivent pas changer lors de la réflexion dans l'espace. De tels vecteurs sont dits *axiaux* ou *pseudovecteurs*. Ainsi,

l'intensité de champ électrique est un vecteur polaire, et l'induction magnétique est un vecteur axial.
Le produit vectoriel de deux vecteurs polaires ou de deux vecteurs axiaux donne toujours un vecteur axial; le produit d'un vecteur polaire et d'un vecteur axial est un vecteur polaire. Si une grandeur quelconque est un vecteur polaire (la force f, par exemple), elle ne peut pas être représentée par une somme d'un vecteur polaire et d'un vecteur axial; toutes les composantes d'une telle grandeur doivent être des vecteurs polaires.

Regardons maintenant comment s'effectue le mouvement d'une particule chargée non relativiste (c'est-à-dire d'une particule dont la vitesse est petite par rapport à la vitesse de la lumière dans le vide $c \simeq 3\cdot 10^8$ m·s^{-1}) dans un champ magnétique donné. L'équation du mouvement de la particule est de la forme

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\,[\mathbf{vB}],$$

où m est la masse de la particule. De cette équation il résulte tout d'abord que *le champ magnétique ne peut pas faire varier l'énergie cinétique de la particule*. En effet, multiplions scalairement les deux membres de l'équation par le vecteur vitesse **v**. Le second membre sera évidemment nul ; on a donc $m\mathbf{v}\,(d\mathbf{v}/dt) = 0$, il s'ensuit que l'énergie cinétique de la particule se conserve: $mv^2/2 = \mathrm{C^{te}}$.

Considérons de plus près le mouvement dans un champ magnétique uniforme et constant. Il est évident que la projection de la vitesse $v_\parallel$ de la particule le long de **B** ne varie pas, et comme le carré de sa vitesse reste invariable, le carré de la composante transversale de la vitesse $v_\perp^2$ de la particule (par rapport à **B**) se conserve lui aussi: $v_\parallel = \mathrm{C^{te}}$, $v_\perp^2 = \mathrm{C^{te}}$.

La projection de la trajectoire de la particule sur un plan perpendiculaire à **B** est une circonférence. En effet, la projection de l'accélération de la particule sur ce plan est $v_\perp^2/r$, où r est le rayon de courbure de la projection de la trajectoire. On a donc $m\,(v_\perp^2/r) = qv_\perp B$, d'où

$$r = mv_\perp/(qB) = \mathrm{C^{te}}.$$

La grandeur r est appelée *rayon de Larmor*. Le mouvement le long du champ se fait avec une vitesse constante $v_{\|}$; c'est pourquoi la trajectoire de la particule pour $v_{\|} \neq 0$ est une ligne en hélice. Pour $v_{\|} = 0$ la trajectoire est une circonférence de rayon égal à celui de Larmor.

Le rayon de Larmor est proportionnel à l'impulsion transversale $mv_{\perp}$ de la particule et inversement proportionnel à l'induction B. Si la particule se déplace dans un champ connu **B** et si nous pouvons mesurer le rayon de courbure de sa trajectoire, la formule sus-indiquée permet de calculer l'impulsion transversale de la particule. Inversement, si $mv_{\perp}$ et r sont connus, on peut déterminer la valeur de **B**.

En divisant $2\pi r$ par $v_{\perp}$, nous obtenons la période de révolution de la particule

$$T_c = \frac{2\pi r}{v_{\perp}} = 2\pi \frac{m}{qB}.$$

Cette grandeur ne dépend ni de la vitesse, ni du rayon de la circonférence décrite par la particule chargée. (Cette conclusion n'est valable que dans le cas où la vitesse de la particule est très inférieure à c.) Il est également facile de trouver la vitesse angulaire de révolution de la particule que l'on appelle *fréquence cyclotronique*:

$$\omega_c = 2\pi/T_c = qB/m.$$

En multipliant T_c par $v_{\|}$, nous trouverons le pas de l'hélice décrite par la particule:

$$h = T_c v_{\|} = 2\pi \frac{mv_{\|}}{qB}.$$

Puisque la charge électrique en mouvement dans un champ magnétique est soumise de la part de celui-ci à une force (et le courant électrique est un ensemble des charges en mouvement), un conducteur placé dans un champ magnétique et parcouru par un courant électrique est soumis lui aussi à des forces de la part de ce champ. Proposons-nous de déterminer la force qui s'exerce dans un champ **B** sur un élément de volume dV du conducteur. Puisque la force exercée par un champ d'induction **B** sur une charge q unique se déplaçant dans ce champ à une vitesse **v** est égale à q [**vB**], on a pour 1 m^3 la relation **f** $= qn$ [**vB**], où n est la densité de particules chargées mobiles. Mais qn**v** n'est rien d'autre que le vecteur densité de courant **j** et on peut donc écrire **f** = [**jB**]. Multipliant **f** par dV, nous trouverons la force d**F** exercée sur un élément de volume dV du conducteur:

$$d\mathbf{F} = [\mathbf{jB}]\, dV.$$

Dans le cas d'un conducteur filiforme cette relation permet de déterminer la force d**F** agissant sur un élément de longueur d**l**. En

écrivant dV sous la forme $S\mathrm{d}l$, où S est l'aire de la section du conducteur, et en tenant compte que jS est l'intensité de courant I, nous obtenons

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = I\,[\mathrm{d}\mathbf{l}\mathbf{B}],$$

où d**l** est un élément de longueur orienté dans le sens du courant qui traverse le conducteur. Nous voyons que la force d**F** est dirigée perpendiculairement à d**l** et à **B** de telle façon que lorsqu'une vis normale (un tire-bouchon) tourne dans le sens de d**l** à **B**, elle avance dans le sens de d**F**. La force d**F** est proportionnelle au sinus de l'angle des vecteurs d**l** et **B**, de sorte qu'elle est nulle pour $\mathrm{d}\mathbf{l} \parallel \mathbf{B}$ et maximale pour $\mathrm{d}\mathbf{l} \perp \mathbf{B}$.

§ 4.2. Loi d'Ampère. Loi de Biot et Savart

Après avoir examiné l'action d'un champ magnétique donné sur une charge électrique (en mouvement!) nous devons passer à l'étude de l'autre aspect de l'interaction charge-champ magnétique: à la production de champ magnétique par une charge en mouvement et donc par un courant électrique. Puisque le courant subit l'action du champ magnétique, on peut en conclure qu'*entre deux courants doivent s'exercer des forces d'origine magnétique*. Il est naturel de prendre ce phénomène pour point de départ de l'étude de la production de champ magnétique. On peut dire qu'ici il y a une certaine analogie avec l'électrostatique dans laquelle l'introduction de la notion de champ électrique et son étude sont basées sur l'étude de l'interaction entre deux charges électriques. A cette fin l'électrostatique avait à sa disposition la loi de Coulomb, il nous faut donc une loi analogue pour l'interaction des courants. Une telle loi a été découverte par Ampère qui a établi que

entre deux conducteurs parallèles, de très grande longueur, parcourus par des courants I et I' s'exerce une force d'interaction proportionnelle au produit des intensités des courants I et I' et inversement proportionnelle à la distance entre les conducteurs. Les courants parallèles se repoussent et les courants antiparallèles s'attirent. La force d'interaction est également proportionnelle à la longueur des conducteurs.

Ainsi, la force rapportée à la longueur des conducteurs peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}l} = 2k_2\,\frac{II'}{d},$$

où k_2 est une certaine constante analogue à la constante k_1 intervenant dans la loi de Coulomb et dont la valeur dépend du choix du système d'unités (le facteur 2 est introduit pour plus de commodité).

La comparaison des dimensions de la charge et de l'intensité de courant montre que le rapport k_1/k_2 a les dimensions d'un carré

de la vitesse. Cette circonstance présente un sens physique profond : la théorie de l'électromagnétisme doit contenir une grandeur ayant les dimensions d'une vitesse. Cette grandeur est la vitesse de la lumière dans le vide $c = 2{,}9979 \cdot 10^8$ m·s^{-1}. En effet, la comparaison des forces mécaniques F_1 et F_2 pour des charges et intensités de courants connues a montré que

$$k_1/k_2 = c^2.$$

Cette relation montre que lors du choix d'un système d'unités les grandeurs k_1 et k_2 ne peuvent pas être choisies arbitrairement et qu'on doit toujours tenir compte de la relation qui existe entre elles. Si l'on choisit $k_1 = 1$, on obtient $k_2 = c^{-2}$. Un tel choix correspond au système d'unités de Gauss. Dans ce système

$$\frac{dF_2}{dl} = \frac{2II'}{c^2d}.$$

En choisissant $k_1 = (4\pi\varepsilon_0)^{-1}$, nous obtenons

$$k_2 = \frac{k_1}{c^2} = (4\pi\varepsilon_0 c^2)^{-1} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi},$$

où μ_0 est une nouvelle constante analogue à ε_0 et liée à elle par la relation $\varepsilon_0\mu_0 = c^{-2}$. Un tel choix est fait dans le système SI ; dans ce système

$$\frac{dF_2}{dl} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{II'}{d}$$

et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H·m^{-1} (H est l'unité d'inductance appelée henry).

Maintenant nous pouvons passer à l'introduction de l'induction magnétique. Quant à l'intensité de champ électrique, nous l'avons introduite sur la base de la loi de Coulomb comme une force rapportée à la charge électrique unité. L'induction magnétique peut se définir comme une grandeur proportionnelle à dF_2/dl. En d'autres termes, l'induction produite par un courant I à une distance d peut se définir comme

$$B = 2k_2\alpha I/d,$$

où α est une nouvelle constante. En posant $\alpha = 1$, nous obtenons la relation de définition de B dans le système SI :

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{d}.$$

Dans le système de Gauss on pose $\alpha = c$ et on obtient la relation suivante de définition de B:

$$B = \frac{2}{c}\frac{I}{d}.$$

Dans ce système les dimensions de B sont les mêmes que celles de E.

Pour ce qui est du sens de l'induction, le vecteur **B** se situe dans un plan P perpendiculaire au conducteur parcouru par un courant, et les lignes de force sont des circonférences concentriques dont les centres se situent sur le conducteur (fig. 4.1). Puisque $B \sim d^{-1}$, le produit de la longueur d'une ligne de force $2\pi d$ par la valeur de l'induction magnétique B est une constante qui se détermine uni-

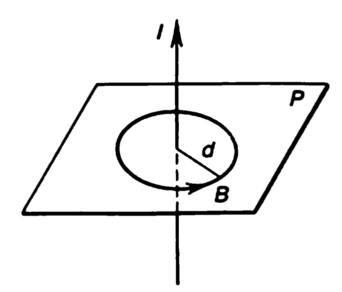


Fig. 4.1. Champ magnétique d'un courant continu rectiligne

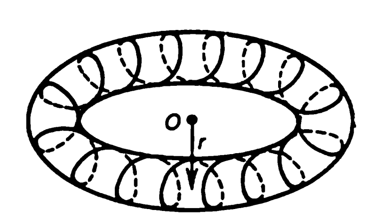


Fig. 4.2. Solénoïde en tore

quement par l'intensité du courant I, c'est-à-dire que $2\pi d B = \mu_0 I$. Le sens d'induction magnétique est lié à celui de courant de la même façon que le sens de rotation d'une vis normale est lié à son avancement.

L'expression de **B** peut être mise sous une autre forme:

$$\oint_L \mathbf{B}\, d\mathbf{l} = \mu_0 I,$$

où l'intégration s'effectue le long d'un contour confondu avec une ligne de force. Il se trouve que le contour ne doit nécessairement pas se confondre avec une ligne de force: il peut être choisi arbitrairement pourvu qu'il embrasse le courant I. De plus, le contour L peut être traversé par plusieurs conducteurs parcourus par des courants $I_1, I_2, \ldots$, et dans ce cas $\oint_L \mathbf{B} d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_n (\pm I_n)$, où la somme est étendue à tous les courants de telle sorte que les courants dont le sens est lié à celui du parcours du contour par la règle de la vis normale sont affectés du signe plus, et les courants passant dans le sens opposé, du signe moins. Nous pouvons donc conclure que

la circulation de l'induction magnétique le long d'un contour fermé quelconque est égale à la somme algébrique, multipliée par μ_0, des intensités des courants traversant ce contour.

Cette proposition exprime la *loi de courant total.*

Illustrons la loi de courant total sur l'exemple d'un solénoïde, c'est-à-dire d'un conducteur enroulé suivant une hélice, parcouru

par un courant électrique. La figure 4.2 représente un solénoïde circulaire dont les spires sont régulièrement enroulées sur un tore. Lorsque les spires sont suffisamment serrées, le champ du solénoïde est concentré principalement à son intérieur. Les lignes de force sont de toute évidence des circonférences centrées sur le centre O du tore. La circulation le long d'une circonférence de rayon r est égale à $2\pi rB$. Suivant la loi de courant total elle doit être égale à $\mu_0 IN$, où N est le nombre total de spires du solénoïde, d'où $B = \mu_0 IN/(2\pi r)$. Ainsi, l'induction magnétique dans un solénoïde est inversement proportionnelle au rayon de courbure de la ligne de force. Dans le cas d'un solénoïde suffisamment mince, les valeurs de r varient dans de petites limites si bien que l'induction B est pratiquement uniforme. Elle peut évidemment être mise sous la forme

$$B = \mu_0 In,$$

où n est le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde. Sous cette forme la formule est applicable également à un long solénoïde droit.

Ainsi, nous avons déterminé le champ magnétique dans deux cas les plus simples: d'un conducteur rectiligne et d'un solénoïde. L'application directe de la loi de courant total est devenue possible ici du fait que nous connaissions la symétrie des lignes de force magnétique. Mais dans le cas général des courants quelconques une telle application directe de la loi de courant total est impossible. Il est donc nécessaire de donner à cette loi une forme qui ne soit pas liée à la forme concrète du contour. A cet effet, il convient d'appliquer la *formule de Stokes*

$$\oint_L \mathbf{B}\, d\mathbf{l} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{B}\, d\mathbf{s},$$

où S est la surface s'appuyant sur le contour L.

Appliquons maintenant la loi de courant total à un contour infiniment petit limitant une aire infiniment petite Δs dans la section du conducteur. Le courant traversant cette surface peut s'écrire sous la forme $\Delta \mathbf{s} \mathbf{j}_t$, où $\mathbf{j}_t$ est le vecteur densité de courant. Puisque le champ magnétique est produit par toutes les charges en mouvement, nous devons entendre par $\mathbf{j}_t$ la densité totale de flux de charges en mouvement, qui est la somme de la densité de courant dû aux charges libres, c'est-à-dire de la densité de courant de conduction $\mathbf{j}$, et de la densité de courant dû aux charges liées $\mathbf{j}_b$ (on l'appelle densité de courant moléculaire ou ampérien): $\mathbf{j}_t = \mathbf{j} + \mathbf{j}_b$. La densité de courant de conduction se détermine par la loi d'Ohm déjà connue, alors que la détermination de la densité de courant de charges liées est un problème plus délicat qui sera repris aux chapitres 6 et 12. Nous y verrons en particulier que dans le cas de champs cons-

tants le courant total des charges liées à travers une section quelconque d'un corps est nul.

Ainsi, en introduisant $\mathbf{j}_b$, de façon formelle pour le moment, nous pouvons affirmer que suivant la loi de courant total rot $\mathbf{B}\Delta s = \mu_0 \mathbf{j}_t \Delta s$ et puisque Δs est un vecteur arbitraire

$$\text{rot}\, \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_t.$$

Cette équation qui lie le rotationnel de l'induction magnétique à la densité totale de courant $\mathbf{j}_t$ exprime la *forme différentielle de la loi de courant total dans le cas des champs constants.*

Pourtant la loi de courant total, même sous forme différentielle. est encore insuffisante pour une détermination univoque du champ magnétique. Le fait est que la détermination de tout champ vectoriel exige que l'on connaisse deux caractéristiques de ce champ: la divergence et le rotationnel. Il faut donc que nous connaissions encore la divergence de l'induction magnétique ou, ce qui revient au même, le flux d'induction magnétique à travers une surface fermée quelconque.

Le flux de champ électrique à travers une surface fermée quelconque se détermine par la charge électrique totale contenue à l'intérieur de cette surface. Il est donc tout naturel que le flux d'induction magnétique à travers une surface fermée doit se déterminer par la « charge magnétique » totale contenue à l'intérieur de cette surface. Mais les charges magnétiques n'existent pas dans la nature et donc le flux d'induction magnétique **B** à travers une surface fermée quelconque est nul:

$$\oint_S \mathbf{B}\, d\mathbf{s} = 0,$$

ce qui signifie que la divergence de l'induction magnétique est nulle: div $\mathbf{B} = 0$. Ainsi nous avons

deux équations:

$$\text{rot}\, \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_t, \quad \text{div}\, \mathbf{B} = 0,$$

qui déterminent entièrement le champ magnétique produit par tout courant continu.

De même qu'un champ électrostatique $\mathbf{E} = -\text{grad}\, \varphi$ peut être représenté par le gradient d'une certaine fonction scalaire, du potentiel électrique φ, l'induction magnétique **B** peut être représentée par le rotationnel d'une certaine fonction vectorielle **A** que l'on appelle *potentiel vecteur*:

$$\mathbf{B} = \text{rot}\, \mathbf{A}.$$

Pourtant lorsque **B** est donnée, cette relation ne définit pas la fonction **A** d'une façon univoque. En effet, on a l'identité rot grad $\chi = 0$, où χ est une fonction scalaire arbitraire des coordon-

nées. Il est donc clair que les potentiels vecteurs **A** et $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad}\,\chi$ donneront une même induction magnétique. Cette circonstance peut être utilisée pour imposer à la fonction **A** une limitation quelconque. Il est commode d'imposer à **A** la condition $\text{div}\mathbf{A} = 0$. Puisque $\text{rot}\,\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_t$ et $\text{rot rot}\,\mathbf{A} = \text{grad div}\,\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} = \text{rot}\,\mathbf{B}$, nous obtenons dans ce cas

$$\Delta\mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}_t.$$

Cette équation pour le potentiel vecteur **A** est analogue à l'équation de Poisson $\Delta\varphi = \rho/\varepsilon_0$ pour le potentiel électrostatique φ.

Nous savons que la charge $dq = \rho dV$ fait naître un potentiel $d\varphi = dq/(4\pi\varepsilon_0 r)$, où r est la distance qui sépare l'élément de volume dV et le point où on détermine le potentiel. Aussi, lorsque la répartition de la densité de charge ρ est donnée, le potentiel φ se détermine-t-il par la formule

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho\, dV}{r}.$$

L'équation de **A** étant analogue à l'équation de φ à cette différence près qu'au lieu de ρ/ε_0 l'équation pour **A** fait intervenir $\mu_0 \mathbf{j}_t$, on peut écrire immédiatement la solution de l'équation du potentiel vecteur:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_t\, dV}{r},$$

où r est la distance qui sépare l'élément de volume dV (de densité de courant $\mathbf{j}_t$) et le point où l'on cherche le potentiel vecteur **A**.

Utilisons cette formule pour déterminer l'induction magnétique produite par un courant continu I qui parcourt un conducteur filiforme (c'est-à-dire très mince) fermé. Dans ce cas l'intégration doit porter sur le volume occupé par le conducteur, si bien que l'élément de volume figurant dans la formule de **A** peut être représenté sous la forme $dV = ds\,dl$, où ds est l'élément de surface de la section et dl, l'élément de longueur du conducteur. Effectuons d'abord l'intégration sur la surface S de la section du conducteur. Comme la distance r du point d'observation à tous les points de la section S est pratiquement la même, nous obtenons $r^{-1} \int \mathbf{j}_t ds$. Mais, comme il est indiqué précédemment, $\int \mathbf{j}_b\, ds = 0$, ce qui donne $r^{-1} I\tau$, où τ est un vecteur unitaire le long de la normale à S, c'est-à-dire le long de dl. Il reste à effectuer l'intégration sur dl:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\mathbf{dl}}{r};$$

elle se fait ici le long du contour de courant dans le sens du courant circulant (r étant la distance de dl au point où l'on détermine **A**).

Il vient

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \operatorname{rot} \oint \frac{d\mathbf{l}}{r}.$$

Les opérations de dérivation que comporte le rot doivent se faire par rapport aux coordonnées du point en lequel on cherche **B**. Le rot peut donc se mettre sous le signe d'intégration et d**l** peut être considéré comme un vecteur constant. Mais dans le cas d'un vecteur constant **a** on a la formule

$$\operatorname{rot} \frac{\mathbf{a}}{r} = \frac{[\mathbf{ar}]}{r^3}.$$

Il vient alors comme expression définitive de l'induction magnétique

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{[d\mathbf{lr}]}{r^3}.$$

où l'intégration s'effectue le long du contour de courant. Cette formule exprime la *loi de Biot et Savart*.

§ 4.3. Moment magnétique d'un courant

Utilisons la loi de Biot et Savart pour déterminer le champ magnétique produit par un courant circulaire (fig. 4.3). Par raison de symétrie, en tous les points situés sur la ligne Oz perpendiculaire au plan du courant circulaire et passant par le centre O du cercle

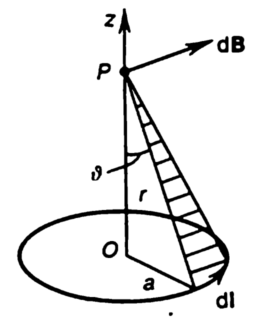
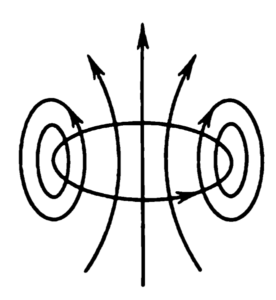



Fig. 4.3. Détermination du champ magnétique d'un courant circulaire


Fig. 4.4. Lignes de force du champ magnétique d'un courant circulaire

le champ magnétique est dirigé le long de cette ligne (vers le haut si le courant circule en sens inverse des aiguilles d'une montre). Ceci signifie que cette ligne est une ligne de force. Son origine et son extrémité sont à l'infini. D'autres lignes de force sont représentées à la figure 4.4. Toutes ces lignes sont fermées et embrassent le contour de courant.

Le champ magnétique produit par un courant circulaire en un point quelconque est assez difficile à déterminer, de sorte que nous nous contenterons de calculer **B** seulement sur la ligne Oz (v. fig. 4.3). Suivant la loi de Biot et Savart l'induction magnétique d**B** produite par un élément d**l** du conducteur en un point P est perpendiculaire au plan (d**l** ; **r**) (sur la figure 4.3 ce plan est hachuré), et comme $\mathbf{r} \perp \mathrm{d}\mathbf{l}$,

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\mathrm{d}\mathbf{l}}{r}.$$

Le champ résultant au point P est dirigé le long de OP ; il faut donc trouver la projection de d**B** sur l'axe des z et additionner ensuite toutes les projections correspondant aux différents éléments d**l** du contour de circuit. La projection $\mathrm{d}B_z$ est évidemment égale à

$$\mathrm{d}B \sin\vartheta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\mathrm{d}l}{r^2} \sin\vartheta,$$

et puisque l'angle ϑ est le même pour tous les éléments d**l** du contour, l'induction résultante est

$$B = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a}{r^2} \sin\vartheta,$$

où a est le rayon du contour de courant. En remarquant que $\sin\vartheta =$ $= a/r$, nous obtenons

$$B = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{r^3}.$$

En particulier, au point O nous avons $B_0 = \mu_0 I/(2a)$.

La formule de **B** peut se récrire sous la forme

$$\mathbf{B} = [\mu_0/(2\pi r^3)]\mathbf{m},$$

où $\mathbf{m} = I\mathbf{S}$ et **S** est le vecteur aire balayée par le courant, c'est-à-dire un vecteur égal en module à $S = \pi a^2$ et dirigé suivant la normale à l'aire (c'est-à-dire le long de l'axe z). Le vecteur **m** est appelé *moment magnétique d'un courant* *). Nous voyons que sur l'axe z le champ d'un courant circulaire se détermine par son moment magnétique. A l'extérieur de l'axe, cette assertion n'est pas vraie dans le cas général. Mais on montre que loin du courant circulaire l'induction magnétique, bien que différente de l'induction sur l'axe, peut s'exprimer néanmoins par l'intermédiaire de **m**. De plus, à une grande distance d'un contour de courant quelconque l'induction magnétique se détermine toujours par le moment magnétique **m** du courant :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m}\mathbf{r}) - \mathbf{m}r^2}{4\pi r^5},$$

où **r** est le rayon vecteur joignant l'endroit où se trouve le contour de courant au point d'observation (on suppose que $r \gg a$, a étant

*) Cette grandeur est encore notée $\mathbf{p}_m$.

les dimensions du contour). En module

$$B=\frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\sqrt{1+3\cos^2\Theta},$$

où Θ est l'angle formé entre **m** et **r**. On remarquera l'analogie qui existe entre ces formules et les formules donnant le moment électrique dipolaire (v. § 1.3).

Comparons, avant de clore ce paragraphe, le champ électrostatique et le champ magnétique produit par un courant continu. Le champ électrostatique est engendré par des charges électriques, sources de champ, et la divergence de son intensité se détermine par la densité de charges électriques: $\operatorname{div}\mathbf{E}=\rho/\varepsilon_0$. Ce champ est irrotationnel, c'est-à-dire que le rotationnel de son intensité est nul: $\operatorname{rot}\mathbf{E}=0$. Le champ magnétique n'a pas de sources et la divergence de l'induction magnétique est nulle: $\operatorname{div}\mathbf{B}=0$. C'est un champ rotationnel et le rotationnel de l'induction magnétique se détermine par la densité de courants électriques: $\operatorname{rot}\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{j}$.

Aux endroits où se trouvent des charges électriques les lignes de force électrique ont leur origine et leur extrémité. Quant aux charges magnétiques, elles n'existent pas. Aussi les lignes de force magnétique ne peuvent avoir ni d'origine, ni d'extrémité. Pourtant ceci ne signifie pas que les lignes de force magnétique doivent nécessairement être fermées ou avoir leur origine et leur extrémité à l'infini. Certes, ces deux cas sont possibles, mais il existe encore une troisième possibilité: une ligne de force qui n'a ni origine ni extrémité remplit d'une façon serrée toute une surface appelée surface magnétique.

§ 4.4. Interaction des courants

Puisque le courant électrique produit autour de lui un champ magnétique, deux courants interagissent, comme il a été indiqué, électrodynamiquement l'un avec l'autre. A savoir: un élément $\mathrm{d}\mathbf{l}_1$ du conducteur parcouru par un courant I_1 est soumis de la part du courant I_2 à une force

$$\mathrm{d}\mathbf{F}_1=I_1[\mathrm{d}\mathbf{l}_1\mathbf{B}_2],$$

où $\mathbf{B}_2$ est l'induction magnétique produite par le courant I_2 à l'endroit où se trouve l'élément $\mathrm{d}\mathbf{l}_1$ du courant I_1. Suivant la loi de Biot et Savart

$$\mathbf{B}_2=\frac{\mu_0 I_2}{4\pi}\oint\limits_{L_2}\frac{[\mathrm{d}\mathbf{l}_2\mathbf{r}_{21}]}{r_{21}^3},$$

où $\mathbf{r}_{21}$ est le rayon vecteur joignant l'élément $\mathrm{d}\mathbf{l}_2$ du contour parcouru par le courant I_2 à l'élément $\mathrm{d}\mathbf{l}_1$ du contour parcouru par le

courant I_1. Ainsi

$$d\mathbf{F}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \left[d\mathbf{l}_1 \oint\limits_{L_2} \frac{[d\mathbf{l}_2 \mathbf{r}_{21}]}{r_{21}^3} \right].$$

Cette formule exprime la loi d'Ampère générale pour l'interaction des courants. Nous voyons que la force d'interaction est proportionnelle au produit des intensités des courants.

Examinons de plus près le cas où le courant I_2 parcourt un conducteur rectiligne très long. Alors

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_2}{r^2} [\mathbf{n}_2 \mathbf{r}],$$

où $\mathbf{n}_2$ est le vecteur unitaire dirigé le long du conducteur parcouru par le courant I_2 (dans le sens du courant), r, la distance qui sépare l'élément $d\mathbf{l}_1$ et le deuxième conducteur, le vecteur $\mathbf{r}$ étant dirigé du deuxième conducteur vers $d\mathbf{l}_1$. Alors il vient

$$d\mathbf{F}_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r^2} [d\mathbf{l}_1 [\mathbf{n}_2 \mathbf{r}]].$$

En tenant compte que $[d\mathbf{l}_1 [\mathbf{n}_2 \mathbf{r}]] = \mathbf{n}_2 (d\mathbf{l}_1 \mathbf{r}) - \mathbf{r} (d\mathbf{l}_1 \mathbf{n}_2)$ et en supposant que $d\mathbf{l}_1 \perp \mathbf{r}$, nous obtenons finalement

$$d\mathbf{F}_1 = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r^2} dl_1 (\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2) \mathbf{r}.$$

où $\mathbf{n}_1$ est le vecteur unitaire dirigé le long de $d\mathbf{l}_1$.

Nous voyons que la force qui s'exerce sur l'élément $d\mathbf{l}_1$ du premier conducteur de la part du deuxième conducteur filiforme de grande longueur est proportionnelle au produit des intensités des courants parcourant les conducteurs et inversement proportionnelle à la distance entre les conducteurs. Cette force est proportionnelle au cosinus de l'angle des conducteurs et est dirigée soit suivant $\mathbf{r}$ (si $\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 < 0$), soit en sens opposé (si $\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2 > 0$). Dans le premier cas les conducteurs s'attirent, et dans le second cas, se repoussent. Les courants parallèles s'attirent, alors que les courants antiparallèles se repoussent.

Revenons à la formule générale qui définit la force agissant sur un élément de conducteur filiforme placé dans un champ magnétique. Si nous voulons déterminer l'interaction électrodynamique générale subie par un contour parcouru par un courant et placé dans un champ magnétique, il convient de diviser ce contour en éléments distincts, de déterminer les forces qui s'exercent sur chacun de ces éléments et d'étudier ensuite l'action de ces forces sur le contour. Mais une telle procédure est en règle générale très compliquée et peu commode ; il est plus simple de procéder autrement, à savoir de déterminer d'abord la fonction potentielle du courant dans le champ magnétique considéré. Imaginons à cet effet que le contour

parcouru par un courant, placé dans un champ magnétique, s'est déplacé un peu sous l'action des forces électromagnétiques (et, dans le cas général, s'est déformé). Si **a** est le déplacement de l'élément **dl** du contour, le travail effectué par la force $\mathrm{d}\mathbf{F} = I\,[\mathrm{d}\mathbf{l}\mathbf{B}]$ appliquée à cet élément sera

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}\mathbf{F}\cdot\mathbf{a} = I\mathbf{a}\,[\mathrm{d}\mathbf{l}\mathbf{B}] = I\mathbf{B}\,[\mathbf{a}\mathrm{d}\mathbf{l}].$$

Mais $[\mathbf{a}\mathrm{d}\mathbf{l}]$ représente le vecteur aire **ds** balayée par l'élément **dl** dans son déplacement **a**. Nous pouvons donc écrire $\mathrm{d}A = I\mathbf{B}\mathrm{d}\mathbf{s}$ et le travail total des forces qui s'exercent sur les différents éléments du contour aura pour expression

$$A = I\int_{S_b}\mathbf{B}\,\mathrm{d}\mathbf{s}.$$

où l'intégration s'effectue sur la surface S_b de la « bande » limitée par les positions initiale et finale du contour.

Le travail des forces exercées sur un contour parcouru par un courant peut s'exprimer par l'intermédiaire du *flux magnétique* $\Phi = \int_S \mathbf{B}\mathrm{d}\mathbf{s}$ traversant ce contour (S étant une surface quelconque limitée par le contour). Remarquons d'abord que

pour le flux magnétique, de même que pour le flux électrique, est valable le théorème de Gauss mais, puisque les charges magnétiques n'existent pas à la différence des charges électriques, le flux magnétique à travers une surface fermée quelconque doit être nul.

C'est pourquoi si l'on prend un contour quelconque et deux surfaces quelconques S et S' s'appuyant sur ce contour, les flux magnétiques à travers ces surfaces seront identiques. (Il convient seulement d'orienter les éléments de surface S et S' de la même façon ; nous supposerons donc toujours que le vecteur aire et le sens de parcours du contour forment un système à droite.) C'est dans ces conditions qu'on peut parler d'un flux magnétique traversant le contour considéré.

Reportons-nous à la formule donnant le travail A. Prenons deux surfaces quelconques S_1 et S_2 sustendues par des courbes *1* et *2* correspondant à deux positions du contour parcouru par un courant et considérons une surface fermée $S_1 + S_2 + S_b$ constituée par les surfaces S_1 et S_2 et la surface de la « bande » S_b. Le flux magnétique à travers cette surface est nul :

$$\oint_{S_1+S_2+S_b}\mathbf{B}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = 0$$

(**ds** étant le vecteur aire dirigé partout suivant la normale extérieure à la surface). Désignons par Φ_1 et Φ_2 les flux magnétiques qui tra-

versent le contour parcouru par un courant dans ses deux positions: $\Phi_1 = \int_{S_1} \mathbf{B} d\mathbf{s}_1$, $\Phi_2 = \int_{S_2} \mathbf{B} d\mathbf{s}_2$ (le sens de parcours du contour est supposé le même que celui de courant). Les vecteurs $d\mathbf{s}_b$ et $d\mathbf{s}_1$ sont dirigés suivant la normale extérieure à la surface fermée tandis que le vecteur $d\mathbf{s}_2$ est orienté suivant la normale intérieure à cette surface; on peut donc écrire $\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi_b = 0$, où $\Phi_b = \int_{S_b} \mathbf{B} d\mathbf{s}_b$.

Ainsi, $\Phi_b = \Phi_2 - \Phi_1$ et donc

$$A = I\,(\Phi_2 - \Phi_1).$$

Ainsi, *le travail effectué par les forces du champ magnétique pour déplacer un contour parcouru par un courant est égal au produit de l'intensité du courant par l'accroissement de flux magnétique traversant ce contour*. Vu que les forces sont toujours dirigées de telle sorte que le travail soit positif, $\Phi_2 > \Phi_1$, c'est-à-dire que le contour se déplace et se déforme de façon que le flux qui le traverse soit maximal. En particulier,

un contour parcouru par un courant se déplace toujours dans le sens d'un champ plus intense. Si le conducteur constituant le contour peut se déformer (mais sans s'allonger), les forces qui lui sont appliquées tendent à donner au contour la forme d'un cercle parce que, pour un périmètre donné, le cercle possède l'aire maximale et, toutes choses étant égales par ailleurs, le flux magnétique est proportionnel à l'aire sustendue par le contour parcouru par un courant. Enfin, le contour parcouru par un courant tend à s'orienter par rapport au champ de telle sorte que le sens du champ forme avec le sens du courant un système à droite.

Le travail effectué lors du mouvement dans un champ irrotationnel est égal à la diminution de l'énergie potentielle. Bien que le champ magnétique ne soit pas irrotationnel, nous pouvons néanmoins introduire une *fonction potentielle du courant dans le champ magnétique*, dont la diminution détermine le travail accompli par les forces de ce champ. Cette fonction joue le rôle de l'énergie potentielle du courant dans un champ magnétique extérieur. La formule du travail montre que la fonction potentielle U du courant doit être définie comme

$$U = -I\Phi,$$

où Φ est le flux magnétique traversant le contour; le travail est dans ce cas lié à la fonction potentielle par la relation

$$A = U_1 - U_2.$$

Considérons à titre d'exemple un cadre parcouru par un courant I et placé dans un champ uniforme d'induction magnétique B de telle sorte qu'il peut tourner autour de son axe. Si $\mathbf{S}$ est le vecteur dirigé suivant la normale au cadre et égal en module à l'aire de la surface du cadre, celui-ci est traversé par un flux magnétique $\Phi = \mathbf{BS} =$

$= BS \cos \vartheta$, où ϑ est l'angle que la normale au plan du cadre fait avec le sens du champ. Si nous multiplions Φ par $-I$, nous trouverons la fonction potentielle du courant:

$$U = -IBS = -\mathbf{mB} = -mB \cos \vartheta,$$

où $\mathbf{m} = I\mathbf{S}$ est le moment magnétique du courant. Nous voyons que dans le cas d'un cadre la fonction U est égale au produit scalaire, changé de signe, du moment magnétique du courant par le vecteur induction magnétique. La fonction U dépend de l'angle formé entre la normale au plan du cadre et le champ magnétique. En prenant la dérivée de U par rapport à l'angle ϑ, nous trouvons le moment K de la force qui fait tourner le cadre: $K = -\partial U/\partial\vartheta = -mB \sin \vartheta$ ou, sous forme vectorielle,

$$\mathbf{K} = [\mathbf{mB}].$$

Les forces tendent à faire tourner le cadre de telle façon que l'angle ϑ devienne nul, c'est-à-dire que la fonction potentielle devienne minimale.

§ 4.5. Inductance

Déterminons maintenant la fonction potentielle de deux courants I_1 et I_2. La fonction U_{12} du courant I_1 dans un champ magnétique $B^{(2)}$ engendré par le courant I_2 est $U_{12} = -I_1\Phi_{21}$, où Φ_{21} est le flux magnétique produit par le courant I_2 et traversant le contour du premier courant. L'induction $B^{(2)}$ étant proportionnelle au courant I_2, le flux Φ_{21} l'est également: $\Phi_{21} = L_{21}I_2$, où L_{21} est un certain coefficient qui ne dépend que de la géométrie des contours, c'est-à-dire de leurs formes, de leurs dimensions et de leur position relative. Il est appelé *inductance mutuelle* des contours. En introduisant cette expression dans la formule de U_{12}, nous obtenons

$$U_{12} = -L_{21}I_1I_2.$$

On peut définir de manière analogue la fonction U_{21} du courant I_2 dans le champ $B^{(1)}$ produit par le courant I_1:

$$U_{21} = -L_{12}I_1I_2.$$

Mais les fonctions U_{12} et U_{21} doivent être égales l'une à l'autre (sinon la loi de l'égalité de l'action et de la réaction ne sera pas observée): $U_{12} = U_{21}$ et donc $L_{12} = L_{21}$.

Le coefficient L_{12} peut se mettre facilement sous une forme explicite dans le cas des conducteurs suffisamment minces. A cet effet, écrivons le flux Φ_{21} sous la forme $\Phi_{21} = \int\limits_{S_1} \mathbf{B}^{(2)}d\mathbf{s}_1$, où $d\mathbf{s}_1$ est un élément orienté de surface s'appuyant sur le contour L_1 parcouru par le courant I_1. En posant $\mathbf{B}^{(2)} = \operatorname{rot} \mathbf{A}^{(2)}$, où $\mathbf{A}^{(2)}$ est le potentiel

vecteur créé par le courant I_2, nous obtenons d'après la formule de Stokes

$$\Phi_{21} = \int_{S_1} \operatorname{rot} \mathbf{A}^{(2)} \, d\mathbf{s}_1 = \int_{L_1} \mathbf{A}^{(2)} \, d\mathbf{l}_1$$

($d\mathbf{l}_1$ étant un élément orienté de contour L_1). Dans le cas des conducteurs filiformes

$$\mathbf{A}^{(2)} = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{L_2} \frac{d\mathbf{l}_2}{r_{21}},$$

où r_{21} est la distance séparant les éléments $d\mathbf{l}_2$ et $d\mathbf{l}_1$. Il vient donc

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \, d\mathbf{l}_2}{r_{21}}.$$

où

$$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \, d\mathbf{l}_2}{r_{21}}.$$

Nous voyons que la grandeur L_{12} peut être positive, négative ou nulle.

En plus de la fonction potentielle mutuelle U_{12} nous devons introduire aussi les fonctions potentielles propres U_{11} et U_{22} des courants. En effet, le courant I_1 produit une induction magnétique propre $B^{(1)}$ dans laquelle il se trouve. Ceci signifie qu'il possède une certaine fonction potentielle propre liée aux forces électrodynamiques d'interaction entre les différents éléments de contour. Il semblerait que pour déterminer cette fonction il faudrait déterminer le flux magnétique propre et le multiplier par $-I_1$. Mais en réalité il ne faut prendre que la moitié de cette grandeur, c'est-à-dire que

$$U_{11} = -\frac{1}{2} I_1 \Phi_{11}.$$

Pour expliquer le sens du facteur $\frac{1}{2}$, examinons de plus près l'origine de la fonction potentielle propre. A cet effet, divisons le courant I_1 en filets de courant minces ΔI_1. Alors la fonction potentielle ΔU_{11} d'un filet ΔI_1 quelconque dans le champ du courant restant $I_1 - \Delta I_1$ sera $\Delta U_{11} = -\Delta I_1 \Phi'_{11}$, où Φ'_{11} est le flux magnétique traversant le filet et produit par le courant restant $I_1 - \Delta I_1$. Si ΔI_1 est infiniment petit, le flux Φ'_{11} ne diffère qu'infiniment peu du flux Φ_{11}. Quant à ce dernier, il est, de même que l'induction $\mathbf{B}^{(1)}$, proportionnel au courant qui l'a engendré, c'est-à-dire que

$$\Phi_{11} = L_1 I_1,$$

où L_1 est un certain coefficient qui ne dépend que des dimensions et de la forme du contour. Il est appelé *inductance propre du contour*. Remarquons que $L_1 > 0$. Ainsi, pour un courant de filet infiniment

petit dI_1 nous avons $dU_{11} = - L_1 I_1 dI_1$. En sommant cette expression sur tous les filets, nous trouverons la fonction potentielle propre du premier contour: $U_{11} = - L_1 I_1^2/2$. En y remplaçant $L_1 I_1$ par Φ_{11}, nous obtiendrons la formule pour U_{11} indiquée plus haut. On introduit d'une manière analogue la fonction potentielle propre du deuxième courant:

$$U_{22} = -\frac{1}{2} L_2 I_2^2 = -\frac{1}{2} I_2 \Phi_{22},$$

où L_2 est l'inductance propre du deuxième contour liée au flux propre Φ_{22} du deuxième contour par la relation $\Phi_{22} = L_2 I_2$.

Si nous additionnons les fonctions potentielles propres U_{11} et U_{22} et la fonction potentielle mutuelle U_{12}, nous trouverons la fonction potentielle totale des deux courants: $U = U_{11} + U_{12} + U_{22}$. Cette fonction peut se mettre sous deux formes:

$$U = -\frac{1}{2}(I_1\Phi_{11} + I_1\Phi_{21} + I_2\Phi_{22} + I_2\Phi_{12});$$

$$U = -\frac{1}{2}(L_1 I_1^2 + 2L_{12} I_1 I_2 + L_2 I_2^2),$$

où $L_{12} = L_{21}$ est l'*inductance mutuelle.*

Nous voyons que U représente une forme quadratique des courants qui est, comme nous allons l'expliquer, une forme négative. Il est aisé d'en conclure que les inductances doivent toujours satisfaire à la condition

$$|L_{12}| \leqslant \sqrt{L_1 L_2}.$$

Déterminons l'inductance d'un solénoïde qui peut être droit ou circulaire; nous supposerons seulement qu'il soit suffisamment long et mince pour que le champ magnétique puisse être considéré comme uniforme à l'intérieur du solénoïde et nul à son extérieur: $B = \mu_0 I n$. Dès lors, le flux magnétique à travers une spire est égal à $BS = \mu_0 n S I$, où S est l'aire de la section transversale du solénoïde. En multipliant cette quantité par le nombre total de spires N, nous obtenons le flux magnétique propre $\Phi = \mu_0 n N S I$. Enfin, en égalant cette quantité à LI, nous trouvons l'inductance du solénoïde: $L = \mu_0 n N S$. Comme $n = N/l$ (l étant la longueur du solénoïde), nous obtenons

$$L = \mu_0 N^2 S/l.$$

Ainsi, *l'inductance d'un solénoïde est proportionnelle au carré du nombre de ses spires.*

Recherchons maintenant la fonction potentielle propre du solénoïde. En introduisant dans la formule $U = -\frac{1}{2} LI^2$ l'expression obtenue pour L, nous avons $U = - \mu_0 S N^2 I^2/(2l)$. En remarquant

que $I = B/(\mu_0 n)$, mettons U sous la forme

$$U = -B^2V/(2\mu_0),$$

où $V = Sl$ est le volume du solénoïde.

Envisageons maintenant un solénoïde à deux enroulements comportant respectivement N_1 et N_2 spires et parcourus par des courants différents I_1 et I_2. Ces courants peuvent circuler soit dans un même sens, soit dans des sens opposés. Quelle est l'inductance mutuelle L_{12} des enroulements? Pour la déterminer, remarquons que le courant I_2 produit une induction $B^{(2)} = \mu_0 n_2 I_2$ (n_2 étant le nombre de spires du deuxième enroulement par unité de longueur du solénoïde). De ce fait, le flux magnétique produit par le courant I_2 lorsqu'il parcourt une spire du premier enroulement est égal à $SB^{(2)} = \mu_0 n_2 S I_2$. En multipliant cette grandeur par le nombre total N_1 de spires du premier enroulement, nous trouvons le flux Φ_{21} engendré par le courant I_2 et traversant le premier enroulement: $\Phi_{21} = \mu_0 n_2 S N_1 I_2$. La comparaison de cette expression avec la formule $\Phi_{21} = L_{12} I_2$ donne $L_{12} = \mu_0 n_2 N_1 S$. Cette grandeur doit être affectée de signe plus si les courants circulent dans le même sens et de signe moins s'ils parcourent des enroulements dans des sens opposés (cette règle découle du fait que l'expression générale de L_{21} fait intervenir sous le signe d'intégration le produit scalaire des éléments des conducteurs $d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2$). En introduisant dans la formule pour le coefficient d'induction mutuelle $n_2 = N_2/l$ (N_2 étant le nombre de spires du deuxième enroulement), nous obtenons finalement

$$L_{12} = \pm \mu_0 N_1 N_2 S/l = \pm \mu_0 n_1 n_2 V.$$

Nous voyons que *l'induction mutuelle d'un solénoïde à deux enroulements est proportionnelle au produit des nombres de spires des deux enroulements*. Le rapprochement entre la formule de L_{12} et les formules des inductances L_1, L_2 des enroulements montre que

$$|L_{12}| = \sqrt{L_1 L_2}.$$

Cherchons enfin la fonction potentielle des deux courants:

$$U = -\frac{1}{2}(L_1 I_1^2 + 2L_{12} I_1 I_2 + L_2 I_2^2).$$

En y introduisant les formules donnant L_{12} et $L_1 L_2$ et en tenant compte que $\mu_0 n_1 I_1 = B^{(1)}$, $\mu_0 n_2 I_2 = B^{(2)}$, nous obtenons

$$U = -\frac{1}{2\mu_0}(B^{(1)} \pm B^{(2)})^2 V.$$

L'induction magnétique totale étant égale à $B = B^{(1)} \pm B^{(2)}$ (le signe plus correspond au même sens des courants et le signe moins,

aux sens opposés), nous avons en définitive

$$U = -\frac{1}{2\mu_0} B^2 V.$$

C'est la même formule que celles qui ont été obtenues pour la fonction potentielle propre. De plus, on peut démontrer qu'une formule de même type exprime la fonction de force dans tous les cas et pour tous courants, à savoir que U s'exprime toujours sous la forme d'une intégrale du carré de l'induction magnétique:

$$U = -\frac{1}{2\mu_0} \int B^2 \, dV,$$

où l'intégration s'effectue sur tout le volume (le vecteur induction magnétique pouvant varier d'un point à l'autre). Nous voyons d'après ce qui précède que la valeur de U peut être négative ou nulle (mais non positive).

Nous verrons plus loin que cette formule a un sens physique profond: la grandeur $B^2/(2\mu_0)$ peut s'interpréter comme la densité d'énergie du champ magnétique dans le vide.

Indiquons avant de clore ce paragraphe les unités dans le système SI des grandeurs introduites dans le chapitre actuel. Le flux magnétique Φ s'exprime en webers (Wb): 1 Wb = 1 $m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^2$ = = V·s. L'unité d'induction magnétique est le tesla (T): 1 T = = 1 $Wb \cdot m^{-2}$. L'unité d'inductance électrique est le henry (H): 1H = 1 $Wb \cdot A^{-1}$.

FORMULES FONDAMENTALES

Force de Lorentz	$\mathbf{f} = e(\mathbf{E} + [\mathbf{vB}])$
Fréquence cyclotronique	$\omega_c = qB/m$
Force exercée sur un élément de courant dans un champ magnétique	$d\mathbf{F} = I[d\mathbf{lB}]$
Loi de Biot et Savart	$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{[d\mathbf{lr}]}{r^3}$
Force d'interaction des courants	$d\mathbf{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \left[d\mathbf{l}_1 \oint \frac{[d\mathbf{l}_2 \mathbf{r}_{21}]}{r_{21}^3} \right]$
Coefficient d'induction mutuelle de deux contours	$L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2}{r_{21}}$

CHAPITRE 5

INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE ET COURANTS ALTERNATIFS

§ 5.1. Loi de Faraday

Jusqu'ici, en étudiant les phénomènes électriques et magnétiques nous avons supposé implicitement que les champs électrique et magnétique n'étaient aucunement liés l'un à l'autre. Or, une telle hypothèse n'est justifiée que dans le cas où les champs ne varient pas avec le temps. Si les champs ne sont pas constants, ils ne peuvent plus être considérés comme indépendants l'un de l'autre. Le fait est que

toujours un champ magnétique variable produit un champ électrique variable et un champ électrique variable fait naître un champ magnétique variable.

Le premier aspect de cette interdépendance du champ électrique et du champ magnétique se manifeste par le très remarquable phénomène d'*induction électromagnétique*. Ce phénomène, qui a été découvert en 1831 par Faraday, est le suivant : si l'on déplace près d'un conducteur un aimant ou un autre conducteur parcouru par un courant continu, le premier conducteur est parcouru par un courant sans action d'aucune source extérieure. Le courant apparaît aussi dans le cas où l'aimant est immobile et le conducteur est animé d'un mouvement. Enfin, le courant prend naissance dans un conducteur immobile si près de lui est placé un autre conducteur immobile parcouru par un courant variable au lieu du courant continu.

Un aimant et un conducteur parcouru par un courant continu ont ceci de commun que l'un et l'autre produisent autour d'eux un champ magnétique. Ceci permet d'affirmer que l'apparition d'un courant induit dans les expériences sur l'aimant et le courant continu est liée à la présence d'un champ magnétique et à un mouvement relatif du conducteur et du champ.

Dans l'expérience sur un conducteur parcouru par un courant variable il n'existe que le champ magnétique produit par le courant, mais ce champ est variable. En même temps que le courant apparaît un champ électrique. L'expérience sur le courant variable montre manifestement que le champ magnétique variable est entouré d'un champ électrique. Nous verrons plus loin que le phénomène d'induction électromagnétique observé lors d'un mouvement

relatif d'un conducteur et d'un aimant est au fond la même chose, c'est-à-dire la production d'un champ électrique par un champ magnétique variable.

En passant à l'étude de l'induction électromagnétique nous commencerons par le cas où un aimant (ou un conducteur parcouru par un courant continu) est au repos alors qu'un conducteur fermé se déplace dans son champ. La cause d'apparition d'un courant dans

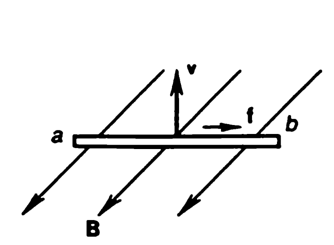


Fig. 5.1. Force de Lorentz **f** exercée sur la charge portée par le conducteur *ab*

Fig. 5.2. Courant induit dans un circuit fermé *ABCD*

un conducteur en mouvement est facile à saisir. En effet, si par exemple un conducteur *ab* (fig. 5.1) se déplace à une vitesse **v** perpendiculairement à un champ magnétique d'induction **B**, la charge *e* portée par le conducteur se déplace sous l'action de la force de Lorentz

$$\mathbf{f} = e\,[\mathbf{vB}]$$

le long du conducteur. Si l'on permet maintenant au conducteur *ab* de glisser librement le long d'un cadre métallique *ABCD* (fig. 5.2), le circuit fermé *abCD* sera parcouru par un courant électrique. Pour calculer l'intensité de ce courant, déterminons d'abord la force électromotrice (f.é.m.) d'induction $\mathscr{E}$. La f.é.m. se détermine toujours par l'intégrale, prise suivant le contour conducteur, de la force $\mathbf{f}/e$ exercée sur une charge unité, c'est-à-dire que

$$\mathscr{E} = \frac{1}{e} \oint_C \mathbf{f}\, d\mathbf{l},$$

où l'intégration s'effectue le long du contour C dans le sens du courant. Ceci donne dans le cas considéré

$$\mathscr{E} = \oint_C [\mathbf{vB}]\, d\mathbf{l},$$

et puisque la seule portion ab du circuit est en mouvement et que $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$ et $\mathrm{d}\mathbf{l} \perp \mathbf{B}$, il est évident que

$$\mathscr{E} = vBl,$$

où l est la longueur de la portion mobile ab de circuit. En divisant $\mathscr{E}$ par la résistance globale R de tout le circuit fermé, nous trouvons d'après la loi d'Ohm l'intensité du courant qui parcourt ce circuit :

$$I = \mathscr{E}/R = vBl/R.$$

L'expression de la f.é.m. ainsi obtenue peut être mise sous une autre forme si l'on remarque que $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, où x est le chemin parcouru par le conducteur ab. En désignant par $S = xl$ la surface du cadre, nous obtenons

$$\mathscr{E} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} BS.$$

Mais BS représente le flux magnétique traversant le cadre conducteur. On peut donc dire que

la f.é.m. d'induction est proportionnelle à la dérivée par rapport au temps du flux magnétique traversant le contour.

Précisons cette conclusion en nous rappelant la définition du flux magnétique. Nous avons convenu d'entendre par flux magnétique traversant un contour C une intégrale de surface

$$\Phi = \int_{\Sigma} \mathbf{B}\,\mathrm{d}\mathbf{s},$$

où l'intégration s'effectue sur une surface quelconque Σ s'appuyant sur le contour C, l'élément de surface $\mathrm{d}\mathbf{s}$ étant supposé orienté de telle sorte que sa direction et celle de parcours du contour C forment un système à droite. C'est pourquoi, en déterminant le flux magnétique à travers le cadre dont le sens de parcours est celui du courant induit, nous devons couvrir sa surface, par exemple, par un plan et considérer que la normale $\mathbf{n}$ à sa surface traverse le plan de la figure d'avant en arrière. L'induction magnétique $\mathbf{B}$ étant dirigée perpendiculairement au plan de la figure, d'arrière en avant, nous obtenons pour le flux magnétique l'expression suivante : $\Phi = \mathbf{BS} = -BS$. La f.é.m. d'induction peut donc se mettre sous la forme

$$\mathscr{E} = -\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t.$$

Ainsi,

la f.é.m. d'induction est égale à la dérivée par rapport au temps, changée de signe, du flux magnétique traversant le contour conducteur.

Le signe moins dans cette formule signifie que le sens du courant induit est tel que

le champ magnétique qu'il produit tend à s'opposer à la variation du flux magnétique qui lui a donné naissance (*loi de Lenz*).

Nous avons déterminé la f.é.m. pour un cadre rectangulaire, mais la formule obtenue pour la f.é.m. reste également valable dans le cas général de tout contour conducteur animé de n'importe quel mouvement dans un champ magnétique constant et pouvant se déformer. La f.é.m. d'induction est toujours égale à la dérivée par rapport au temps, changée de signe, du flux magnétique traversant le contour, et le courant induit tend toujours à s'opposer, par le champ magnétique qu'il produit, à la variation du flux magnétique extérieur qui lui a donné naissance.

Jusqu'ici nous avons supposé que le contour conducteur était en mouvement alors que l'aimant (ou le conducteur parcouru par un courant continu) était immobile. Mais on peut également laisser au repos le contour conducteur et ne déplacer que l'aimant (ou un autre conducteur parcouru par un courant continu); dans ce cas le contour sera également le siège d'un courant induit. De plus, la f.é.m. d'induction se détermine toujours par la formule $\mathcal{E} = -d\Phi/dt$, où Φ est le flux magnétique traversant le contour qui est dans ce cas immobile.

Ainsi,

pour produire une f.é.m. d'induction il faut seulement que varie dans le temps le flux magnétique embrassé par un contour conducteur, que ce contour soit au repos ou en mouvement. La f.é.m. d'induction est toujours proportionnelle à la dérivée de ce flux par rapport au temps.

C'est le sens de la *loi générale de l'induction électromagnétique* découverte par Faraday.

§ 5.2. Relativité des champs électrique et magnétique

Comment peut-on expliquer le phénomène d'induction électromagnétique dans le cas d'un conducteur immobile ? Si le conducteur est en mouvement et l'aimant est immobile, nous avons lié le passage du courant dans le conducteur à l'action de la force de Lorentz e [$\mathbf{vB}$]. Mais si le conducteur est immobile, cette force n'existe pas et une question se pose : pourquoi le courant parcourt-il le conducteur ? Si le conducteur est immobile, ses charges ne peuvent subir que l'action d'un champ électrique, ce qui nous conduit à la conclusion que dans ce cas le conducteur doit devenir le siège d'un champ électrique induit. Le champ électrique doit être produit lors du mouvement de l'aimant, c'est-à-dire qu'il est engendré par un champ magnétique variable.

La f.é.m. agissant dans un contour s'exprime toujours sous la forme de l'intégrale de contour de la force exercée sur une charge unité. Ceci signifie que la f.é.m. d'induction $\mathscr{E}$ agissant dans un contour immobile C doit avoir la forme suivante :

$$\mathscr{E} = \oint_C \mathbf{E}\, d\mathbf{l},$$

où **E** est l'intensité du champ électrique produit dans le contour immobile par le champ magnétique variable engendré par l'aimant en mouvement, et l'intégration s'effectue le long du contour conducteur dans le sens qui est celui du courant induit.

Ainsi nous sommes arrivés à l'énoncé suivant de la loi de l'induction électromagnétique dans le cas d'un conducteur immobile :

la circulation du champ électrique induit dans un contour conducteur par un champ magnétique variable est égale à la dérivée, par rapport au temps changée de signe, du flux magnétique traversant ce contour :

$$\oint_C \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = -d\Phi/dt,$$

les vecteurs d**l** et d**s** formant un système à droite.

Fixons notre attention sur la circonstance suivante. La circulation du champ électrique qui prend naissance lors de l'induction électromagnétique peut être différente de zéro (à condition que soit non nulle la variation du flux magnétique à travers le contour), alors que la circulation d'un champ électrostatique est toujours nulle. Autrement dit,

le champ électrique qui apparaît lors de l'induction électromagnétique est un champ rotationnel et non pas un champ potentiel.

Revenons maintenant à l'expression de la f.é.m. d'induction. Dans le cas d'un conducteur en mouvement elle se détermine par la formule

$$\mathscr{E} = \int_C [\mathbf{vB}]\, d\mathbf{l},$$

et dans le cas d'un conducteur immobile, par la formule

$$\mathscr{E} = \oint_C \mathbf{E}\, d\mathbf{l}.$$

D'après leur aspect extérieur ce sont deux formules tout à fait différentes, aucunement liées l'une à l'autre. On peut donc avoir l'impression que pour expliquer les phénomènes d'induction électromagnétique dans le cas d'un conducteur en mouvement et d'un aimant au repos, d'une part, et dans le cas d'un conducteur immo-

bile et d'un aimant en mouvement, d'autre part, il faut recourir à des approches différentes du problème et se servir des formules différentes. Or, le phénomène est le même dans les deux cas, car le mouvement est, par son essence, toujours relatif et il est absolument indifférent qu'on anime d'un mouvement un conducteur ou un aimant.

Pourtant une telle impression ne correspond pas à la réalité, et les deux formules de la f.é.m. différentes de forme sont au fond identiques. Le fait est que le champ électrique et le champ magnétique constituent un tout unique appelé *champ électromagnétique* et la séparation de ce champ unique en champ électrique et en champ magnétique a un caractère relatif; autrement dit, cette séparation se fait différemment dans différents systèmes de référence. Pour nous en assurer, reportons-nous à l'équation du mouvement d'une particule chargée dans les champs électrique et magnétique:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = e(\mathbf{E} + [\mathbf{v}\mathbf{B}]).$$

Cette équation, de même que l'équation du mouvement de Newton, doit être valable dans tout système de référence inertiel. Pourtant lorsqu'on passe d'un système inertiel à un autre, la vitesse de la particule varie, alors que son accélération reste inchangée. Il en résulte que le premier membre de l'équation reste inchangé. Quant à son second membre, il variera si seulement le champ ne subit pas une variation correspondante.

Ainsi, si l'équation écrite se rapporte à un système K, elle aura dans un système K' la forme suivante:

$$m\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = e(\mathbf{E}' + [\mathbf{v}'\mathbf{B}']),$$

où le prime sert à désigner les grandeurs dans le système K'. La grandeur $\mathbf{v}'$ est liée à $\mathbf{v}$ par la loi de composition des vitesses: $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}$ ($\mathbf{V}$ étant la vitesse du système K' par rapport à K). Puisque l'accélération est la même dans les deux systèmes, nous pouvons écrire la relation suivante

$$\mathbf{E} + [\mathbf{v}\mathbf{B}] = \mathbf{E}' + [\mathbf{v}'\mathbf{B}'],$$

qui doit être vérifiée quelles que soient les valeurs de $\mathbf{v}$ et de $\mathbf{V}$. On peut en déduire la liaison entre les grandeurs accentuées et non accentuées.

Il faut cependant avoir en vue qu'en réalité les vitesses $\mathbf{v}$ et $\mathbf{V}$ ne peuvent pas prendre des valeurs quelconques parce que la loi de composition des vitesses et l'équation du mouvement initiale ne sont valables que pour des vitesses petites devant c. Aussi, la relation écrite ne permet-elle de trouver la liaison entre les champs dans les systèmes K et K' que dans le cas des faibles $\mathbf{V}$, c'est-à-dire pour

$V \ll c$. Cette liaison est de la forme

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + [\mathbf{VB}]; \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - [\mathbf{VE}].$$

(Au chapitre 7 cette formule sera généralisée au cas des vitesses quelconques.)

Il ressort de ces formules que si dans le système K le champ électrique est nul et le champ magnétique est différent de zéro, dans le système K' c'est le champ électrique qui est non nul (si seulement $[\mathbf{VB}] \neq 0$).

C'est pourquoi, si un conducteur se déplace par rapport à un aimant, dans le système de référence lié au conducteur il existe un champ électrique $\mathbf{E}' = [\mathbf{vB}]$, et puisque dans ce cas la f.é.m. d'induction s'exprime par

$$\mathscr{E} = \oint_C [\mathbf{vB}]\, d\mathbf{l},$$

on peut la mettre sous la forme

$$\mathscr{E} = \oint_C \mathbf{E}'\, d\mathbf{l}.$$

Mais c'est la même formule que celle obtenue pour la f.é.m. d'induction dans le cas d'un conducteur immobile. Ainsi, la f.é.m. d'induction est toujours égale à la circulation du champ électrique dans le système de référence lié au conducteur, c'est-à-dire dans le système où le conducteur est immobile. Quant à la valeur de cette circulation, la loi de l'induction électromagnétique affirme qu'elle se détermine toujours par la variation totale du flux magnétique traversant le contour.

§ 5.3. Générateurs de courant d'induction

Le phénomène d'induction électromagnétique peut être utilisé pour la réalisation de *générateurs de courant*. Le plus simple est le *générateur à courant alternatif* (appelé alternateur) dont le fonctionnement est basé sur le fait qu'un cadre conducteur animé d'une rotation uniforme dans un champ magnétique constant devient le siège d'une f.é.m. induite à variation sinusoïdale dans le temps. En effet, si le champ magnétique est uniforme, le cadre est traversé par un flux magnétique

$$\Phi = \mathbf{BS} = BS \cos \vartheta,$$

où $\mathbf{B}$ est l'induction magnétique, S, l'aire de la surface du cadre et ϑ, l'angle que $\mathbf{B}$ fait avec la normale au cadre. Lorsque le cadre est animé d'un mouvement de rotation uniforme à vitesse angulaire ω, nous avons $\vartheta = \omega t + \vartheta_0$ (ϑ_0 étant la valeur initiale de ϑ) et

$$\Phi = BS \cos (\omega t + \vartheta_0).$$

La f.é.m. d'induction que nous désignons ici par $e(t)$ est liée au flux Φ par la loi de Faraday :

$$e(t) = -d\Phi/dt.$$

En y introduisant l'expression de Φ, nous obtenons

$$e(t) = BS\omega \sin(\omega t + \vartheta_0).$$

Ainsi, lorsqu'un cadre (ou une spire) tourne uniformément dans un champ magnétique constant, il devient le siège d'une f.é.m. périodiquement variable dans le temps suivant une loi sinusoïdale. La période de variation de la f.é.m. est de toute évidence $T = 2\pi/\omega$, et son amplitude $\mathcal{E}_m$ se détermine, dans le cas d'un champ uniforme, par le produit de l'induction par la fréquence et par la surface du cadre : $\mathcal{E}_m = BS\omega$. Pour transmettre à un circuit extérieur la f.é.m. induite dans une spire, il suffit de relier les extrémités de cette spire à deux bagues tournant avec la spire et de relier le circuit extérieur aux bagues à l'aide de deux contacts à balai.

Comme il a été expliqué plus haut, pour obtenir une f.é.m. d'induction ce n'est pas nécessairement le conducteur qui doit se mouvoir, on peut y aboutir avec le même succès, en laissant le conducteur au repos mais en animant d'un mouvement la source de champ magnétique. C'est précisément selon ce principe que fonctionnent tous les générateurs à courant alternatif de grande puissance modernes (*alternateurs synchrones*). De tels alternateurs sont destinés à produire principalement un *courant* dit *triphasé* dont l'utilisation offre plusieurs avantages.

On appelle courant triphasé un système de trois courants sinusoïdaux déphasés entre eux d'un angle de $2\pi/3$.

A amplitude égale, les valeurs instantanées de ces courants ont pour expressions

$$i_1 = I \sin \omega t, \quad i_2 = I \sin \left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right), \quad i_3 = I \sin \left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right),$$

où I est l'amplitude du courant, ω, sa fréquence. Il est facile de vérifier par un calcul direct que la somme de ces courants est nulle : $i_1 + i_2 + i_3 = 0$.

C'est à cette égalité qu'est lié le principal avantage du courant triphasé. Le fait est que l'emploi de trois courants continus exige d'utiliser six conducteurs : deux conducteurs pour chaque courant. Si la somme des courants est nulle, on peut utiliser seulement trois conducteurs.

Dans les générateurs de courant électrique ordinaires la f.é.m. d'induction se développe dans des conducteurs métalliques solides qui sont entraînés en rotation dans un champ magnétique à l'aide de moteurs mécaniques. Mais un générateur de courant peut aussi

être réalisé suivant un autre principe en utilisant comme organe de travail non pas un conducteur métallique solide mais un gaz ionisé. Un tel générateur est dit *magnétohydrodynamique* (en abrégé, *générateur M.H.D.*).

Les générateurs à courant continu et à courant alternatif que nous venons de considérer possèdent une importante *propriété de réversibilité*: si l'on applique au générateur une tension extérieure convenable, sa partie mobile se mettra en rotation. Ainsi, le générateur peut en principe fonctionner en moteur. Nous n'allons pas nous étendre sur ce sujet.

§ 5.4. F.é.m. d'induction mutuelle et d'autoinduction

Considérons deux contours conducteurs et supposons que dans l'un d'eux, par exemple, dans le premier, agisse une certaine f.é.m. extérieure $e_1^{(c)}(t)$ dépendant du temps. Dans ce cas, le courant i_1 parcourant le premier contour est lui aussi dépendant du temps. Le champ magnétique $\mathbf{B}^{(1)}$ produit par ce courant dépend lui aussi du temps ainsi que le flux magnétique Φ_{21} traversant le deuxième contour et engendré par le courant du premier contour. Ceci signifie que dans le deuxième contour est développée une f.é.m. d'induction

$$e_{21}(t) = -\,\mathrm{d}\Phi_{21}/\mathrm{d}t.$$

Cette f.é.m. est appelée *f.é.m. d'induction mutuelle.*

Nous avons montré au chapitre 4 que $\Phi_{21} = L_{21}i_1$, où L_{21} est l'inductance mutuelle des contours. En toute rigueur, cette formule est valable pour un courant continu mais elle peut être utilisée également dans le cas d'un courant variable si sa variation est suffisamment lente (on parle alors d'un *courant quasi stationnaire*) ; il faut que le temps au cours duquel le courant subit une variation appréciable soit grand par rapport au temps mis par la lumière pour passer d'un contour à l'autre ainsi que pour parcourir une distance de l'ordre des dimensions des contours. Nous supposerons que cette condition est réalisée. (Remarquons que si les contours peuvent se déplacer et varier en forme et en dimensions, il convient de dériver tout le produit $L_{21}i_1$.)

La f.é.m. d'induction mutuelle $e_{21}(t)$ fera naître dans le deuxième contour un courant i_2 qui sera variable de même que le courant i_1. Ce courant développera à son tour dans le premier contour une f.é.m. d'induction mutuelle

$$e_{12}(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_{12} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(L_{12}i_2).$$

En plus de e_{21} et e_{12}, les contours seront encore le siège de deux f.é.m. d'induction dues à la variation de leurs flux magnétiques propres. En effet, les flux magnétiques propres Φ_{11} et Φ_{22} produits par

les courants i_1 et i_2 dans les contours correspondants sont proportionnels à ces courants:

$$\Phi_{11} = L_1 i_1, \quad \Phi_{22} = L_2 i_2$$

(L_1 et L_2 étant les inductances des contours). Ceci signifie qu'ils varient dans le temps et donc font apparaître dans les contours les f.é.m. d'induction

$$e_{11} = -\frac{d\Phi_{11}}{dt} = -\frac{d}{dt}(L_1 i_1).$$

$$e_{22} = -\frac{d\Phi_{22}}{dt} = -\frac{d}{dt}(L_2 i_2).$$

Ces f.é.m. sont appelées *f.é.m. d'autoinduction* (on dit encore f.é.m. de self-induction ou d'induction propre). Si les dimensions et les formes des contours ne subissent pas de variations, les valeurs de L restent constantes, dans le cas contraire, il faut tenir compte de la variation de L.

Ainsi, la f.é.m. résultante agissant dans le premier contour est

$$e_1 = e_1^{(e)} + e_{11} + e_{12} = e_1^{(e)} - \frac{d}{dt}(L_1 i_1) - \frac{d}{dt}(L_{12} i_2),$$

et dans le deuxième contour:

$$e_2 = -\,d\,(L_2 i_2)/dt - d\,(L_{21})/dt.$$

§ 5.5. Bêtatron

Comme il a déjà été dit aux paragraphes précédents, l'apparition d'un courant induit est au fond un effet secondaire, l'effet primaire étant la production d'un champ électrique rotationnel par un champ magnétique variable. Pour s'en assurer directement il convient de modifier l'expérience qui met en évidence le phénomène d'induction électromagnétique de telle sorte qu'elle n'utilise aucun conducteur et ne fait intervenir que des charges libres. Alors, si un champ magnétique variable développe effectivement autour de lui un champ électrique rotationnel, les charges libres doivent être accélérées par ce champ. C'est un tel processus qui se déroule dans un bêtatron où les électrons libres tournent suivant une orbite circulaire traversée par un flux magnétique variable.

Proposons-nous de montrer comment on peut déterminer le champ électrique d'accélération dans un bêtatron. A cet effet, il convient d'appliquer la loi de l'induction électromagnétique

$$\oint_C \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Mais avant de le faire, il faut déterminer ce qu'on doit entendre par contour C dans un bêtatron parce que ce dernier ne comporte pas de contour conducteur ordinaire qu'on utilisait dans les expériences sur l'induction. Par C il faut entendre toujours un contour matériel, c'est-à-dire un contour constitué par des

particules déterminées ou par des éléments de milieu. Dans le cas du bêtatron nous prendrons comme particules les électrons accélérés, si bien que le contour C sera constitué par leur trajectoire circulaire.

Dans le bêtatron, le vecteur induction magnétique **B** est perpendiculaire au plan de la trajectoire et est fonction tant du temps t que de la distance r au centre de la trajectoire: $\mathbf{B} = \mathbf{B}(r, t)$. Le flux magnétique traversant la trajectoire se détermine donc par la formule

$$\Phi = \int B\,ds = \int_0^R B(r, t)\, 2\pi r\, dr,$$

où R est le rayon de l'orbite circulaire de l'électron.

Les lignes de force du champ électrique **E** induit dans le bêtatron sont évidemment des circonférences concentriques à l'orbite circulaire de l'électron, et l'intensité du champ dépend aussi bien de r que de t. C'est pourquoi la circulation du champ électrique le long de cette orbite est égale à $2\pi ER$. En égalant à $d\Phi/dt$ cette circulation, nous trouvons le champ électrique d'accélération agissant sur l'orbite de l'électron

$$E = \frac{1}{2\pi R}\frac{d}{dt}\int_0^R B(r, t)\, 2\pi r\, dr = \frac{R}{2}\langle \dot{B}(t)\rangle,$$

où

$$\langle B(t)\rangle = \frac{\Phi}{\pi R^2} = \frac{2}{R^2}\int_0^B B(r, t)\, r\, dr.$$

Il est évident que cette grandeur a le sens de la moyenne de l'induction sur la surface limitée par l'orbite. C'est la dérivée par rapport au temps de l'induction moyenne qui détermine le champ accélérateur.

L'électron est accéléré par le champ électrique E, et son impulsion p (dirigée le long de la trajectoire) varie suivant la loi

$$\frac{dp}{dt} = eE = \frac{eR}{2}\langle \dot{B}(t)\rangle.$$

Il en résulte que

$$p \equiv p(t) = \frac{eR}{2}(\langle B(t)\rangle - \langle B(0)\rangle) + p_0,$$

où p_0 est la valeur initiale de l'impulsion. Ainsi, l'impulsion de l'électron croît proportionnellement à l'induction magnétique moyenne. Dans ces conditions, si $\Delta\langle B\rangle$ est l'accroissement de l'induction magnétique moyenne pendant une période de révolution de l'électron, l'impulsion de l'électron augmente pendant chaque cycle d'accélération d'une quantité égale à $\Delta p = (eR/2)\Delta\langle B\rangle$.

Regardons maintenant comment le mouvement de l'électron peut être rendu circulaire. Plus exactement, peut-on rendre le mouvement de l'électron circulaire en utilisant le même champ magnétique $\mathbf{B}(r, t)$ qui sert à l'accélération de l'électron?

De la part du champ $\mathbf{B}(r, t)$ l'électron subit l'action de la force de Lorentz égale à $evB(r, t)$ et dirigée vers le centre de l'orbite. Si l'électron suit une orbite circulaire de rayon R, nous devons donc égaler cette force au produit de la masse m de l'électron par l'accélération centripète v^2/R, c'est-à-dire que $mv^2/R =$

$= evB(R, t)$, d'où

$$mv = p(t) = eRB(R, t),$$

où $B(R, t)$ est la valeur instantanée de l'induction magnétique sur l'orbite.

Ainsi, pour qu'un électron se déplace dans un champ magnétique variable suivant une circonférence, il faut que son impulsion varie proportionnellement à l'induction de champ magnétique sur l'orbite. D'un autre côté, nous avons déjà déterminé comment l'impulsion de l'électron varie en fonction de l'accélération. Nous pouvons donc comparer les deux formules qui doivent donner le même résultat, c'est-à-dire que

$$\frac{eR}{2}(\langle B(t)\rangle - \langle B(0)\rangle) + p_0 = eRB(R, t).$$

En posant $p_0 = \frac{1}{2} eR \langle B(0)\rangle$, nous obtenons la relation suivante:

$$\langle B(t)\rangle = 2B(R, t)$$

qui exprime précisément la *condition d'existence de l'orbite circulaire de l'électron dans un bêtatron*. Nous voyons que cette condition exige que l'induction magnétique moyenne soit deux fois plus grande que l'induction magnétique sur l'orbite.

Le bêtatron permet d'accélérer les électrons à de très hautes énergies de l'ordre de plusieurs centaines de millions d'électrons-volts mais pour l'obtention des énergies encore plus élevées il est inapplicable principalement à cause de l'effet de rayonnement.

§ 5.6. Inductance et capacité dans un circuit à courant alternatif

La simplicité de production du courant alternatif, la facilité de sa transformation et la possibilité de conversion de son énergie en travail mécanique lui ont valu un emploi pratique extrêmement répandu. En passant à l'étude des lois qui régissent ces courants, nous commencerons par examiner le rôle joué par l'inductance. Considérons un contour conducteur comportant une f.é.m. alternative ou soumis à une tension alternative extérieure. Dans le cas d'une f.é.m. continue l'intensité de courant serait égale à $\mathcal{E}/R$, où R est la résistance du contour. Mais si une f.é.m. $e(t)$ ou une tension $u(t)$ sont alternatives, le courant traversant le contour sera lui aussi alternatif et fera donc naître dans le contour une f.é.m. additionnelle, à savoir la f.é.m. d'autoinduction $-L\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$, si bien que le contour sera soumis à une f.é.m. résultante $e(t) - L\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$. L'intensité de courant i sera déterminée par l'équation $i = (e(t) - L\mathrm{d}i/\mathrm{d}t)/R$ ou

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = e(t).$$

A cette équation correspond le schéma du circuit à inductance L et à résistance R représenté par la figure 5.3. On peut dire que la tension $u \equiv e(t)$ se décompose en deux termes: $u_R = Ri$ et $u_L = L(\mathrm{d}i/\mathrm{d}t)$ qui constituent les tensions aux bornes de la résis-

tance et de l'inductance: $u = u_R + u_L$. Certes, en réalité on ne peut toujours séparer u en u_R et u_L. Mais si le circuit présente un rhéostat à faible inductance et une bobine de forte inductance, les différences de potentiel aux bornes du rhéostat et de la bobine sont égales à u_R et u_L. Pour que le rhéostat ne possède qu'une faible inductance il convient de le réaliser en *enroulement bifilaire*. Dans ce cas les courants opposés se trouvent partout l'un près de l'autre, si bien que leurs champs magnétiques se compensent presque entièrement.

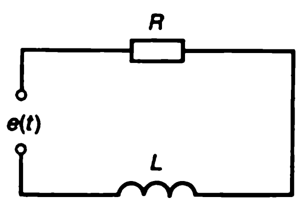


Fig. 5.3. Montage en série d'une résistance et d'une inductance

L'équation que nous avons obtenue pour la détermination de l'intensité de courant est une équation différentielle non homogène du premier ordre à second membre connu. La solution des équations de ce type est la somme d'une solution particulière de l'équation non homogène et de la solution générale de l'équation homogène (sans second membre), cette somme est choisie de façon à satisfaire aux conditions initiales. Par exemple, dans le cas d'une f.é.m. continue $e(t) = \mathscr{E}$ il est naturel de prendre comme solution particulière $i_1 = \mathscr{E}/R$, c'est-à-dire l'intensité du courant donnée par la loi d'Ohm ; quant à la solution générale de l'équation homogène, elle est de la forme $i = C^{te} \cdot e^{-t/\tau}$, où $\tau = L/R$ est appelée *constante de temps du contour*. En prenant pour l'instant initial $t = 0$ le moment où $i = 0$, nous obtenons $C^{te} = -\mathscr{E}/R$ et par conséquent

$$i = \frac{\mathscr{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau}).$$

Le second terme entre parenthèses devient petit au bout d'un temps de l'ordre de plusieurs τ; nous pouvons dire que la « mémoire » sur la valeur initiale du courant s'efface au bout d'un temps caractérisé par la constante du contour.

Considérons maintenant le cas où le circuit est soumis à une tension sinusoïdale $u(t) = U \cos \omega t$ (U étant l'amplitude et ω la fréquence). Pour trouver dans ce cas une solution particulière il est commode d'appliquer une *méthode* dite *complexe* dans laquelle le courant est cherché sous la forme de $i(t) = \mathrm{Re}\, I e^{i\omega t}$, où I est une certaine constante complexe appelée *amplitude complexe de courant*. En posant $u(t) = \mathrm{Re}\, U e^{i\omega t}$ et en tenant compte que l'équation différentielle du courant est linéaire, on peut évidemment omettre dans cette équation le signe Re et écrire

$$L \frac{d}{dt}(I e^{i\omega t}) + RI e^{i\omega t} = U e^{i\omega t}.$$

Nous en tirons

$$I = U/Z; \; Z = R + i\omega L \qquad (i \equiv \sqrt{-1}).$$

La grandeur Z est appelée *résistance apparente* (on dit aussi *impédance*) du circuit. (Pour ce qui est de la solution de l'équation homogène, nous ne l'indiquons pas parce qu'elle s'annule pendant un temps de l'ordre de quelques τ.)

Considérons les relations énergétiques dans le circuit considéré. Il est évident que la source de f.é.m. fournit au circuit pendant un temps dt une énergie égale à $ui dt$. En utilisant l'équation différentielle du courant, nous pouvons mettre cette grandeur sous la forme

$$ui\,\mathrm{d}t = \left(L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri\right) i\,\mathrm{d}t = Ri^2\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}Li^2\right).$$

Le premier terme exprime ici la chaleur Joule dégagée pendant le temps $\mathrm{d}t$, et le second terme traduit la variation pendant le temps $\mathrm{d}t$ de l'énergie magnétique du circuit. Le produit Ri^2 est toujours positif alors que la grandeur $\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)/\mathrm{d}t$ peut avoir les deux signes. Si $i = I\cos(\omega t - \varphi)$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) = -\frac{1}{2}\omega LI^2\sin(2\omega t - 2\varphi).$$

Cette expression a une valeur négative aux premier et troisième quarts de période de variation du courant et une valeur positive aux deuxième et quatrième quarts. Ceci signifie qu'au cours du deuxième quart de période l'énergie magnétique s'accumule dans le circuit, mais pendant le troisième quart de période elle est restituée à la source de f.é.m. extérieure. Cette énergie s'accumule de nouveau dans le circuit pendant le quatrième quart pour être restituée à la source de f.é.m. au cours du premier quart.

Ainsi, *l'énergie magnétique passe continuellement de la source de f.é.m. au circuit et inversement du circuit à la source de f.é.m., sa valeur moyenne pendant une période de courant* (et même pendant la moitié de cette période) *étant nulle.*

A la différence du courant continu le courant alternatif peut circuler dans un circuit comportant un condensateur monté en série. Ceci est lié à l'apparition d'une charge variable sur les armatures du condensateur. Examinons d'abord le cas le plus simple où l'inductance du circuit est négligeable, si bien que le schéma de ce circuit est celui de la figure 5.4. Ici, R est la résistance du circuit, C, la capacité du condensateur. La tension extérieure appliquée u est évidemment égale à la somme des tensions u_R et u_C aux bornes de la résistance et du condensateur : $u = u_R + u_C$. Il est clair que $u_R = iR$ et $u_C = q/C$, où i est l'intensité du courant et q, la charge portée par l'armature du condensateur. Nous pouvons donc écrire $u = Ri + q/C$ et, en utilisant la relation évidente $i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$,

$$R\,\mathrm{d}q/\mathrm{d}t + q/C = u.$$

Cette équation différentielle permet de calculer la charge q et par là même l'intensité du courant i. Supposons que le circuit est soumis à une tension sinusoïdale $u = \mathrm{Re}\, Ue^{i\omega t}$. Alors, en utilisant les notations complexes, il est aisé de s'assurer qu'une solution parti-

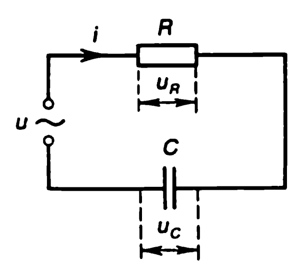


Fig. 5.4. Montage en série d'une résistance et d'une capacité

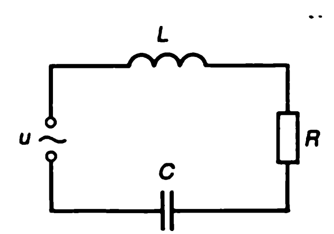


Fig. 5.5. Montage en série d'une résistance, d'une inductance et d'une capacité

culière de l'équation sera $q = \mathrm{Re} Qe^{i\omega t}$, où $Q = U\,(i\omega R + C)^{-1}$. Corrélativement, le courant sera donné par la formule $i = \mathrm{Re} Ie^{i\omega t}$, où

$$I = U/Z, \quad Z = R + 1/(i\omega C).$$

Un tel courant (et une telle charge) s'établira dans le circuit pendant un temps de l'ordre de plusieurs constantes de temps $\tau = RC$. La grandeur Z représente évidemment l'impédance du circuit considéré.

Après avoir établi comment se comportent l'inductance et la capacité prises séparément, lors du passage d'un courant alternatif, on peut calculer tout circuit soumis à une tension sinusoïdale. Il faut seulement avoir en vue que les éléments constitutifs principaux de tout circuit sont la résistance R, l'inductance L et la capacité C et que leurs impédances respectives sont R, $i\omega L$, $1/(i\omega C)$. Chacun des circuits est composé de ces éléments qui peuvent être montés en série ou en parallèle. Les impédances des portions mises en série s'ajoutent ($Z = Z_1 + Z_2 + \ldots$) parce qu'elles sont parcourues par un courant commun. Dans le cas des impédances montées en parallèle c'est la tension qui est commune, de sorte que sont additionnées les inverses des impédances ($1/Z = 1/Z_1 + 1/Z_2 + \ldots$). Dans le cas le plus simple du circuit représenté par la figure 5.5, $Z = R + i\omega L + 1/(i\omega C)$.

L'amplitude du courant I en fonction de la fréquence est représentée par la courbe de la figure 5.6. L'amplitude du courant s'annule pour $\omega = 0$ et $\omega \to \infty$ et atteint sa valeur maximale à la fréquence de résonance $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. La largeur de ce maximum $\Delta\omega \sim R/L$, la valeur maximale du courant $I_{max} = U/R$; aussi, le

maximum sera-t-il très aigu si la résistance R est faible. La résonance dans un tel circuit est appelée *résonance de tension* (on dit aussi *résonance série* ou *résonance* tout court).

L'impédance du circuit schématisé par la figure 5.7 a pour expression

$$Z = \frac{(R_L + i\omega L)(R_C + 1/(i\omega C))}{R_L + R_C + i\omega L + 1/(i\omega C)}.$$

Si les deux résistances sont petites ($R_{L,C} \ll \sqrt{L/C}$), elles peuvent être négligées au numérateur (mais non pas au dénominateur !) de cette expression ; en notant $R = R_L + R_C$, nous obtenons

$$Z = \frac{L/C}{R + i\omega L + 1/(i\omega C)}.$$

La courbe de variation de l'amplitude de tension $|U|$ en fonction de la fréquence (à I donné) prend dans ce cas la même allure que la

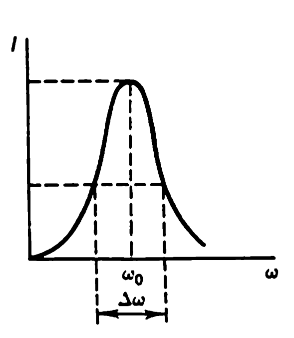


Fig. 5.6. Courbe caractéristique amplitude-fréquence d'un circuit oscillant

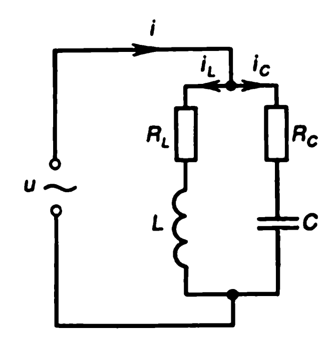


Fig. 5.7. Circuit oscillant le plus simple

courbe représentative de l'amplitude du courant $|I|$ (à U donnée) dans le circuit de la figure 5.5 (v. fig. 5.6). La tension passe par son maximum à la même fréquence de résonance $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$; on dit dans ce cas que le circuit est en *résonance de courants* (on dit encore *résonance parallèle* ou *antirésonance*). On se rend facilement compte que si $R \to 0$, on peut poser à la résonance de courants $I = 0$, $U = 0$; dans ce cas les courants I_L, I_C dans les deux branches du circuit conservent leurs valeurs finales. Ceci signifie que pour $R \to 0$ on peut débrancher la source de tension extérieure et le circuit constitué par une capacité et une inductance sera parcouru par un courant alternatif de fréquence ω_0. C'est à l'étude d'un tel circuit appelé *circuit oscillant* que nous passons maintenant.

§ 5.7. Circuit oscillant

Proposons-nous d'étudier tout d'abord comment se produit la décharge d'un condensateur non pas dans une simple résistance mais à travers une bobine d'inductance présentant une certaine résistance. Autrement dit, examinons le circuit représenté par la figure 5.5 ou 5.7 qui ne comporte aucune source de f.é.m. alternative extérieure, mais dont le condensateur possède à l'instant initial une certaine charge q_0. Quelle sera la charge du condensateur $q(t)$ à des instants suivants et quel sera le courant $i(t)$ circulant dans ce circuit? Le circuit est le siège d'une f.é.m. d'autoinduction $-L\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$, si bien que $-L\mathrm{d}i/\mathrm{d}t = Ri + u_C$, où $u_C = q/C$ est la tension entre les armatures du condensateur. En tenant compte que $i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$, nous obtenons pour la détermination de la charge $q(t)$ l'équation différentielle suivante:

$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}q=0.$$

A la différence des équations non homogènes, que nous avons rencontrées plus haut, cette équation est une équation homogène du deuxième ordre. Il convient de chercher une solution de cette équation sous la forme $q(t) = Ae^{st}$, où s et A sont des constantes. L'introduction de cette expression dans l'équation de q donne $Ls^2 + Rs + 1/C = 0$, d'où nous obtenons deux valeurs de s:

$$s_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}.$$

Ainsi, la solution générale de cette équation est de la forme

$$q(t)=A_1e^{s_1t}+A_2e^{s_2t},$$

où A_1 et A_2 sont des constantes qui se déterminent par les conditions initiales. A l'instant initial $t = 0$, la charge $q(t)$ a la valeur donnée q_0, et le courant initial doit être considéré comme étant nul, sinon une f.é.m. d'autoinduction infiniment grande prendrait naissance à l'instant de mise en circuit du condensateur. Ainsi

$$q(0)=q_0,\quad i(0)=\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0}=0.$$

A partir de ces relations on peut calculer A_1 et A_2.

Pour $R < 2\sqrt{L/C}$, les quantités s_1 et s_2 seront des nombres complexes conjugués. En les écrivant sous la forme

$$s_{1,2}=-\gamma\pm i\omega_0',\quad \gamma=R/(2L),\ \omega_0'=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2},\quad \omega_0=1/\sqrt{LC},$$

nous obtenons les expressions suivantes pour l'intensité de courant et la charge :

$$i(t) = -\left(1 + \frac{\gamma^2}{\omega_0'^2}\right) \omega_0' q_0 e^{-\gamma t} \sin \omega_0' t \; ;$$

$$q(t) = \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\omega_0'^2}}\, q_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_0' t + \varphi),$$

où $\mathrm{tg}\, \varphi = \gamma/\omega_0'$. Nous voyons que la charge et le courant s'affaiblissent avec le temps, mais cet affaiblissement n'est pas monotone. Cet affaiblissement ou l'amortissement s'effectue suivant une loi exponentielle $\exp(-\gamma t)$, où la grandeur γ est appelée *coefficient*

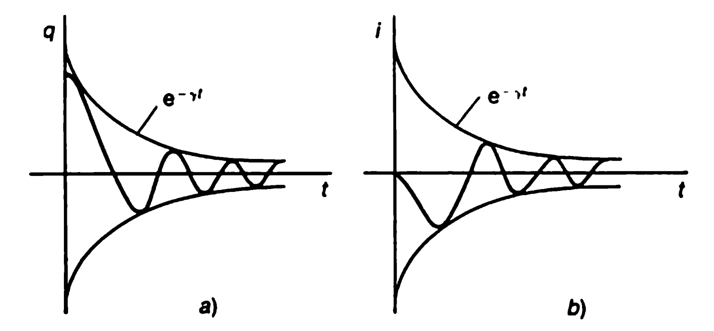


Fig. 5.8. Variations de la charge (*a*) et du courant (*b*) en fonction du temps en régime périodique

d'affaiblissement ou *constante d'affaiblissement* ou *facteur d'amortissement*. Ce coefficient est proportionnel à la résistance du circuit. La grandeur $\delta = 2\pi\gamma/\omega_0'$ porte le nom de *décrément logarithmique d'oscillations*. Les fonctions sinusoïdales intervenant dans les expressions de $i(t)$ et de $q(t)$ ont pour période

$$T' = \frac{2\pi}{\omega_0'} = 2\pi \sqrt{\frac{LC}{1 - R^2C/L}} .$$

La variation de la charge et du courant en fonction du temps est représentée graphiquement sur les figures 5.8, *a* et *b*.

Si la résistance R est faible, le décrément logarithmique l'est également et le circuit est le siège des oscillations presque non amorties, d'amplitudes constantes. Dans le cas limite où $R \to 0$, la fréquence d'oscillations coïncide avec la fréquence de résonance $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et $q(t) = q_0 \cos \omega_0 t$, $i(t) = -\omega_0 q_0 \sin \omega_0 t$. Ainsi, *lorsque* $R \to 0$, *le circuit non soumis à aucune f.é.m. alternative extérieure devient le siège des oscillations propres dont la fréquence coïncide avec sa fréquence de résonance* ω_0.

Déterminons l'énergie électrique W_e localisée dans le condensateur et l'énergie magnétique W_m localisée dans la bobine d'inductance :

$$W_e = \frac{1}{2C} q^2, \quad W_m = \frac{1}{2} Li^2.$$

L'énergie électromagnétique totale stockée dans le condensateur et la bobine est égale à $W_e + W_m = q_0^2/(2C)$. Cette grandeur ne varie pas avec le temps, en outre, plus grande est W_m, plus petite est W_e et inversement, de sorte que les oscillations s'accompagnent du passage de l'énergie du condensateur, c'est-à-dire du réservoir électrique, à l'inductance, c'est-à-dire au réservoir magnétique, et inversement du réservoir magnétique au réservoir électrique. En un certain sens ce passage de l'énergie est analogue au passage de l'énergie cinétique en énergie potentielle et inversement lors des oscillations mécaniques d'un pendule.

Notre résultat sur la constance de l'énergie totale $W = W_e + + W_m$ est lié à la supposition que $R \to 0$. Si la résistance a une valeur finie, les oscillations s'amortissent, de sorte que la somme des énergies électrique et magnétique décroît en fonction du temps suivant une loi exponentielle $e^{-2\gamma t}$.

La décroissance de l'énergie, c'est-à-dire sa dissipation, se produit par suite d'un dégagement continu de la chaleur Joule dans les conducteurs de la bobine d'inductance.

Il est clair que si l'on pouvait compenser de façon continue cette dissipation de l'énergie dans le circuit oscillant, ses oscillations seraient non amorties, ou comme on dit, entretenues, malgré la présence de la résistance. Une telle compensation des pertes d'énergie dans le circuit oscillant pourrait s'obtenir en principe à l'aide d'une source ordinaire de f.é.m. continue en lui faisant fournir, à des instants appropriés, de l'énergie au circuit. Mais la fréquence des oscillations du circuit est très élevée. C'est pourquoi la cadence avec laquelle la source doit fournir de l'énergie au circuit doit être très grande. Il est donc souhaitable que cet apport d'énergie s'effectue automatiquement et par voie électrique et non mécanique.

Une telle soupape électrique qui ouvre et ferme automatiquement la source d'énergie à courant continu reliée au circuit oscillant peut être constituée par un tube électronique spécial appelé *triode*. Le tube électronique le plus simple — la diode — comporte deux électrodes : une cathode chaude qui émet les électrons et une anode, portée à un potentiel positif par rapport à la cathode, qui collecte les électrons émis. L'intensité du courant qui passe entre l'anode et la cathode (on l'appelle *courant anodique*) dépend de la différence de potentiel entre les électrodes. A la différence des conducteurs ordinaires qui obéissent à la loi d'Ohm, cette dépendance

est non linéaire. La triode utilise encore une troisième électrode placée entre la cathode et l'anode et appelée *grille de commande* qui laisse passer presque tout le courant d'électrons qui se dirige de la cathode vers l'anode. Le sens de fonctionnement de la grille consiste en ce qu'elle reçoit automatiquement l'information sur ce qui se produit dans le circuit oscillant et, en réagissant sur cette information, elle augmente à des instants convenables le courant anodique et donc le courant qui parcourt le circuit oscillant. A cet effet, la grille est reliée au circuit oscillant, si bien que la présence de cette liaison appelée *couplage à réaction* permet de fournir de façon continue et sans inertie, les quantités requises d'énergie de la part de la source de f.é.m. continue au circuit oscillant où cette énergie est transformée en énergie oscillatoire du courant alternatif.

§ 5.8. Fluctuations électromagnétiques

En déterminant les courants dans divers circuits, nous avons supposé que dans ces circuits agissaient des f.é.m. bien déterminées, continues ou alternatives, qui étaient toujours des fonctions données du temps. Or, les circuits sont inévitablement soumis encore à l'action des f.é.m. aléatoires dont la forme exacte ne peut en principe être établie. Il suffit de dire que les courants extérieurs induisent dans chaque circuit des f.é.m. d'induction dont les fréquences, les phases et les amplitudes peuvent être absolument quelconques. Nous ne pouvons pas les connaître avec exactitude: elles ne peuvent se décrire que statistiquement à l'aide de la notion de probabilité. Si l'on imagine un certain circuit électriquement isolé du milieu ambiant, il sera parcouru même dans ce cas, par des courants fortuits intempestifs. Le fait est qu'un système de charges n'est parcouru par aucun courant que dans le cas où ce système est en état d'équilibre statistique ou thermique à la température zéro. En réalité, tout système présente nécessairement des fluctuations dites thermiques qui donnent toujours lieu à des *courants électriques dits fluctuants.* C'est pourquoi

l'intensité du courant parcourant un circuit dans lequel agit une f.é.m. bien déterminée diffère de celle déterminée par cette f.é.m. d'après la loi d'Ohm généralisée : à cette intensité du courant se superpose un courant dû aux fluctuations thermiques.

Montrons comment on détermine les courants de fluctuation. Commençons par un circuit constitué d'un condensateur de capacité C et d'une résistance de valeur ohmique R. En l'absence de f.é.m. extérieure la tension aux bornes du condensateur satisfait à l'équation

$$RC\frac{du}{dt}+u=0$$

dont la solution est de la forme

$$u(t)=u(0)\,e^{-t/(RC)}\qquad (t\geqslant 0)$$

où u (0) est la valeur initiale de u. Nous admettrons que dans cette solution u (0) est une grandeur aléatoire. Le caractère aléatoire du processus signifie que la valeur moyenne de u (0) qui est prise sur toutes les valeurs possibles de u (0) (ou, comme on dit, *sur l'ensemble des valeurs de* u (0) et non sur le temps !), est nulle: $\langle u(0)\rangle = 0$. C'est pourquoi $\langle u(t)\rangle = 0$ elle aussi (le calcul de la moyenne ne concerne pas le facteur fixe $\exp[t/(RC)]$). Mais la valeur moyenne de la grandeur quadratique u^2 (0) est différente de zéro. En effet, le condensateur peut être assimilé à une particule brownienne gigantesque placée dans un milieu extérieur à la température T. On peut donc considérer qu'à l'état d'équilibre statistique l'énergie (thermique) du condensateur doit être égale à $\frac{1}{2}kT$, où k est la constante de Boltzmann (le condensateur ne porte aucune charge extérieure !). D'un autre côté, l'énergie du condensateur est égale à la moitié du produit de sa capacité par le carré de la tension, ce qui permet d'écrire

$$\frac{1}{2}C\langle u^2(0)\rangle = \frac{1}{2}kT,$$

d'où $\langle u^2(0)\rangle = kT/C$. En tenant compte de cette relation, multiplions $u(t)$ par u (0) et prenons la moyenne de ce produit sur l'ensemble des u (0):

$$\langle u(0)\,u(t)\rangle = \frac{kT}{C}\,e^{-t/(RC)} \qquad (t \geqslant 0).$$

L'instant initial peut être évidemment choisi arbitrairement, ce qui permet de récrire cette formule sous une forme plus générale:

$$\langle u(t_1)\,u(t_2)\rangle = \frac{kT}{C}\,e^{-|t_1-t_2|/(RC)},$$

où t_1 et t_2 sont deux instants quelconques.

La grandeur $\langle u(t_1)\,u(t_2)\rangle$ s'appelle *fonction de corrélation de la tension.* Elle dépend de la différence entre les instants de temps et se détermine dans le cas d'un circuit RC par les valeurs de la capacité et de la résistance.

Proposons-nous maintenant de déterminer les composantes fréquentielles ou, comme on dit, le *spectre de fréquences* des fluctuations de tension. A cet effet, il faut développer les fluctuations en intégrale de Fourier. Mais si nous développons la fonction linéaire

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_\omega\, e^{i\omega t}\, d\omega,$$

la valeur moyenne de chacune des composantes de Fourier u_ω sera nulle: $\langle u_\omega\rangle = 0$. Au lieu de la fonction linéaire il convient donc de développer en intégrale de Fourier la fonction quadratique de la tension, c'est-à-dire la fonction de corrélation $\langle u(0)\,u(t)\rangle$:

$$\langle u(0)\,u(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (u^2)_\omega\, e^{i\omega t}\, d\omega.$$

Le symbole $(u^2)_\omega$ désigne ici une composante de Fourier de la fonction de corrélation de la tension. En faisant usage de la formule d'inversion bien connue

$$(u^2)_\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \langle u(0)\,u(t)\rangle\, e^{-i\omega t}\, dt$$

et en y introduisant l'expression de la fonction de corrélation, nous obtenons

$$(u^2)_\omega = \frac{kT}{2\pi C} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|t|}{RC} - i\omega t} \, dt.$$

En calculant l'intégrale, nous trouvons

$$(u^2)_\omega = \frac{kTR}{\pi (1 + \omega^2 R^2 C^2)} .$$

C'est cette expression qui détermine le spectre de fréquences des fluctuations de la tension aux bornes du condensateur.

Si nous multiplions cette expression par $\omega^2 C^2$, nous trouverons la composante de Fourier $(i^2)_\omega$ de la fonction de corrélation du courant $\langle i(t_1)\, i(t_2)\rangle$:

$$(i^2)_\omega = \frac{kT}{\pi} \frac{R}{R^2 + 1/(\omega^2 C^2)} .$$

En nous rappelant que la résistance apparente du circuit comprenant une capacité et une résistance est $Z = R + 1/(i\omega C)$, mettons $(i^2)_\omega$ sous la forme suivante:

$$(i^2)_\omega = \frac{kT}{\pi} \frac{R}{|Z|^2} = \frac{kT}{\pi} \operatorname{Re} \frac{1}{Z} .$$

Déterminons maintenant la *fonction de corrélation des fluctuations de courant* dans un circuit composé d'une inductance et d'une résistance. Dans ce cas, l'intensité de courant $i(t)$ satisfait, en l'absence de f.é.m. extérieure, à l'équation $L\,(di/dt) + Ri = 0$, d'où nous tirons

$$i(t) = i(0)\, e^{-(R/L)t}.$$

Nous considérerons que $i(0)$ qui entre dans cette expression est une grandeur aléatoire dont la moyenne est nulle: $\langle i(0)\rangle = 0$. Quant à la grandeur $\langle i^2(0)\rangle$, elle n'est pas nulle dans le cas des fluctuations thermiques et peut être liée de manière simple à la température T. En effet, une bobine d'autoinduction peut être considérée comme un tout, pareil à une particule en mouvement brownien dans un milieu à la température T. Nous devons donc admettre que l'énergie thermique moyenne de la bobine est égale à $\frac{1}{2} kT$. Mais cette énergie peut être identifiée à l'énergie magnétique moyenne $\frac{1}{2} L \langle i^2(0)\rangle$ ayant son origine dans les fluctuations, c'est-à-dire que $\frac{1}{2} L \langle i^2(0)\rangle = kT/2$, d'où $\langle i^2(0)\rangle = kT/L$.

Multiplions $i(t)$ par $i(0)$ et prenons la moyenne de ce produit sur toutes les valeurs possibles de $i(0)$. Il vient

$$\langle i(0)\, i(t)\rangle = \frac{kT}{L} e^{-(R/L)t} \qquad (t \geqslant 0).$$

C'est cette grandeur qui représente la fonction de corrélation des fluctuations de courant dans un circuit comprenant une bobine d'autoinduction et une résistance. L'instant initial pouvant être choisi arbitrairement, cette fonction de corrélation peut s'écrire sous la forme générale suivante:

$$\langle i(t_1)\, i(t_2)\rangle = \frac{kT}{L} e^{-\frac{R}{L}|t_1 - t_2|} .$$

Cherchons maintenant le spectre de fréquences des fluctuations de courant. A cet effet, il faut développer la fonction de corrélation $\langle i(0)\, i(t)\rangle$ en intégrale de Fourier:

$$\langle i(0)\, i(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (i^2)_\omega\, e^{i\omega t}\, d\omega.$$

La composante de Fourier $(i^2)_\omega$ de la fonction de corrélation a pour valeur

$$(i^2)_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle i(0)\, i(t)\rangle\, e^{-i\omega t}\, dt.$$

En y introduisant l'expression de $\langle i(0)\, i(t)\rangle$, nous obtenons

$$(i^2)_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{kT}{L}\, e^{-R|t|/L} e^{-i\omega t}\, dt,$$

d'où

$$(i^2)_\omega = \frac{kT}{\pi}\, \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

Rappelons-nous maintenant que l'impédance du circuit considéré se détermine par la formule $Z = R + i\omega L$. Compte tenu de eette formule on peut représenter $(i^2)_\omega$ sous la forme

$$(i^2)_\omega = \frac{kT}{\pi}\, \frac{R}{|Z|^2} = \frac{kT}{\pi}\, \mathrm{Re}\, \frac{1}{Z}.$$

La structure de cette expression est la même que celle de l'expression donnant le spectre de fréquences des fluctuations de courant dans un circuit composé d'une capacité et d'une résistance. Une formule de même forme détermine le spectre de fréquences des fluctuations de courant dans le cas le plus général pour tout circuit:

$$(i^2)_\omega = \frac{kT}{\pi}\, \frac{R}{|Z|^2} = \frac{kT}{\pi}\, \frac{R}{R^2 + X^2},$$

où $Z = R + iX$ est l'impédance, R, la résistance et $X = X(\omega)$, la réactance du circuit considéré. Cette formule est dite *formule de Nyquist.*

Si la résistance du circuit est très faible, la composante de Fourier $(i^2)_\omega$ est elle aussi petite presque à toutes les fréquences. Il n'y a exception que pour des fréquences auxquelles la réactance du circuit s'annule: $X(\omega) = 0$. Cette équation détermine les fréquences de résonance du circuit. Par exemple, dans le cas du circuit composé d'une bobine et d'un condensateur, $X(\omega) = \omega L - 1/(\omega C)$, et X s'annule pour $\omega = (LC)^{-\frac{1}{2}}$. Des circuits plus compliqués peuvent avoir plusieurs fréquences de résonance qui sont toutes des racines de l'équation $X(\omega) = 0$. Dans le cas d'une faible résistance du circuit la composante de Fourier de la fonction de corrélation des fluctuations de courant présente des maximums aigus correspondant aux fréquences de résonance.

FORMULES FONDAMENTALES

Loi de l'induction électromagnétique $\mathscr{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$, $\Phi = \int \mathbf{B}\, d\mathbf{s}$

Impédance d'un circuit L, R	$Z = R + i\omega L$,
Impédance d'un circuit C, R	$Z = R + \frac{1}{i\omega C}$
Intensité de courant dans un circuit	$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$
Fréquence d'un circuit oscillant	$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$
Coefficient d'affaiblissement	$\gamma = R/(2L)$
Fonction de corrélation des fluctuations de courant dans un circuit L, R	$\langle i(t_1)\, i(t_2)\rangle = \frac{kT}{L} e^{-\frac{R}{L}\lvert t_1 - t_2\rvert}$
Formule de Nyquist	$(i^2)_\omega = \frac{kT}{\pi} \frac{R}{\lvert Z\rvert^2}$

CHAPITRE 6

LOIS DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME

§ 6.1. Equations de Maxwell

Au chapitre précédent nous avons déterminé le champ électrique rotationnel d'accélération utilisé dans un bêtatron. Mais il se trouve qu'on peut établir sous la forme la plus générale la relation entre le champ électrique rotationnel et le champ magnétique variable qui lui donne naissance. A cet effet, reportons-nous à la loi de l'induction électromagnétique qui établit que

$$\oint_L \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int_\Sigma \mathbf{B}\,d\mathbf{s}.$$

En supposant immobile le contour L, récrivons cette équation sous la forme

$$\oint_L \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = -\int_\Sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,d\mathbf{s}$$

et, en appliquant la formule de Stokes, transformons l'intégrale de contour en intégrale de surface :

$$\oint_L \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = \int_\Sigma \operatorname{rot}\mathbf{E}\,d\mathbf{s}$$

(rappelons que l'élément de contour dl et l'élément de surface ds forment un système à droite). Il vient

$$\int_\Sigma \left(\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) d\mathbf{s} = 0.$$

Puisque le contour L et la surface Σ s'appuyant sur ce contour peuvent être quelconques, il en résulte que

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Cette relation fondamentale porte le nom de *première équation de Maxwell.*

Soulignons une fois de plus que le champ électrique produit par un champ magnétique variable est un champ rotationnel et non

potentiel, ce qui implique que ses lignes de force sont fermées contrairement aux lignes de force d'un champ électrostatique dont les lignes de force ne sont jamais fermées sur elles-mêmes.

A partir de la première équation de Maxwell il est facile de déduire la loi de l'induction électromagnétique : à cet effet il suffit d'intégrer les deux membres de cette équation sur une surface quelconque Σ s'appuyant sur un certain contour conducteur L. Puis, en se servant de la formule de Stokes, on peut transformer l'intégrale de surface du rotationnel du champ électrique en circulation de ce champ le long du contour L. Nous obtiendrons ainsi la f.é.m. agissant dans le contour, qui sera exprimée par l'intermédiaire de la dérivée par rapport au temps du flux magnétique traversant le contour. Ceci permet de dire que la première équation de Maxwell exprime la loi de l'induction électromagnétique sous forme différentielle. En fait, la portée de la première équation de Maxwell est plus grande que celle de la loi de l'induction électromagnétique. C'est que la loi de l'induction électromagnétique est inséparable d'un contour conducteur ou (dans un énoncé plus général) d'un contour matériel. Quant à l'équation de Maxwell, elle n'est aucunement liée à un contour matériel et ne fait intervenir que les champs sous forme pure, autrement dit, c'est

une équation de champ qui détermine la relation entre les champs régnant à un instant donné en un endroit donné de l'espace.

En prenant la divergence des deux membres de l'équation de Maxwell et en tenant compte que div rot $\mathbf{E} \equiv 0$, nous obtenons $(\partial/\partial t)$ div $\mathbf{B} = 0$, ce qui montre que la divergence de l'induction est indépendante du temps. Une telle conclusion découle de la première équation de Maxwell, mais elle ne signifie pas que

$$\text{div}\,\mathbf{B} = 0.$$

Cette dernière relation est vérifiée, mais

elle ne se déduit pas de la première équation de Maxwell, elle exprime une loi indépendante de la nature, non pas la loi de l'induction électromagnétique, mais celle de l'absence de charges magnétiques dans la nature.

Rappelons à ce propos que les lignes de force magnétique n'ont ni l'origine, ni l'extrémité.

Le champ magnétique variable fait naître autour de lui un champ électrique rotationnel. Mais les champs électrique et magnétique présentent beaucoup d'analogies. C'est pourquoi une question se pose tout naturellement : le champ électrique variable ne produit-il pas un champ magnétique ? Une analyse élémentaire de la décharge d'un condensateur montre qu'une telle interdépendance du champ électrique et du champ magnétique doit exister. En effet, relions

par un fil conducteur l'une à l'autre les armatures d'un condensateur chargé. Le conducteur sera parcouru par le courant de décharge qui produira un champ magnétique. Les lignes de force de ce champ embrassent le conducteur. Si l'on choisit un contour L quelconque, entourant le conducteur, la circulation de l'induction magnétique le long de L doit se déterminer, en vertu de la loi de courant total, par l'intensité du courant passant par une surface quelconque s'appuyant sur L. Mais si l'on prend deux surfaces : Σ_1 traversant le conducteur et Σ_2 passant dans l'espace entre les armatures du condensateur, la surface Σ_1 sera parcourue par le courant de décharge, alors que la surface Σ_2 ne sera parcourue par aucun courant. Nous sommes en présence de non-observation de la loi de courant total. L'explication réside visiblement dans le fait que le condensateur provoque une discontinuité du courant de conduction. Néanmoins, le champ magnétique du courant de décharge non fermé existe sans aucun doute et de plus la circulation de l'induction **B** le long du contour L est égale à $\mu_0 I$. Le courant I est donné par l'intégrale de la densité de courant **j**, prise sur la surface Σ_1, c'est-à-dire que

$$\oint_L \mathbf{B}\,d\mathbf{l} = \mu_0 \int_{\Sigma_1} \mathbf{j}\,d\mathbf{s}.$$

Mais la circulation ne peut pas dépendre de la forme de la surface, il importe seulement que la surface s'appuie sur L. Ceci signifie que doit être vérifiée la relation

$$\oint_L \mathbf{B}\,d\mathbf{l} = \mu_0 \int_{\Sigma_2} \mathbf{X}\,d\mathbf{s},$$

où Σ_2 est une surface quelconque passant entre les armatures du condensateur et **X**, une certaine grandeur vectorielle inconnue. Pour la détermination de cette dernière nous avons l'équation

$$\int_{\Sigma_1} \mathbf{j}\,d\mathbf{s} = \int_{\Sigma_2} \mathbf{X}\,d\mathbf{s}$$

qui est valable pour toutes les surfaces Σ traversant le conducteur, y compris la surface de l'armature du condensateur ; quant à la surface Σ_2 située à l'intérieur du condensateur, elle peut passer aussi près que l'on veut de l'armature du condensateur.

Prenons maintenant comme Σ_1 la surface de l'armature du condensateur. Il est évident que sur cette surface la densité de courant j coïncide avec $d\sigma/dt$, où σ est la densité superficielle de charge, ou, sous forme vectorielle, $\mathbf{j} = \mathbf{n}\,(d\sigma/dt)$, où $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire normal à la surface de l'armature. La densité de charge σ peut s'exprimer par l'intensité du champ **E** au voisinage de l'armature : $\sigma = \varepsilon_0 \mathbf{E}\mathbf{n}$, si bien que la densité de courant sur la surface de l'armature

$$j = \varepsilon_0 \dot{E}.$$

Prenons maintenant en compte que la surface Σ_2 peut passer à l'intérieur du condensateur aussi près que l'on veut de la surface de l'armature et que le champ régnant à l'intérieur d'un condensateur plan est partout le même. Ceci nous permet de considérer que tout au moins dans le cas d'un condensateur plan

$$X = \varepsilon_0 \dot{E}$$

et donc

$$\int_L B\, dl = \mu_0 \varepsilon_0 \int_{\Sigma_2} \dot{E}\, ds.$$

Transformons maintenant, en appliquant la formule de Stokes, la circulation de l'induction magnétique en intégrale sur la surface Σ_2. Nous obtiendrons alors la relation

$$\int_{\Sigma_2} \mathrm{rot}\, B\, ds = \mu_0 \varepsilon_0 \int_{\Sigma_2} \frac{\partial E}{\partial t}\, ds,$$

et comme la surface Σ_2 passant à l'intérieur du condensateur peut être choisie arbitrairement, nous avons la relation

$$\mathrm{rot}\, B = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Cette relation ne fait intervenir ni la capacité du condensateur, ni la résistance du conducteur reliant entre elles les armatures, ni le courant de décharge, elle ne comprend que localement l'induction magnétique et le champ électrique. On peut donc se demander si cette relation n'est pas d'une application universelle, valable dans tous les cas où il y a un champ électrique variable et il n'existe pas de charges électriques en mouvement. Maxwell a, le premier, supposé qu'il en est justement ainsi, c'est-à-dire qu'un champ électrique variable produit toujours autour de lui un champ magnétique déterminé par cette relation. En d'autres termes, au point de vue de la production de champ magnétique, le champ électrique variable est équivalent à un certain courant qui a pour densité

$$j_D = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Maxwell a donné à ce courant le nom de *courant de déplacement*, et j_D est appelé *densité de courant de déplacement.*

Lorsqu'il y a encore des charges en mouvement auxquelles correspond la densité totale de courant j_t (qui comprend tant la densité de courant de conduction que celle des courants internes circulant

dans les molécules), c'est la loi de courant total

$$\text{rot}\,\mathbf{B} = \mu_0\,(\mathbf{j}_t + \mathbf{j}_D)$$

qui doit être valable et qui fait intervenir la somme de la densité de courant de charges $\mathbf{j}_t$ des particules en mouvement et de la densité de courant de déplacement $\mathbf{j}_D$. Le sens physique de cette relation, qui est connue sous le nom de deuxième équation de Maxwell, consiste en ce que *le champ magnétique est engendré tant par des charges en mouvement que par un champ électrique variable.*

En partant de ses équations (énoncées en 1860-1865), Maxwell a prédit en 1865 l'existence d'ondes électromagnétiques, qui se propagent à la vitesse de la lumière, et a supposé que la lumière visible elle-même est une onde électromagnétique de longueur bien déterminée.

§ 6.2. Champ électromagnétique libre dans le vide

Ainsi, un champ électrique variable produit autour de lui (comme un courant variable) un champ magnétique variable. A son tour, un champ magnétique variable développe autour de lui un champ électrique également variable. Une question se pose donc : les champs électrique et magnétique variables ne peuvent-ils pas exister dans le vide entretenant l'un l'autre en l'absence de charges et de courants? Mathématiquement cette question se ramène à la question suivante : les équations de Maxwell pour les champs dans le vide

$$\text{rot}\,\mathbf{E} = -\,\partial\mathbf{B}/\partial t; \quad \text{div}\,\mathbf{B} = 0;$$
$$\text{rot}\,\mathbf{B} = \mu_0\varepsilon_0\partial\mathbf{E}/\partial t; \quad \text{div}\,\mathbf{E} = 0$$

ont-elles des solutions différentes de la solution triviale $\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$? La réponse est que de telles solutions existent et qu'il y en a une infinité.

Pour nous en convaincre, faisons disparaître dans ces équations l'un des champs, par exemple, l'induction $\mathbf{B}$. A cet effet, appliquons l'opérateur rot aux deux membres de la première équation :

$$\text{rot}\,\text{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\,\text{rot}\,\mathbf{B}.$$

Puis, en utilisant la deuxième équation, nous obtiendrons $\text{rot}\,\text{rot}\,\mathbf{E} = -\,\mu_0\varepsilon_0\partial^2\mathbf{E}/\partial t^2$. Enfin, tenons compte que $\text{rot}\,\text{rot}\,\mathbf{E} = \text{grad}\,\text{div}\,\mathbf{E} - \Delta\mathbf{E}$. Vu que dans le vide $\text{div}\,\mathbf{E} = 0$, nous obtenons finalement

$$\Delta\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.$$

où $c^2 = (\varepsilon_0\mu_0)^{-1}$. Il est aisé de s'assurer qu'une telle équation que l'on appelle *équation d'onde* est également valable pour l'induction magnétique $\mathbf{B}$ dans le vide.

Montrons maintenant que l'équation d'onde admet une infinité de solutions non triviales. Considérons pour plus de simplicité le cas où les champs ne dépendent que d'une seule coordonnée cartésienne, de x par exemple. Alors toutes les composantes non nulles des champs **E** et **B** (désignons-les toutes par une lettre f) satisfont à une seule et même équation d'onde unidimensionnelle

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$

La solution de cette équation est de la forme

$$f(x, t) = F_1(x - ct) + F_2(x + ct),$$

où F_1 et F_2 sont des fonctions arbitraires. La fonction $F_1(x - ct)$ décrit une onde qui se propage à la vitesse c dans le sens des x positifs, et la fonction $F_2(x + ct)$, une onde qui se propage à la même vitesse dans le sens des x négatifs. Ces ondes sont dites *électromagnétiques*. La quantité c est égale à la vitesse de la lumière dans le vide. Ceci nous conduit à la conclusion que les ondes électromagnétiques se propagent à la vitesse de la lumière dans le vide. De plus,

la lumière elle-même est une onde électromagnétique, et l'onde lumineuse, de même que toute onde électromagnétique dans le vide, possède la propriété de transversalité.

Ceci découle immédiatement des équations div **E** = 0, div **B** = 0. En effet, si nous y introduisons $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x \mp ct)$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x \mp ct)$, nous obtenons $\partial E_x/\partial x = \partial B_x/\partial x = 0$, d'où $E_x = \mathrm{C^{te}}$, $B_x = \mathrm{C^{te}}$. Mais nous considérons ici des champs variables et non les champs statistiques. Pour cette raison nous devons poser $E_x = B_x = 0$, ce qui signifie que les champs variables ne comportent pas de composantes le long de la direction de propagation de l'onde et sont donc transversaux. Seules leurs composantes y et z peuvent être non nulles.

Nous avons démontré que l'équation d'onde unidimensionnelle comporte une infinité de solutions. L'équation d'onde tridimensionnelle jouit de la même propriété et toutes ces solutions ont la forme d'ondes qui se propagent dans différentes directions à la vitesse de la lumière.

L'existence de solutions non triviales des équations de Maxwell en l'absence de courants et de charges est d'une importance fondamentale. Elle signifie que

les champs variables peuvent exister dans le vide en l'absence de charges et de courants. Ceci signifie que le champ électromagnétique doit être considéré comme une réalité physique et non pas comme un attribut des charges.

Pour s'en assurer définitivement, il faut encore démontrer que le champ électromagnétique possède, de même que la substance, une énergie, une impulsion et un moment bien déterminés. Nous allons

nous en convaincre pour pouvoir affirmer à juste titre que le champ électromagnétique est réellement matériel.

Quant à l'énergie d'un champ électrostatique, nous l'avons déjà rencontrée : en examinant le processus de charge d'un condensateur, nous avons montré que le travail effectué contre les forces de répulsion électrostatique des charges ne disparaît pas et qu'il peut être considéré comme étant emmagasiné sous la forme de l'énergie W_e du champ électrostatique, dont la densité est égale à $\varepsilon_0 E^2/2$. Pourtant nous avons pu considérer au même titre que la grandeur W_e représente l'énergie des charges et non celle du champ. C'est pourquoi nous allons considérer maintenant la question concernant l'énergie du champ — électrique et magnétique — d'un point de vue plus général en partant du bilan énergétique d'un système constitué d'un champ et de particules chargées.

Si les particules se meuvent dans un champ électromagnétique **E**, **B**, leur mouvement se décrit par l'équation

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{p} = q\,(\mathbf{E} + [\mathbf{vB}]),$$

où q est la charge de la particule, **v** et **p** sont sa vitesse et son impulsion. Nous supposerons maintenant que le champ lui-même est créé par les charges. Ceci signifie que dans les équations de Maxwell

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,; \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0\,;$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{j} + \varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right); \quad \varepsilon_0 \operatorname{div}\mathbf{E} = \rho$$

les densités de courant et de charge se déterminent par les charges considérées, c'est-à-dire que

$$\rho = \sum q_a n_a, \quad \mathbf{j} = \sum q_a n_a \mathbf{v}_a,$$

où n_a est la densité des particules portant la charge q_a et animées de vitesse $\mathbf{v}_a$, et la sommation s'effectue sur les diverses espèces a de particules se trouvant dans un volume unité. Il s'agit maintenant de déterminer la variation de l'énergie cinétique des particules

$$K = \sum_{(V)} mv^2/2$$

se trouvant dans un certain volume V en tenant compte de l'action du champ sur les particules.

La variation de l'énergie cinétique d'une seule particule en 1 s s'exprime par

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}mv^2 = \mathbf{v}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{p}.$$

et comme la force exercée sur la particule de la part du champ magnétique est dirigée perpendiculairement à la vitesse de la particule,

l'équation du mouvement de la particule permet d'écrire

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}mv^2 = q\,\mathbf{E}\mathbf{v}.$$

Nous obtenons par suite:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K = \sum_{(V)} q\,\mathbf{E}\mathbf{v}.$$

Dans cette expression, on peut passer de la sommation étendue à toutes les particules à l'intégration sur le volume V occupé par les particules et effectuer ensuite la sommation seulement sur les diverses espèces de particules:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K = \sum_{a}\int_{V} q_a n_a \mathbf{v}_a \mathbf{E}\,\mathrm{d}V.$$

Si on se rappelle la relation donnant la densité de courant $\mathbf{j}$, on peut récrire cette expression sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K = \int_{V} \mathbf{j}\mathbf{E}\,\mathrm{d}V.$$

Mais d'après la deuxième équation de Maxwell

$$\mathbf{j}\mathbf{E} = \left(\frac{1}{\mu_0}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B} - \varepsilon_0\dot{\mathbf{E}}\right)\mathbf{E}.$$

En remarquant que suivant la première équation de Maxwell $\mathbf{B}\dot{\mathbf{B}} = -\,\mathbf{B}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}$, nous obtenons

$$\mathbf{j}\mathbf{E} = -\varepsilon_0\mathbf{E}\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}\,\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{B}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} - \mathbf{E}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B}).$$

Cette expression est à intégrer sur le volume V. En vertu du théorème de Gauss

$$\int_{V} \mathrm{div}\,[\mathbf{E}\mathbf{B}]\,\mathrm{d}V = \int_{\Sigma} [\mathbf{E}\mathbf{B}]\,\mathrm{d}\mathbf{s},$$

où Σ est la surface limitant le volume V et $\mathrm{d}\mathbf{s}$, l'élément de surface Σ dirigé le long de la normale à cette surface. Il vient en définitive

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K \equiv \int_{V} \mathbf{j}\mathbf{E}\,\mathrm{d}V = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V}\frac{1}{2}(\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{H})\,\mathrm{d}V - \int_{\Sigma}[\mathbf{E}\mathbf{H}]\,\mathrm{d}\mathbf{s},$$

où $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}$, $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$.

Analysons maintenant cette expression. Supposons d'abord que le champ s'annule sur la frontière du volume V. Dès lors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}K = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}W, \quad W \equiv \frac{1}{2}\int(\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{H})\,\mathrm{d}V.$$

Nous voyons que dans ce cas $\mathrm{d}K = -\mathrm{d}W$, c'est-à-dire que l'accroissement de K est égal au décroissement de W, si bien que la somme de K et de W reste inchangée dans le temps: $K + W = \mathrm{C^{te}}$.

Puisque K représente l'énergie cinétique des particules, la relation obtenue, qui détermine le bilan énergétique, n'est rien d'autre que la loi de conservation de l'énergie. Mais nous ne considérons que des particules et le champ électromagnétique qui interagissent les unes avec l'autre et constituent un système fermé. C'est pourquoi la somme $K + W$ représente l'énergie totale de notre système, et la grandeur W qui ne dépend que de **E**, **B**, **D**, **H** n'est rien d'autre que l'énergie du champ électromagnétique. Elle est égale à l'intégrale de la densité w d'énergie électromagnétique, prise sur le volume occupé par le champ:

$$W = \int_V w\,\mathrm{d}V, \quad w = \frac{1}{2}(\mathbf{ED} + \mathbf{BH}).$$

La densité d'énergie électromagnétique est égale à la somme de la densité d'énergie électrique $w_e = {}^1/_2\, \varepsilon_0 E^2$ et de la densité d'énergie magnétique $w_m = (2\mu_0)^{-1}B^2$. Ces grandeurs sont proportionnelles aux carrés des champs. Rappelons que nous avons déjà rencontré les densités d'énergie électrique et magnétique (v. §§ 1.7, 4.5).

Revenons maintenant à l'expression générale pour $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)K$ comprenant l'intégrale de surface suivante:

$$J = \int_\Sigma \mathbf{S}\,\mathrm{d}\mathbf{s}, \quad \mathbf{S} = [\mathbf{EH}].$$

Compte tenu de cette intégrale, le bilan énergétique du système dynamique — particules chargées plus champ électromagnétique — que nous considérons, se présente sous la forme suivante:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(K + \int_V w\,\mathrm{d}V\right) = -\int_\Sigma \mathbf{S}\,\mathrm{d}\mathbf{s}.$$

Le premier membre de cette équation représente la dérivée par rapport au temps de l'énergie totale du système, c'est-à-dire de la somme de l'énergie cinétique des particules chargées et de l'énergie du champ électromagnétique. Cette dérivée n'est pas nulle, c'est-à-dire que l'énergie totale du système ne se conserve pas. Il est clair qu'une telle situation ne peut se présenter que si l'énergie quitte le volume V ou au contraire y entre. L'énergie passe à travers la surface Σ qui limite le volume V, ce qui explique pourquoi l'équation du bilan énergétique fait intervenir précisément l'intégrale de surface J.

Ainsi, nous devons interpréter la grandeur J comme le flux d'énergie sortant du volume V, c'est-à-dire comme la quantité d'énergie électromagnétique quittant le volume V en 1 s. Corrélativement la

grandeur S doit s'interpréter comme la *densité de flux d'énergie électromagnétique*, c'est-à-dire comme l'énergie passant en 1 s par une surface unité orientée perpendiculairement au vecteur S. Le vecteur S porte le nom de *vecteur de Poynting*.

En plus de l'énergie, le champ électromagnétique possède encore une *impulsion* (*quantité de mouvement*). La densité d'impulsion du champ $\mathbf{g} = \mathbf{S}/c^2$ ne diffère du vecteur de Poynting que par le facteur $1/c^2$, de sorte que l'impulsion du champ électromagnétique occupant le volume V a pour expression

$$\mathbf{G} = \int_V \mathbf{g}\, dV = c^{-2} \int_V [\mathbf{EH}]\, dV$$

Aussi, l'impulsion totale $\mathbf{P}$ du système de particules et d'un champ électromagnétique est-elle donnée par la formule

$$\mathbf{P} = \sum_{(V)} \mathbf{p} + \frac{1}{c^2} \int_V [\mathbf{EH}]\, dV,$$

où le premier terme exprime l'impulsion des particules se trouvant dans le volume V. Dans un volume V fini, l'impulsion totale ne se conserve pas parce que le champ électromagnétique passe par la frontière de ce volume et transporte une partie de l'impulsion.

Enfin, le champ électromagnétique possède un *moment d'impulsion* (*moment de quantité de mouvement*) dont la densité est

$$[\mathbf{rg}] = c^{-2} [\mathbf{r}\, [\mathbf{EH}]],$$

si bien que le moment $\mathbf{L}$ du champ dans le volume V a pour expression

$$\mathbf{L} = c^{-2} \int [\mathbf{r}\, [\mathbf{EH}]]\, dV.$$

§ 6.3. Champs microscopiques moyennés

Les équations de Maxwell énoncées plus haut relient les champs électrique et magnétique dans le vide l'un avec l'autre et avec les courants et les charges donnés. Elles peuvent être considérées comme des lois régissant le mouvement du champ électromagnétique dans le vide. Proposons-nous maintenant d'établir des lois analogues pour le champ électromagnétique dans la substance qui est dans le cas général un champ variable et non uniforme. Ce faisant, nous devons tenir compte du fait qu'une substance est constituée d'atomes qui sont à leur tour composés par des particules chargées: électrons et noyaux. Nous devons donc partir du concept du champ électromagnétique dans le vide, dans lequel se trouvent placées des particules de substance en mouvement continu, et vu que ces dernières sont chargées, elles subissent l'influence de ce champ d'une part et le modifient d'autre part.

C'est ainsi que se pose le problème de l'interaction auto-adaptée du champ électromagnétique dans le vide avec les électrons et les noyaux atomiques de la substance. Pour la première fois ce problème a été énoncé à la fin du siècle passé par Lorentz qui a également indiqué la voie à suivre pour sa résolution de principe.

La complexité de ce problème est liée tant au nombre colossal d'électrons et de noyaux contenus dans toute portion macroscopique de substance qu'à un caractère extrêmement compliqué de leur mouvement. Mais c'est justement cette complexité qui simplifie en dernier ressort le problème parce qu'elle permet d'utiliser pour sa résolution la méthode statistique. Le fait est que les champs vrais dans le vide modifiés par les particules chargées de substance — nous les appellerons *champs microscopiques* — se caractérisent par une irrégularité extraordinairement grande. Cette irrégularité, tant dans l'espace que dans le temps, est due à la structure atomique de la substance. Si l'on prend un ion isolé par exemple, le champ électrique qu'il engendre varie en direction à une distance de l'ordre des dimensions de l'ion, c'est-à-dire de 10^{-10} m. Puis, il est clair que les champs électrique et magnétique produits par les électrons atomiques subissent des variations considérables pendant le temps caractéristique des atomes égal approximativement à 10^{-16} s (un tel temps correspond au passage de la distance interatomique approximativement égal à 10^{-10} m à une vitesse de l'ordre de 10^6 m/s caractéristique des électrons atomiques). Mais pour beaucoup de problèmes toutes ces irrégularités sont sans importance. On peut donc les négliger, ce qui signifie que ce n'est pas les champs microscopiques qui présentent un intérêt mais leurs valeurs moyennes qui ne contiennent plus de petites irrégularités ou, en langage imagé, de « rugosités » de champs dues à la structure atomique de la substance.

Ainsi, nous devons introduire des champs moyennés ou, comme on les appelle, des *champs macroscopiques*. Les moyennes doivent être calculées tant sur les coordonnées spatiales que dans le temps. A savoir : si $f(\mathbf{r}, t)$ est une certaine grandeur microscopique contenant des irrégularités atomiques, la grandeur macroscopique moyennée correspondante sera définie par

$$\langle f(\mathbf{r}, t)\rangle = \frac{1}{\Delta V \Delta t} \int f(\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}, t+\delta t)\, d(\delta\mathbf{r})\, d(\delta t),$$

où l'intégration porte sur un élément de volume ΔV entourant le point $\mathbf{r}$ et sur un élément de temps Δt au voisinage de l'instant t. Le volume ΔV à moyenner doit être grand par rapport au volume a^3 de l'atome mais petit devant la région L^3 de l'espace où la grandeur moyennée elle-même subit des variations appréciables (elle reste toujours fonction des coordonnées et du temps !). D'une manière analogue, le temps Δt pendant lequel on fait la moyenne doit être grand par rapport au temps atomique caractéristique $\tau_a = a/v_a$

mais petit devant le temps T au cours duquel la grandeur moyennée elle-même subit une variation notable dans le temps (v_a étant la vitesse moyenne des électrons dans l'atome). Si les conditions

$$a \ll (\Delta V)^{1/3} \ll L, \quad \tau_a \ll \Delta t \ll T$$

sont remplies, la grandeur moyennée $\langle f(\mathbf{r}, t)\rangle$ est exempte de « rugosités » atomiques et constitue une fonction continue des coordonnées et du temps. C'est précisément de telles grandeurs moyennées ou macroscopiques que nous considérons dans ce qui suit.

Introduisons maintenant des champs moyennés: un champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et un champ magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ (le vecteur $\mathbf{B}$ s'appelle, comme il a été dit, d'une manière traditionnelle, induction magnétique). Ils sont liés aux champs microscopiques, que nous désignerons par $\mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{b}(\mathbf{r}, t)$, par les relations

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)\rangle; \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{b}(\mathbf{r}, t)\rangle.$$

Le problème consiste à établir les lois auxquelles obéissent les champs macroscopiques $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ dans un milieu matériel. Comme point de départ pour la résolution de ce problème on doit prendre les lois qui gouvernent les champs microscopiques $\mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{b}(\mathbf{r}, t)$ dans le vide. Ces lois s'expriment par les équations du champ électromagnétique dans le vide. Le premier groupe de ces équations s'écrit de façon bien simple:

$$\operatorname{rot} \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{b}(\mathbf{r}, t), \quad \operatorname{div} \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Pour pouvoir écrire le second groupe d'équations, il faut avoir en vue que la substance peut contenir des particules chargées de diverses espèces et que si la densité des particules de charge q_a est égale à n_a, la densité microscopique de charge électrique est égale à $\sum q_a n_a$, où la somme est étendue à toutes les espèces a de particules chargées. Puis, si $\mathbf{v}_a$ est la vitesse des particules d'espèce a, la densité microscopique de courant est $\sum q_a n_a \mathbf{v}_a$. La seconde paire d'équations du champ peut alors s'écrire sous la forme

$$\operatorname{rot} \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \left(\sum q_a n_a \mathbf{v}_a + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{e}(\mathbf{r}, t)\right);$$

$$\varepsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = \sum q_a n_a.$$

Ces deux paires d'équations représentent en fait les équations de Maxwell pour les champs dans le vide dans lequel « nagent » des particules chargées. Mais on leur donne souvent le nom d'*équations électromagnétiques de Maxwell-Lorentz* pour souligner l'approche indiquée par Lorentz pour l'établissement de ces équations du champ dans des milieux matériels sur la base de la théorie électronique de la matière.

Nous devons maintenant moyenner les équations de Maxwell-Lorentz. Il est évident que le calcul de la moyenne n'est aucunement lié ni à l'opération de rot, ni à celle de div, c'est-à-dire ni à la dérivation par rapport aux coordonnées, ni à celle par rapport au temps. Il vient

$$\operatorname{rot} \langle \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)\rangle = -\frac{\partial}{\partial t}\langle \mathbf{b}(\mathbf{r}, t)\rangle, \quad \operatorname{div}\langle \mathbf{b}(\mathbf{r}, t)\rangle = 0;$$

$$\mu_0^{-1} \operatorname{rot}\langle \mathbf{b}(\mathbf{r}, t)\rangle = \sum \langle q_a n_a \mathbf{v}_a\rangle + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\langle \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)\rangle;$$

$$\varepsilon_0 \operatorname{div}\langle \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)\rangle = \sum \langle q_a n_a\rangle,$$

ou, du fait que $\langle \mathbf{e}\rangle = \mathbf{E}$ et $\langle \mathbf{b}\rangle = \mathbf{B}$, la première paire d'équations moyennées prend la forme

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}(\mathbf{r}, t); \quad \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0,$$

et la seconde paire d'équations moyennées, la forme

$$\mu_0^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \sum \langle q_a n_a \mathbf{v}_a\rangle + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t);$$

$$\varepsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \sum \langle q_a n_a\rangle.$$

La première paire d'équations a un sens physique simple : la première d'entre elles exprime sous forme différentielle la loi de l'induction électromagnétique pour les champs macroscopiques, et la seconde, l'absence de charges magnétiques dans la nature.

Passons maintenant à l'analyse de la seconde paire d'équations moyennées et proposons-nous de déterminer d'abord le sens de la grandeur $\sum \langle q_a n_a \mathbf{v}\rangle$ qui exprime la densité moyennée du courant microscopique. Cette détermination exige que l'on connaisse la structure de la substance considérée. Mais dans une description phénoménologique générale, nous devons distinguer la densité de courant dû aux charges libres de la densité de courant dû aux charges liées. En désignant ces deux grandeurs respectivement par $\mathbf{j}$ et $\mathbf{j}_b$ et en supposant, pour plus de généralité, que le corps considéré possède les deux types de charges, nous pouvons écrire

$$\sum \langle q_a n_a \mathbf{v}_a\rangle = \mathbf{j} + \mathbf{j}_b.$$

Certes, en réalité, le premier terme n'existe que dans les conducteurs, dans ce cas, si la variation des champs est suffisamment lente et si les conducteurs sont immobiles, la densité de courant $\mathbf{j}$ (on l'appelle *densité de courant de conduction*) est proportionnelle à l'intensité du champ électrique macroscopique $\mathbf{E}$, c'est-à-dire que $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, où σ est la conductivité électrique de la substance. Néanmoins nous avons inclus le terme $\mathbf{j}$ dans la somme $\sum \langle q_a n_a \mathbf{v}_a\rangle$ pour pouvoir obtenir par

la suite des relations générales valables aussi bien pour les conducteurs que pour les isolants.

Considérons maintenant la densité de courant dû aux charges liées. Ce courant peut être divisé en deux parties : le courant produit par le déplacement des charges liées ou, autrement dit, par leur polarisation et le courant dû à la rotation des particules chargées et en premier lieu à la rotation des électrons dans les atomes. Les densités respectives des courants seront notées $\mathbf{j}_p$ et $\mathbf{j}_r$, si bien que $\mathbf{j}_b = \mathbf{j}_p + \mathbf{j}_r$. La première de ces grandeurs — densité de courant de polarisation $\mathbf{j}_p$ — peut être exprimée par le vecteur polarisation électrique P qui est égal à la somme moyennée des moments dipolaires $\mathbf{d}_a = q_a \mathbf{r}_a$ des particules liées contenues dans un volume unité ($\mathbf{r}_a$ étant le rayon vecteur déterminant la position de la charge liée a) :

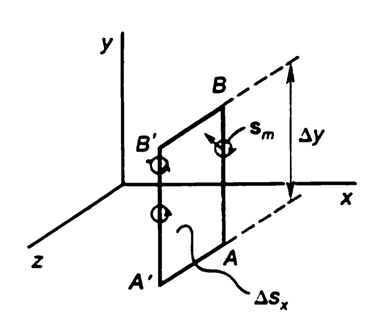


Fig. 6.1. Densité du courant dû aux charges liées en rotation

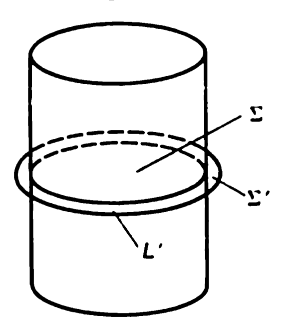


Fig. 6.2. Détermination du courant total dû aux charges liées tournantes

$$\mathbf{P} = \sum_{(V=1)} \langle \mathbf{d}_a \rangle .$$

C'est la dérivée de P par rapport au temps qui donne la densité de courant de polarisation :

$$\mathbf{j}_p = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}.$$

Considérons maintenant la densité du courant $\mathbf{j}_r$ dû aux charges liées en rotation. Il est évident que chacune de telles charges est équivalente à un certain courant moléculaire fermé et le problème consiste à trouver la relation entre la grandeur $\mathbf{j}_r$ et ces courants moléculaires. Cherchons à cet effet le courant total $\mathbf{j}_r \Delta \mathbf{s}$ traversant un certain élément de surface $\Delta \mathbf{s}$, par exemple, la surface Δs_x orientée perpendiculairement à l'axe des x (fig. 6.1). Les courants moléculaires étant fermés, il est évident que le courant total à travers la surface Δs_x ne se détermine que par des courants moléculaires individuels qui traversent cette surface une seule fois et non deux fois ; autrement dit, seuls les courants moléculaires circulant sur la frontière de

la surface Δs_x ont de l'importance. Si nous prenons la frontière AB, le nombre de tels courants est égal à $\Delta y s_y n$, où n est le nombre de courants moléculaires (c'est-à-dire d'atomes) par unité de volume, s_y, la projection de la surface s_m parcourue par le courant moléculaire sur le plan xz et Δy, la longueur de AB. En multipliant cette grandeur par l'intensité i_m d'un courant moléculaire individuel, nous trouverons le courant moléculaire total passant près de la frontière AB de la surface Δs_x. En remarquant que la grandeur $\mathbf{m} = i_m s_m$ représente le moment magnétique d'un courant moléculaire individuel, nous pouvons écrire le courant moléculaire total au voisinage de la frontière AB sous la forme $\Delta y (n\mathbf{m})_y$. Des expressions analogues sont valables pour les courants moléculaires totaux au voisinage des frontières $A'A$, $B'B$, $A'B'$. La somme de toutes ces expressions nous donne la circulation du vecteur $n\mathbf{m}$ le long du contour $ABA'B'$ qui limite la surface Δs. Enfin, la densité $\mathbf{j}_J$ étant d'après son sens une grandeur macroscopique, la grandeur $n\mathbf{m}$ doit être moyennée pour qu'elle ne contienne pas d'irrégularités atomiques. Etant donné que le courant moléculaire total à travers la surface Δs est égal à $\mathbf{j}_J \Delta \mathbf{s}$, nous obtenons la relation suivante:

$$\mathbf{j}_J \Delta \mathbf{s} = \int\limits_{ABA'B'} \langle n\mathbf{m} \rangle \, d\mathbf{l},$$

où $d\mathbf{l}$ est un élément de longueur du contour $ABA'B'$ qui limite la surface Δs. La circulation peut être exprimée conformément à la formule de Stokes par le rotationnel du vecteur $n\mathbf{m}$, et comme la surface est macroscopiquement petite,

$$\mathbf{j}_J \Delta \mathbf{s} = \mathrm{rot} \, \langle n\mathbf{m} \rangle \, \Delta \mathbf{s},$$

d'où

$$\mathbf{j}_J = \mathrm{rot} \, \mathbf{J}, \quad \mathbf{J} = \langle n\mathbf{m} \rangle.$$

La grandeur $\mathbf{J}$ est appelée *intensité d'aimantation* (*vecteur aimantation*). Elle peut s'écrire également sous la forme

$$\mathbf{J} = \sum_{(V=1)} \langle \mathbf{m}_a \rangle,$$

où $\mathbf{m}_a$ est le moment magnétique de la a-ième charge en rotation, et la somme est étendue à toutes les charges liées se trouvant dans le volume unité.

Ainsi, la densité du courant macroscopique dû aux charges liées en rotation est égale au rotationnel de l'intensité d'aimantation $\mathbf{J}$.

Il est facile d'en conclure que le courant total $\int\limits_{\Sigma} \mathbf{j}_J \, d\mathbf{s}$ engendré par les charges en rotation passant à travers une section arbitraire Σ du corps est nul. En effet, puisque le courant $\mathbf{j}_J$ n'est différent de

zéro que là où $\mathbf{J} \neq 0$, tandis qu'à l'extérieur du corps $\mathbf{J} = 0$, il vient

$$\int_{\Sigma} \mathbf{j}_J \, d\mathbf{s} = \int_{\Sigma'} \mathbf{j}_J \, d\mathbf{s},$$

où Σ' est la surface qui inclut la surface Σ et se situe en partie à l'extérieur du corps (fig. 6.2). Mais d'après la formule de Stokes,

$$\int_{\Sigma'} \mathbf{j}_J \, d\mathbf{s} = \int_{\Sigma'} \operatorname{rot} \mathbf{J} \, d\mathbf{s} = \oint_{L'} \mathbf{J} \, d\mathbf{l},$$

où L' est le contour limitant la surface Σ'. Puisque sur ce contour $\mathbf{J} = 0$, nous avons l'égalité

$$\int_{\Sigma} \mathbf{j}_J \, d\mathbf{s} = 0.$$

§ 6.4. Equations de Maxwell pour les champs macroscopiques dans la substance

Nous pouvons revenir maintenant au second groupe d'équations moyennées. La première de ces équations, qui exprime sous forme différentielle la loi de courant total dans le milieu matériel, peut s'écrire sous la forme

$$\mu_0^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_P + \mathbf{j}_J + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}$$

ou encore, en tenant compte que $\mathbf{j}_P = (\partial/\partial t)\, \mathbf{P}$, $\mathbf{j}_J = \operatorname{rot} \mathbf{J}$, sous la forme

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D},$$

où

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \mu_0^{-1} \mathbf{B} - \mathbf{J}.$$

Le vecteur $\mathbf{D}$ s'appelle *induction électrique*, et le vecteur $\mathbf{H}$, *intensité de champ magnétique* (rappelons que $\mathbf{B}$ est l'induction magnétique).

Ainsi, le rotationnel de l'intensité de champ magnétique dans la matière se détermine par la densité de courant de conduction $\mathbf{j}$ et par la dérivée de l'induction électrique $\mathbf{D}$ par rapport au temps. Si nous introduisons la densité $\mathbf{j}_D$ de courant de déplacement dans le milieu $\mathbf{j}_D = (\partial/\partial t)\, \mathbf{D}$, la relation obtenue peut être mise sous la forme

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_D.$$

Cette relation traduit l'énoncé définitif de la *loi de courant total* sous forme différentielle pour les milieux matériels.

Reportons-nous enfin à la dernière équation du deuxième groupe d'équations moyennées, qui relie la divergence du champ électrique moyenné **E** à la densité microscopique moyennée de charge $\Sigma \langle q_a n_a \rangle$. Cette dernière grandeur peut être représentée par la somme de la densité ρ de charges libres et de la densité ρ_b de charges liées : $\sum_a \langle q_a n_a \rangle = \rho + \rho_b$. Les dérivées par rapport au temps des densités de charges ρ et ρ_b peuvent s'exprimer d'une manière simple par les densités de courants **j** et $\mathbf{j}_b$. A cet effet, il convient d'appliquer la loi de conservation de la charge qui établit que le rapport de la charge totale Q contenue à l'intérieur d'un certain volume V au temps de sa variation est égal à l'intensité totale du courant I entrant dans ce volume à travers la surface Σ qui l'entoure. Puisque

$$Q = \int_V \rho\, \mathrm{d}V, \qquad I = -\int_\Sigma \mathbf{j}\, \mathrm{d}\mathbf{s},$$

où ρ est la densité volumique de charge et **j**, le vecteur densité de courant (d**s** étant orienté suivant la normale extérieure à la surface Σ), il vient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \rho\, \mathrm{d}V = -\int_\Sigma \mathbf{j}\, \mathrm{d}\mathbf{s}.$$

En tenant compte que $\int_\Sigma \mathbf{j}\, \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_V \mathrm{div}\, \mathbf{j}\, \mathrm{d}V$, nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = -\mathrm{div}\, \mathbf{j}.$$

Cette relation (connue sous le nom d'*équation de continuité*), qui exprime la loi de conservation de la charge sous forme différentielle, est déduite pour les charges libres. Or, une même relation est également valable pour les charges liées, c'est-à-dire que $\frac{\partial}{\partial t} \rho_b = -\mathrm{div}\, \mathbf{j}_b$. En y introduisant $\mathbf{j}_b = \mathbf{j}_P + \mathbf{j}_J$, nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_b = -\mathrm{div}\, \mathbf{j}_P - \mathrm{div}\, \mathbf{j}_J,$$

et comme $\mathbf{j}_P = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}$, $\mathbf{j}_J = \mathrm{rot}\, \mathbf{J}$ et $\mathrm{div}\, \mathrm{rot}\, \mathbf{J} = 0$, il vient

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_b = -\frac{\partial}{\partial t} \mathrm{div}\, \mathbf{P}.$$

Il en découle que la densité moyennée de charges liées est

$$\rho_b = -\mathrm{div}\, \mathbf{P}$$

(puisque pour $\mathbf{P} = 0$ la densité ρ_b est évidemment nulle).

En intégrant ρ_b sur le volume V, nous trouvons la charge liée moyennée totale Q_b contenue dans ce volume :

$$Q_b = \int_V \rho_b \, dV = - \int_V \operatorname{div} \mathbf{P} \, dV.$$

Suivant le théorème de Gauss cette intégrale est égale à

$$Q_b = - \int_\Sigma \mathbf{P} \, d\mathbf{s},$$

c'est-à-dire que la charge liée se détermine par le flux du vecteur polarisation à travers la surface Σ entourant le volume et est indépendante de l'aimantation. Ainsi,

$$\sum \langle q_a n_a \rangle = \rho - \operatorname{div} \mathbf{P}.$$

Ceci permet d'écrire la dernière équation du second groupe d'équations moyennées sous la forme

$$\varepsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho - \operatorname{div} \mathbf{P},$$

ou encore

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho,$$

où $\mathbf{D}$ est comme précédemment le vecteur induction électrique.

Nous sommes donc conduits à quatre équations suivantes pour les champs moyennés :

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho.$$

Ces équations s'appellent *équations de Maxwell pour les milieux matériels.*

Nous voyons qu'au lieu de deux champs comme dans le cas du vide, elles font intervenir quatre champs: **E**, **B** et **D**, **H**. Seuls les champs **E** et **B** ont un sens physique direct. Ils représentent des champs électrique et magnétique microscopiques moyennés. Quant aux champs **D** et **H**, ils sont auxiliaires, et leur détermination exige que l'on connaisse en plus de **E** et **B** encore la polarisation **P** et l'aimantation **J** :

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \mu_0^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{J}.$$

Les grandeurs **P** et **J** dépendent de **E** et **B**, mais l'établissement de cette dépendance est en général un problème délicat qui ne peut être résolu que dans le cadre de la dynamique atomique, c'est-à-dire de la mécanique quantique.

La dépendance des **P** et **J** envers **E** et **B** étant différente pour les diverses substances, les champs **E**, **D**, **B**, **H** ne sont en général pas continus sur la surface de séparation de deux milieux différents, ils subissent des variations en forme de saut au passage d'un milieu

à l'autre. Ces variations satisfont à des conditions aux limites bien déterminées. A savoir :

sont toujours continues les composantes tangentielles des intensités E, H et les composantes normales des inductions D, B :

$$\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t}, \quad \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_{2t}, \quad D_{1n} = D_{2n}, \quad B_{1n} = B_{2n},$$

où les indices 1, 2 désignent deux milieux en contact, et les indices t, n, les composantes tangentielle et normale des vecteurs (à la surface de séparation).

Ces relations découlent des équations de Maxwell si l'on écrit ces dernières sous forme intégrale. Reportons-nous d'abord à l'une des équations comprenant la divergence de l'induction, par exemple $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$, et intégrons-la sur le volume d'un petit cylindre plan dont l'une des bases se situe dans le milieu *1*, et l'autre, dans le milieu *2*. En transformant d'après le théorème de Gauss l'intégrale de volume en intégrale de surface, nous obtenons $\int\limits_{\Sigma} \mathbf{D} d\mathbf{s} = Q$, où Q est la charge vraie se trouvant à l'intérieur du cylindre, Σ, la surface du cylindre et d**s**, un élément de surface orienté. Maintenant, faisons tendre vers zéro la hauteur du cylindre. Dans ce cas $Q \to 0$ et $d\mathbf{s} \to \mathbf{n} ds$ sur l'une des bases du cylindre et $d\mathbf{s} \to -\mathbf{n} ds$ sur l'autre, **n** étant le vecteur normal à la surface de séparation et d**s**, un élément de surface. C'est pourquoi $\int\limits_{\Delta s} D_{1n} ds = \int\limits_{\Delta s} D_{2n} ds$ (Δs étant la base du cylindre) ou, compte tenu du choix arbitraire du cylindre, $D_{1n} = D_{2n}$. D'une manière analogue, on obtient la seconde condition aux limites $B_{1n} = B_{2n}$.

Prenons maintenant une des équations faisant intervenir le rotationnel d'un champ, par exemple

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j},$$

et intégrons-la sur la surface Δs limitée par un petit rectangle L dont les deux côtés sont parallèles à la surface de séparation et se situent de part et d'autre de cette surface. Transformons, en appliquant le théorème de Stokes, l'intégrale de surface en intégrale de contour, il vient

$$\oint\limits_{L} \mathbf{H}\, d\mathbf{r} = \int\limits_{\Delta s} \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \right) d\mathbf{s}.$$

Maintenant faisons tendre vers zéro les côtés du rectangle perpendiculaire à la surface de séparation. Dans ce cas, l'intégrale de surface s'annulera, et la circulation du champ donnera $\mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_{2t}$ du fait que le choix du rectangle est arbitraire. En opérant de façon identique, on obtient la seconde condition aux limites $\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t}$.

Les composantes normales des champs et les composantes tangentielles des inductions subissent dans le cas général un saut sur la surface de séparation de deux milieux. Au chapitre 3 nous avons déjà rencontré un saut de E_n sur la surface limite entre un diélectrique et un métal et nous avons vu que

le saut est lié à l'apparition d'une charge superficielle.

Ce résultat reste valable pour toute surface de séparation. En effet, de par la définition même d'un champ macroscopique, $\varepsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = \sum \langle q_a n_a \rangle$ (la somme étant étendue à toutes les charges contenues dans le milieu). En appliquant à cette équation la procédure utilisée plus haut pour établir la condition aux limites sur les composantes normales D_n, nous obtiendrons $\varepsilon_0 (E_{1n} - E_{2n}) = \rho_s$, où ρ_s est la densité superficielle de charge. Montrons que

le saut de la composante tangentielle de l'induction magnétique s'exprime par la densité de courants superficiels sur la surface de séparation de deux milieux.

Envisageons à cet effet un corps en forme de cylindre placé dans un champ magnétique $\mathbf{B}_0$ parallèle à l'axe du cylindre. Les courants moléculaires dans une section du cylindre sont schématiquement représentés sur la figure 6.3, *a*. Nous voyons que les courants moléculaires donnent naissance à un courant superficiel I_s sur la frontière du cylindre. Il est clair que l'intensité de ce courant est proportionnelle à la longueur l du cylindre. Considérons maintenant un contour fermé L en forme de rectangle dont les deux côtés longs sont parallèles à la génératrice du cylindre et passent dans le voisinage immédiat de la frontière du cylindre de telle sorte que l'un des côtés se trouve à l'intérieur du cylindre, et l'autre à son extérieur (fig. 6.3, *b*). La circulation de l'induction magnétique le long du contour L est égale à $(B - B_0)\, l$, où B est l'induction du champ magnétique à l'intérieur du cylindre. D'un autre côté, en vertu de la loi de courant total cette circulation est égale à $\mu_0 I$, où I est le courant traversant le contour L. Mais ce courant est le courant superficiel I_s. On peut donc écrire

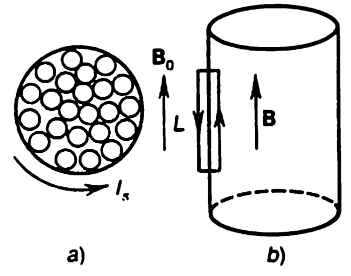


Fig. 6.3. Etablissement de la relation entre le saut de $\mathbf{B}_t$ et la densité de courants superficiels sur la surface frontière entre deux milieux

$$\mu_0^{-1} (B - B_0)\, l = I_s,$$

et, comme le courant superficiel I_s est proportionnel à la longueur l du cylindre, on peut introduire la densité $\mathbf{j}_s$ de courant superficiel, c'est-à-dire le courant superficiel par unité de longueur du cylindre.

Nous aurons la relation

$$\mu_0^{-1}(\mathbf{B}_t - \mathbf{B}_{0t}) = \mathbf{j}_s,$$

où les grandeurs $\mathbf{B}$ et $\mathbf{B}_0$ sont affectées de l'indice t pour souligner qu'il s'agit des composantes tangentielles du vecteur induction magnétique. Dans le cas général de deux milieux présentant une surface frontière quelconque, cette relation est de la forme

$$\mu_0^{-1}[\mathbf{n}_{12}(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)] = \mathbf{j}_s,$$

où $\mathbf{n}_{12}$ est le vecteur unitaire normal dirigé du milieu *1* vers le milieu *2*, $\mathbf{B}_1$ et $\mathbf{B}_2$ sont les inductions magnétiques dans les milieux *1* et *2* respectivement.

Remarquons avant de clore ce paragraphe que toutes les conditions aux limites indiquées plus haut et les équations de Maxwell elles-mêmes pour les milieux matériels ne sont valables que dans le cas où les intervalles d'espace et de temps dans lesquels se produisent des variations considérables des champs macroscopiques sont grands par rapport à des grandeurs atomiques correspondantes.

§ 6.5. Bilan énergétique du milieu matériel en présence d'un champ électromagnétique

Au § 6.2 nous avons défini l'énergie du champ électromagnétique dans le vide en partant du bilan énergétique d'un système dynamique formé par le champ dans le vide et les particules chargées. Imaginons maintenant que le vide est remplacé par un milieu matériel dans lequel il existe un certain champ électromagnétique et proposons-nous d'établir le bilan énergétique pour ce cas.

Supposons, pour fixer les idées, qu'il existe une source de f.é.m. extérieure de puissance

$$P^{(e)} = \int\limits_V \mathbf{j}\mathbf{E}^{(e)}\,dV,$$

où $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{(e)})$ est la densité de courant de conduction, $\mathbf{E}^{(e)}$, l'intensité du champ électrique produit par les sources extérieures et σ, la conductivité du milieu. Il s'agit de déterminer comment est dépensée cette puissance. Pour pouvoir répondre à cette question, posons dans la formule de $P^{(e)}$

$$\mathbf{j} = \operatorname{rot}\mathbf{H} - \dot{\mathbf{D}}, \quad \mathbf{E}^{(e)} = \mathbf{j}/\sigma - \mathbf{E}$$

et tenons compte que $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$. En remarquant encore que

$$\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{E} - \mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{H} = \operatorname{div}[\mathbf{E}\mathbf{H}],$$

nous obtiendrons

$$P^{(e)} = \int_V \frac{j^2}{\sigma} dV + \int_V \left(\mathbf{E}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D} + \mathbf{H}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}\right) dV + \int_V \operatorname{div} \mathbf{S}\, dV.$$

où $\mathbf{S} = [\mathbf{EH}]$. La dernière intégrale peut être transformée, en vertu du théorème de Gauss, en intégrale de surface de **S**, si bien que

$$P^{(e)} = \int_V \frac{1}{\sigma} j^2 dV + \int_V \left(\mathbf{E}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D} + \mathbf{H}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}\right) dV + \int_\Sigma \mathbf{S}\, d\mathbf{s}.$$

où $d\mathbf{s}$ est un élément de la surface Σ qui limite le volume V, orienté suivant la normale extérieure.

C'est cette relation qui définit le bilan énergétique du milieu. Le premier terme du second membre représente la chaleur Joule dégagée dans le milieu et due à l'existence de la conduction, alors que le troisième terme traduit la densité de flux d'énergie électromagnétique sortant du volume V. Comme il a été dit au § 6.2, le vecteur **S** qui détermine la densité de flux est appelé vecteur de Poynting.

Enfin, le deuxième terme du second membre traduit la puissance qui doit être dépensée dans le volume V pour que les inductions électrique et magnétique varient avec des vitesses respectives $(\partial/\partial t)\,\mathbf{D}$ et $(\partial/\partial t)\,\mathbf{B}$. On peut également dire que le travail dA qu'il faut effectuer sur une unité de volume du milieu pour faire varier de $d\mathbf{D}$ l'induction électrique et de $d\mathbf{B}$ l'induction magnétique est égal à

$$dA = \mathbf{E}d\mathbf{D} + \mathbf{H}d\mathbf{B}.$$

Pour les champs dans le vide lorsque $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}$ et $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$, le travail dA s'exprime par la différentielle totale de la fonction

$$w_0 = (\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2)/2$$

qu'on peut interpréter comme la densité d'énergie électromagnétique dans le vide.

Dans le cas d'un milieu matériel le travail dA n'est pas en général la différentielle totale d'une fonction d'état quelconque du milieu de même que le travail $dA = p\, dV$ accompli lors de la variation du volume d'un corps, où p est la pression, n'est pas non plus la différentielle totale de la fonction d'état du corps. Ceci est lié, on le sait, à ce que la pression p dépend non seulement du volume V mais aussi d'autres grandeurs, par exemple de la température, de sorte que le travail dépend du processus au cours duquel il est effectué. De même, le travail à accomplir pour faire varier les inductions **D** et **B** respectivement de $d\mathbf{D}$ et de $d\mathbf{B}$ dépend du processus lors duquel les champs subissent une variation, en particulier, du régime thermique. C'est seulement dans le cas où l'intensité de champ électrique **E** est uniquement fonction de **D** et d'une manière analogue l'in-

tensité de champ magnétique **H** est uniquement fonction de **B** que le travail dA est égal à la différentielle totale de la fonction

$$w = \int (\mathbf{E}\,d\mathbf{D} + \mathbf{H}\,d\mathbf{B}),$$

où l'intégration sur **D** et **B** doit s'effectuer depuis les valeurs nulles jusqu'à des valeurs données de **D** et **B**. Dans ce cas la grandeur w peut s'interpréter comme la *densité volumique d'énergie interne du milieu* et sa valeur vaut la somme des densités de l'énergie électromagnétique proprement dite et de l'énergie du milieu matériel due au champ électromagnétique.

Si la dépendance entre **E** et **D** d'une part et entre **H** et **B** d'autre part est linéaire,

$$w = \frac{1}{2}\mathbf{ED} + \frac{1}{2}\mathbf{HB}.$$

Le premier terme porte ici le nom de *densité volumique d'énergie électrique dans le milieu*, et le second terme s'appelle *densité volumique d'énergie magnétique dans le milieu* bien que, comme il a été dit plus haut, l'énergie w comprend tant l'énergie du champ électromagnétique proprement dite que l'énergie de la substance, due au champ électromagnétique.

Pour les champs variables et les champs spatialement inhomogènes le travail dA ne représente pas une différentielle totale d'une fonction d'état quelconque des champs parce que $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$, $\mu_0^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{H} + \mathbf{J}$, où les grandeurs **P** et **J** dépendent en règle générale non seulement de **E** et de **H** mais aussi des dérivées de **E** et de **H** par rapport au temps et aux coordonnées.

D'ailleurs, même pour des champs constants et homogènes, le travail dA ne sera égal à la différentielle totale que dans des cas exceptionnels, à savoir pour les corps diélectriques et diamagnétiques (et encore d'une manière approximative), car c'est seulement pour ces substances que **P** et **J** sont pratiquement indépendants de la température, alors que dans d'autres cas **P** et **J** varient avec la température, ce qui implique la dépendance du travail dA vis-à-vis du processus de variation des champs.

Pourtant si l'on ajoute au travail dA effectué sur le système la chaleur $dQ = TdS$ acquise par le système (S étant l'entropie du système et T, sa température), on obtient la différentielle totale de l'énergie interne du système. C'est pourquoi, si aucun travail n'est effectué sur le milieu à l'exception de celui qui est lié à une variation des inductions **D** et **B**, la variation de la densité volumique de l'énergie interne du milieu sera égale à

$$dw = Tds + (\mathbf{E}d\mathbf{D} + \mathbf{H}d\mathbf{B}),$$

où s est. la densité volumique de l'entropie du milieu ; le milieu est supposé en équilibre thermodynamique et donc les champs sont

considérés comme indépendants du temps. La quantité dw est dans ce cas la différentielle totale de la fonction d'état du milieu $w \equiv \equiv w$ (**D**, **B**, s), fonction qui représente la densité volumique de l'énergie interne du milieu, c'est-à-dire de l'énergie qui comprend tant l'énergie proprement dite du champ électromagnétique (constant) qu'une partie de l'énergie du milieu due au champ électromagnétique.

Passons de la densité volumique de l'énergie w à la densité volumique de l'énergie libre $F = w - Ts$. Il est clair que

$$dF = -s dT + (\mathbf{E}d\mathbf{D} + \mathbf{H}d\mathbf{B}).$$

Cette formule montre que pour un processus isotherme le deuxième terme (c'est-à-dire dA) est la différentielle totale de la densité volumique de l'énergie libre du milieu $F = F$ (**D**, **B**, T). Dans le cas particulier où les dépendances entre **D** et **E** et entre **B** et **H** sont linéaires,

$$F = \frac{1}{2}\mathbf{E}\mathbf{D} + \frac{1}{2}\mathbf{H}\mathbf{B}.$$

Ici, les coefficients de proportionnalité entre les inductions et les intensités des champs peuvent varier de façon quelconque en fonction de la température, alors que si une telle dépendance n'existe pas, $F = w$. La grandeur F est appelée *densité volumique de l'énergie libre des champs dans un milieu* (soulignons une fois de plus que F comprend aussi bien la densité volumique de l'énergie proprement dite du champ électromagnétique qu'une partie de la densité volumique de l'énergie libre du milieu liée aux champs).

Dans toutes les formules indiquées plus haut les grandeurs **E** et **B** sont des superpositions de champs produits par des sources extérieures et engendrés par les courants moléculaires et les charges liées du milieu. Bien souvent on est obligé de rapporter le travail non pas à la variation des inductions **D** et **B** mais seulement à la variation des champs extérieurs. Dans un tel cas le bilan énergétique du milieu est également facile à établir. Pour ce faire, mettons à profit le fait que l'énergie du moment électrique dipolaire **d** dans le champ électrique extérieur $\mathbf{E}^{(e)}$ est égale à $-\mathbf{d}\mathbf{E}^{(e)}$ et que l'énergie du moment magnétique **m** dans le champ magnétique extérieur $\mathbf{H}^{(e)}$ est égale à $-\mu_0\mathbf{m}\mathbf{H}^{(e)}$. Il s'ensuit que le travail effectué sur les moments **d** et **m** lorsque les champs extérieurs varient de $d\mathbf{E}^{(e)}$ et de $d\mathbf{H}^{(e)}$ a pour valeur

$$da = -\mathbf{d}\cdot d\mathbf{E}^{(e)} - \mu_0\mathbf{m}d\mathbf{H}^{(e)}.$$

Respectivement le travail effectué par les champs extérieurs sur les moments électrique et magnétique, rapporté à l'unité de volume du milieu, sera

$$dA = -\mathbf{P}d\mathbf{E}^{(e)} - \mu_0\mathbf{J}d\mathbf{H}^{(e)}.$$

En ajoutant à cette expression la chaleur Tds, nous obtenons la différentielle totale de la densité volumique de l'énergie du milieu en tant que fonction des variables T, $\mathbf{E}^{(e)}$ et $\mathbf{H}^{(e)}$. Il en résulte que la différentielle de la densité volumique de l'énergie libre $F = w - Ts$ du milieu en présence de champs extérieurs s'exprime par

$$dF = -sdT - \mathbf{P}d\mathbf{E}^{(e)} - \mu_0 \mathbf{J}d\mathbf{H}^{(e)}.$$

§ 6.6. Systèmes d'unités électromagnétiques

Lors de l'étude des phénomènes électriques et magnétiques on emploie, en plus du système international d'unités SI, le *système d'unités de Gauss*. Ce système se présente comme naturel pour l'étude générale des phénomènes électromagnétiques parce qu'il reflète la propriété fondamentale du champ électromagnétique: son unité et la relativité de sa division en composantes électrique et magnétique (dans ce système les grandeurs **E**, **H**, **D**, **B** ont les mêmes dimensions). Mais pour une utilisation courante ce système est peu commode parce que les valeurs des grandeurs électromagnétiques qu'on rencontre en pratique, c'est-à-dire les valeurs des charges, des intensités de courants, des intensités de champs, des capacités, des résistances, des inductances, sont telles que dans le système de Gauss elles s'expriment soit par des nombres trop petits, soit par des nombres trop grands. Par exemple, à l'intensité de courant de 1 A correspond approximativement un millier de millions d'unités de Gauss d'intensité de courant et à une différence de potentiel de 1 V correspond 1/300 unité de Gauss de potentiel. Le système SI est exempt de cet inconvénient, ce qui lui vaut un large emploi, surtout dans les techniques.

Au cours du présent paragraphe nous nous arrêterons à la question générale concernant le choix de systèmes d'unités et expliquerons tout d'abord quelles grandeurs sont à choisir comme fondamentales.

D'une manière traditionnelle, on considère ordinairement comme *fondamentales* trois grandeurs: la longueur L, le temps T et la masse M pour lesquelles on choisit les unités de base. Dans le système C.G.S. ce sont le centimètre, la seconde et le gramme, et dans le système SI, le mètre, la seconde et le kilogramme. Les unités d'autres grandeurs, que l'on appelle *unités dérivées* ou *secondaires*, sont exprimées, à l'aide des équations qui traduisent des lois physiques correspondantes, à partir des unités de base d'un système d'unités donné, et leurs dimensions sont exprimées par celles de L, T, M.

Or, les lois étant nombreuses, les unités secondaires peuvent être choisies de différentes façons et, en outre, les unités fondamentales ne doivent pas être nécessairement au nombre de trois. Reportons-nous, par exemple, à la loi de la gravitation universelle

$$f = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

où m_1 et m_2 sont les masses de deux points matériels se trouvant à une distance r l'un de l'autre et G, la constante de la gravitation. Dans le système C.G.S. $G = 6{,}67 \cdot 10^{-8}$ cm³·s⁻²·g⁻¹. Mais cette constante étant universelle, on peut la considérer comme adimensionnée et égale à l'unité. Dans ce cas la loi de la gravitation prendra la forme

$$f = \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Cet énoncé doit évidemment être mis en accord avec la deuxième loi de Newton

$$m\mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t = \mathbf{f}.$$

En égalant entre elles les dimensions de la force $\mathbf{f}$ dans les deux formules, nous obtenons $MLT^{-2} = M^2L^{-2}$, d'où

$$M = L^3T^{-2},$$

ce qui signifie que les dimensions de la masse sont devenues dérivées et les unités de base ne sont qu'au nombre de deux : celle de longueur et celle de masse.

On peut aller encore plus loin en bénificiant de l'universalité de la vitesse de la lumière c dans le vide, qui peut être considérée comme dénuée de dimensions et égale à l'unité : $c = 1$. Dans ces conditions nous obtiendrons pour la longueur et le temps les mêmes dimensions et les mêmes unités : $L = T$. En réunissant les exigences $G = 1$ et $c = 1$, nous constituerons un système à une seule unité de base, celle de longueur. Les dimensions de la masse sont dans un tel système les mêmes que celles de la longueur: $M = L$.

En physique quantique, on introduit une nouvelle constante universelle appelée constante de Planck $\hbar$ dont la valeur dans le système C.G.S. est $\hbar \cong 10^{-27}$ cm²·s⁻¹·g. Mais, vu le caractère d'universalité de $\hbar$, cette constante peut être considérée comme dénuée de dimensions et prise égale à l'unité : $\hbar = 1$. En y joignant l'exigence de $c = 1$, nous obtenons un système à une seule unité de base puisque maintenant

$$T = L, \quad M = L^{-1},$$

c'est l'unité de longueur qui peut être prise comme unité de base. La masse s'exprime en inverse de longueur. La charge électrique est adimensionnée, et par exemple celle de l'électron $e = 1/\sqrt{137}$.

Examinons maintenant le choix des unités pour les grandeurs électromagnétiques. Pour résoudre ce problème il faut partir des énoncés les plus généraux des lois fondamentales de l'électromagnétisme. Commençons par la loi de Coulomb qu'il convient (comme il a déjà été dit plus haut) d'écrire sous la forme

$$F = k_1 \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

où q_1, q_2 sont les charges et k_1 est un certain coefficient qui possède en général des dimensions et dont le choix ne doit satisfaire qu'à la condition

$$[k_1]\,[q^2] = L^3T^{-2}M.$$

L'intensité E de champ électrique doit se définir comme une force exercée sur une charge unité de telle sorte qu'une charge q produise à une distance r une intensité

$$E = k_1\,(q/r^2).$$

Puis, considérons l'interaction entre les courants et écrivons la formule d'Ampère pour la force d'interaction des courants I_1 et I_2 qui parcourent deux conducteurs longs et minces parallèles sous la forme générale suivante (il s'en agissait déjà au § 4.1):

$$F_A = 2k_2\frac{I_1I_2}{d}\,l,$$

où l est la longueur des conducteurs, d, leur distance et k_2, un certain coefficient qui est en général doué de dimensions et est analogue au coefficient k_1. L'intensité de courant est définie dans ces conditions par la dérivée de la charge par rapport au temps: $I = (\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\,q$. Cela permet de comparer les dimensions de k_1 et k_2. Il est clair que

$$[k_1/k_2] = L^2T^{-2},$$

c'est-à-dire que k_1/k_2 a les dimensions d'un carré de la vitesse. Les forces F et F_A peuvent être mesurées avec une très haute précision, si bien que le rapport k_1/k_2 peut se trouver expérimentalement; il s'avère être égal au carré de la vitesse de la lumière c dans le vide:

$$k_1/k_2 = c^2.$$

Introduisons maintenant l'induction magnétique B. Elle doit être définie comme une grandeur proportionnelle (mais non égale!) à la force exercée suivant la formule d'Ampère sur un courant d'intensité unité:

$$B = 2k_2\alpha I/d,$$

où α est un certain coefficient doué en général de dimensions.

Le vecteur induction magnétique **B** doit également intervenir dans la loi de l'induction électromagnétique de Faraday:

$$\oint_L \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = -k_3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \mathbf{B}\,\mathrm{d}\mathbf{s},$$

où k_3 est aussi un certain coefficient arbitraire mais doué de dimensions.

Ainsi, nous avons à notre disposition quatre coefficients k_1, k_2, α, k_3 et, en les choisissant de différentes façons, on peut obtenir des systèmes d'unités différents. Pourtant ces coefficients ne peuvent pas être choisis tout à fait arbitrairement parce qu'ils ne sont pas indépendants. En effet, les équations de Maxwell revêtent mainte-

nant la forme suivante

$$\text{rot}\,\mathbf{E} = -k_3 \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}\,; \quad \text{div}\,\mathbf{E} = 4\pi k_1 \rho\,;$$

$$\text{rot}\,\mathbf{B} = 4\pi k_2 \alpha \mathbf{j} + \frac{k_2\alpha}{k_1}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}\,; \quad \text{div}\,\mathbf{B} = 0.$$

Pour les champs dans le vide il en résulte l'équation d'onde

$$\Delta\mathbf{B} - k_3 \frac{k_2\alpha}{k_1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{B} = 0.$$

Mais le coefficient devant $(\partial^2/\partial t^2)$ **B** doit être égal à $1/c^2$ quel que soit le système d'unités, c'est-à-dire que $k_1/(k_2k_3\alpha) = c^2$, et puisque $k_1/k_2 = c^2$, on a $\alpha = 1/k_3$.

Ainsi, on ne peut disposer librement que de deux coefficients parmi des quatre k_1, k_2, k_3, α, mais ils doivent être choisis de telle sorte que les systèmes d'unités résultant de ce choix soient commodes soit pour l'emploi pratique, soit pour les études théoriques. Il importe également que l'écriture des équations de Maxwell soit simple et même élégante pour justifier la phrase de Boltzmann « N'est-ce pas les Dieux qui ont tracé ces signes !». Il faut également avoir en vue que le nombre d'unités de base (tant mécaniques qu'électromagnétiques) est non nécessairement égal à trois.

De nos jours il existe cinq systèmes d'unités : le système C.G.S. électrostatique, le système C.G.S. électromagnétique, le système de Gauss, le système d'Heaviside-Lorentz et le système M.K.S. rationalisé (ou système SI). Les quatre premiers systèmes sont à trois grandeurs fondamentales : la longueur, le temps et la masse ayant les dimensions L, T, M (les unités de base étant le centimètre, la seconde et le gramme) ; dans le cinquième on a adjoint aux grandeurs fondamentales la charge de dimension Q ou l'intensité de courant électrique de dimension I (les unités étant le mètre, la seconde, le kilogramme, le coulomb ou l'ampère). Les valeurs des constantes k_1, k_2, α, k_3 dans ces systèmes sont données par le tableau ci-dessous

Système	k_1	k_2	α	k_3
Electrostatique C.G.S.	1	$c^2\,(L^{-2}T^2)$	1	1
Electromagnétique C.G.S.	$c^2\,(L^2T^{-2})$	1	1	1
Système de Gauss	1	$c^{-2}\,(L^{-2}T^2)$	$c\,(LT^{-1})$	$c^{-1}\,(L^{-1}T)$
Système d'Heaviside-Lorentz	$1/(4\pi)$	$1/(4\pi c^2)\,(L^{-2}T^2)$	$c\,(LT^{-1})$	$c^{-1}\,(L^{-1}T)$
Système SI	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot 10^9$ $(L^3T^{-2}MQ^{-2})$	$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$ (LMQ^{-2})	1	1

Les dimensions des grandeurs sont indiquées entre parenthèses. En SI on pose $k_1 = 1/(4\pi\varepsilon_0)$, $k_2 = \mu_0/(4\pi)$. C'est pourquoi ε_0 et μ_0 ont les dimensions $L^3T^{-2}MQ^{-2}$ et LMQ^{-2} (les dimensions de k_1 et k_2 ont été indiquées plus haut), c'est-à-dire que

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot 10^9 \frac{\mathrm{N\cdot m^2}}{\mathrm{C^2}}, \quad \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \frac{\mathrm{m\cdot kg}}{\mathrm{C^2}}.$$

Ecrivons maintenant les équations de Maxwell dans tous ces systèmes. Pour rendre plus complet notre exposé, nous indiquerons d'emblée toutes les relations pour les milieux matériels. Rappelons que le champ électrique régnant dans un milieu matériel se caractérise par deux vecteurs **E** et **D** liés dans le système de Gauss par la relation $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ (**P** étant le vecteur polarisation électrique). Dans d'autres systèmes cette relation s'écrit sous la forme

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \beta\mathbf{P},$$

où β est une certaine constante que l'on égale soit à 1, soit à 4π.

Le champ magnétique dans un milieu matériel se caractérise lui aussi par deux vecteurs: l'intensité moyenne **B** appelée induction magnétique et l'intensité d'aimantation **J** (analogue à **P**). L'intensité de champ **H** se définit par la relation

$$\mathbf{H} = \mu_0^{-1}\mathbf{B} - \beta'\mathbf{J},$$

où β' est une certaine constante que l'on égale soit à 1, soit à 4π.

Les équations de Maxwell et les expressions de la force de Lorentz sont rassemblées dans le tableau suivant:

Système	ε_0	μ_0	D, H	Equations de Maxwell	Force de Lorentz
Electrostatique C.G.S.	1	c^{-2}	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ $\mathbf{H} = c^2\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{J}$	$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$ $\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j} + \partial\mathbf{D}/\partial t$ $\mathrm{div}\,\mathbf{D} = 4\pi\rho$ $\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0$	$q(\mathbf{E} + [\mathbf{vB}])$
Electromagnétique C.G.S.	c^{-2}	1	$\mathbf{D} = c^{-2}\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{J}$	$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$ $\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j} + \partial\mathbf{D}/\partial t$ $\mathrm{div}\,\mathbf{D} = 4\pi\rho$ $\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0$	$q(\mathbf{E} + [\mathbf{vB}])$

Suite

Système	ε_0	μ_0	D, H	Equations de Maxwell	Force de Lorentz
Système de Gauss	1	1	$\mathbf{D}=\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}$ $\mathbf{H}=\mathbf{B}-4\pi\mathbf{J}$	$\text{rot}\ \mathbf{E}=$ $-\frac{1}{c}\ \partial\mathbf{B}/\partial t$ $\text{rot}\ \mathbf{H}=$ $=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}+$ $+\frac{1}{c}\ \partial\mathbf{D}/\partial t$ $\text{div}\ \mathbf{D}=4\pi\rho$ $\text{div}\ \mathbf{B}=0$	$q(\mathbf{E}+$ $+\frac{1}{c}\ [\mathbf{vB}])$
Système d'Heaviside-Lorentz	1	1	$\mathbf{D}=\mathbf{E}+\mathbf{P}$ $\mathbf{H}=\mathbf{B}-\mathbf{J}$	$\text{rot}\ \mathbf{E}=$ $-\frac{1}{c}\ \partial\mathbf{B}/\partial t$ $\text{rot}\ \mathbf{H}=$ $=\frac{1}{c}(\mathbf{j}+$ $+\partial\mathbf{D}/\partial t)$ $\text{div}\ \mathbf{D}=\rho$ $\text{div}\ \mathbf{B}=0$	$q\left(\mathbf{E}+\right.$ $\left.+\frac{1}{c}\ [\mathbf{vB}]\right)$
SI	$\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{9}\times$ $\times 10^{-9}$ $(M^{-1}L^{-3}TI^{2})$	$4\pi\cdot 10^{-7}$ $(MLT^{-2}I^{-2})$	$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}$ $\mathbf{H}=\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}-\mathbf{J}$	$\text{rot}\ \mathbf{E}=$ $-\partial\mathbf{B}/\partial t$ $\text{rot}\ H=\mathbf{j}+$ $+\frac{1}{c}\ \partial\mathbf{D}/\partial t$ $\text{div}\ \mathbf{D}=\rho$ $\text{div}\ \mathbf{B}=0$	$q\ (\mathbf{E}+[\mathbf{vB}])$

Indiquons encore le tableau d'unités en SI et leurs valeurs dans le système de Gauss (SG):

Grandeur	Dimensions en SI	Unité (symbole)	Sa valeur dans le système de Gauss
Longueur	L	mètre (m)	10^2 cm
Masse	M	kilogramme (kg)	10^3 g
Temps	T	seconde (s)	1 s
Intensité de courant électrique	I	ampère (A)	$3\cdot 10^9$ u. SG
Force	LMT^{-2}	newton (N)	10^5 dynes

Suite

Grandeur	Dimensions en SI	Unité (symbole)	Sa valeur dans le système de Gauss
Travail, énergie	L^2MT^{-2}	joule (J)	10^7 ergs
Puissance	L^2MT^{-3}	watt (W)	10^7 ergs·s^{-1}
Charge électrique	TI	coulomb (C)	$3\cdot 10^9$ u. SG
Densité de courant électrique	$L^{-2}I$	ampère par mètre carré (A/m²)	$3\cdot 10^5$ cm^{-2} u. SG d'intensité de courant
Densitsé de charge	$L^{-3}TI$	coulomb par mètre cube (C/m³)	$3\cdot 10^3$ cm^{-3} u. SG [de charge
Potentiel électrique, f.é.m.	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	volt (V)	1/300 u. SG de potentiel
Intensité de champ électrique	$LMT^{-3}I^{-1}$	volt par mètre (V/m)	$1/3\cdot 10^{-4}$ cm^{-1} u. SG de potentiel
Induction électrique	$L^{-2}TI$	coulomb par mètre carré (C/m²)	$12\cdot 10^5$ cm^{-2} u. SG de charge
Capacité électrique	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$	farad (F)	$9\cdot 10^{11}$ cm
Résistance électrique	$L^2MT^{-3}I^{-2}$	ohm (Ω)	$\frac{1}{9}\cdot 10^{-11}$ cm^{-1} s
Résistivité électrique	$L^3MT^{-3}I^{-2}$	ohm·mètre (Ω·m)	$\frac{1}{9}\cdot 10^{-9}$ s
Conductance électrique	$L^{-2}M^{-1}T^3I^2$	siemens (S)	$9\cdot 10^{11}$ cm s^{-1}
Induction magnétique	$MT^{-2}I^{-1}$	tesla (T)	10^4 G
Flux magnétique	$L^2MT^{-2}I^{-1}$	weber (Wb)	10^8 G·cm² = 10^8 M
Intensité de champ magnétique	$L^{-1}I$	ampère par mètre (A/m)	$4\pi\cdot 10^{-3}$ Œ
Intensité d'aimantation	$L^{-1}I$	ampère par mètre (A/m)	$\frac{1}{4\pi}\cdot 10^4$ G
Inductance électrique	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	henry (H)	10^9 cm

Ici, G ($\equiv$ $cm^{-1/2}\cdot g^{1/2}\cdot s^{-1}$) est le gauss, unité de **B** ; Œ ($\equiv$ $cm^{-1/2}\times$ $\times$ $g^{1/2}\cdot s^{-1}$) est l'œrsted, unité de **H** ; M ($\equiv$ $cm^{3/2}\cdot g^{1/2}\cdot s^{-1}$) est le maxwell, unité de flux magnétique (dans le système de Gauss).

Dans le tableau ci-contre sont rassemblées les lois et les formules fondamentales de l'électromagnétisme dans le système de Gauss (grandeurs marquées d'un astérisque *) et dans le système SI et sont indiquées les relations entre X^* et X :

Indiquons encore, avant de clore ce paragraphe, les définitions des unités de base adoptées dans le système SI.

Le mètre est la longueur égale à 1 650 763,73 longueurs d'onde, dans le vide, de la radiation correspondant à la transition entre les niveaux $2p_{10}$ et $5d_5$ de l'atome de krypton 86.

La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation

Système de Gauss	SI	Relation entre la grandeur X^* et la grandeur X correspondante
$c \cdot \mathrm{rot}\, \mathbf{E}^* = -\partial \mathbf{B}^*/\partial t$	$\mathrm{rot}\, \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$	$E^*/E = (4\pi\varepsilon_0)^{1/2}$
$\mathrm{div}\, \mathbf{D}^* = 4\pi\rho^*$	$\mathrm{div}\, \mathbf{D} = \rho$	$D^*/D = (4\pi/\varepsilon_0)^{1/2}$
$\mathrm{div}\, \mathbf{B}^* = 0$	$\mathrm{div}\, \mathbf{B} = 0$	$B^*/B = (4\pi/\mu_0)^{1/2}$
$c \cdot \mathrm{rot}\, \mathbf{H}^* = 4\pi \mathbf{j}^* + \partial \mathbf{D}^*/\partial t$	$\mathrm{rot}\, \mathbf{H} = \mathbf{j} + \partial \mathbf{D}/\partial t$	$H^*/H = (4\pi\mu_0)^{1/2}$
$\mathbf{F} = q^*\mathbf{E}^* + q^* [\mathbf{v}\mathbf{B}^*]/c$	$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q [\mathbf{v}\mathbf{B}]$	$q^*/q = (4\pi\varepsilon_0)^{-1/2}$
$w = (\mathbf{E}^*\mathbf{D}^* + \mathbf{B}^*\mathbf{H}^*)/(8\pi)$	$w = (\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{H})/2$	$\rho^*/\rho = (4\pi\varepsilon_0)^{-1/2}$
$\mathbf{S} = c[\mathbf{E}^*\mathbf{H}^*]/(4\pi)$	$\mathbf{S} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]$	$j^*/j = (4\pi\varepsilon_0)^{-1/2}$
$\mathbf{E}^* = -\mathrm{grad}\, \varphi^* - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t}$	$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\, \varphi - \partial \mathbf{A}/\partial t$	$I^*/I = (4\pi\varepsilon_0)^{-1/2}$
$\mathbf{B}^* = \mathrm{rot}\, \mathbf{A}^*$	$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\, \mathbf{A}$	$\varphi^*/\varphi = (4\pi\varepsilon_0)^{1/2}$
$\varepsilon \mathbf{E}^* = \mathbf{D}^*$, $\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha^*$	$\varepsilon_0\varepsilon \mathbf{E} = \mathbf{D}$, $\varepsilon = 1 + \alpha$	$A^*/A = (4\pi/\mu_0)^{1/2}$
$\mathbf{E}^* = \mathbf{D}^* - 4\pi \mathbf{P}^*$	$\varepsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{D} - \mathbf{P}$	$P^*/P = (4\pi\varepsilon_0)^{-1/2}$
$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}^*$; $\mu = 1 + 4\pi\chi^*$	$\mathbf{B} = \mu_0\mu \mathbf{H}$, $\mu = 1 + \chi$	$J^*/J = (4\pi/\mu_0)^{-1/2}$
$\mathbf{B}^* = \mathbf{H}^* + 4\pi \mathbf{J}^*$	$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{J})$	$R^*/R = 4\pi\varepsilon_0$
$a_0 = \hbar^2/(me^{*2})$	$a_0 = \hbar^2 4\pi\varepsilon_0/(me^2)$	$\sigma^*/\sigma = (4\pi\varepsilon_0)^{-1}$
$hcR_\infty = e^{*2}/(2a_0)$	$hcR_\infty = e^2/(8\pi\varepsilon_0 a_0)$	$C^*/C = (4\pi\varepsilon_0)^{-1}$
$\mu_B^* = e^*\hbar/(2\,mc)$	$\mu_B = e\hbar/(2\,m)$	$L^*/L = 4\pi/\mu_0$
$\gamma^* = g_L\, [e^*/(2\,mc)]$	$\gamma = g_L\, [e/(2\,m)]$	
$\omega_L = \mu_B^* B^*/\hbar$	$\omega_L = \mu_B B/\hbar$	$\mu_B^*/\mu_B = (4\pi/\mu_0)^{-1/2}$
$\alpha = e^{*2}/(\hbar c)$ (E.q.) [1]	$\alpha = e^2/(4\pi\varepsilon_0 \hbar c)$ (E.q.)	$e^*/e = (4\pi\varepsilon_0)^{-1/2}$
$r_e = e^{*2}/(mc^2)$	$r_e = e^2/(4\pi\varepsilon_0 mc^2)$	$\alpha^*/\alpha = \chi^*/\chi = (4\pi)^{-1}$

1) E.q. signifie que α est une constante de couplage en électrodynamique quantique

correspondant à la transition entre deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.

L'**ampère** est l'intensité d'un courant électrique constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 m l'un de l'autre dans le vide, produirait, entre ces conducteurs, une force de $2 \cdot 10^{-7}$ newton par mètre de longueur.

Le système SI comporte encore trois unités de base: la **mole**, unité de quantité de matière, la **candela** (cd), unité d'intensité lumineuse, et le **Kelvin**, unité de température thermodynamique. Les définitions de ces unités sont les suivantes:

La mole est la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 0,012 kg de carbone 12.

La candela est l'intensité lumineuse, dans la direction perpendiculaire, d'une surface de 1/600 000 mètre carré d'un corps noir à la température de congélation du platine sous la pression de 101 325 newtons par mètre carré.

Le Kelvin, unité de température thermodynamique, est égal à 1/273,16 de la température thermodynamique du point triple de l'eau.

FORMULES FONDAMENTALES

Equations de Maxwell pour les champs dans le vide	$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$, $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ $\operatorname{rot}\mathbf{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$, $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$
Equation d'onde	$\Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$, $c^2 = (\varepsilon_0\mu_0)^{-1}$
Densités d'énergies électrique et magnétique dans le vide	$w_e = \frac{1}{2}\mathbf{ED} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ $w_m = \frac{1}{2}\mathbf{BH} = \frac{1}{2\mu_0}B^2$
Vecteur densité de flux d'énergie électromagnétique (vecteur de Poynting)	$\mathbf{S} = [\mathbf{EH}]$
Impulsion d'un champ	$\mathbf{P}_F = c^{-2}\int\limits_V [\mathbf{EH}]\,dV$
Moment d'un champ	$\mathbf{M}_F = c^{-2}\int\limits_V [\mathbf{r}[\mathbf{EH}]]\,dV$
Equations de Maxwell-Lorentz pour les champs moyennés $\langle\mathbf{e}(\mathbf{r}, t)\rangle = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\langle\mathbf{b}(\mathbf{r}, t)\rangle = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$	$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$; $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$; $\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$; $\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho$; $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$; $\mathbf{H} = \mu_0^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{J}$
Densités de courant de polarisation et de courant d'aimantation	$\mathbf{j}_P = \partial P/\partial t$, $\mathbf{j}_m = \operatorname{rot}\mathbf{J}$
Conditions aux limites	$E_{1t} = E_{2t}$, $D_{1n} = D_{2n}$, $H_{1t} = H_{2t}$, $B_{1n} = B_{2n}$
Bilan énergétique d'un milieu matériel	$P^{(e)} = \int\limits_V (\mathbf{j}^2/\sigma)\,dV + \int\limits_V (\mathbf{E}\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{H}\dot{\mathbf{B}})\,dV + \int\limits_\Sigma \mathbf{S}\,d\mathbf{s}$
Variation de l'énergie interne d'un volume unité du milieu (s, densité d'entropie)	$dw = T\,ds + \mathbf{E}\,d\mathbf{D} + \mathbf{H}\,d\mathbf{B}$
Densité d'énergie libre pour un processus isotherme et des relations linéaires entre D, E et B, H	$F = \frac{1}{2}(\mathbf{ED} + \mathbf{HB})$

CHAPITRE 7

LA PHYSIQUE DE L'ESPACE-TEMPS

§ 7.1. Transformations de Lorentz

Au § 6.2 il a été indiqué que les ondes électromagnétiques transversales peuvent se propager dans le vide avec une vitesse bien déterminée $c = (299792{,}4580 \pm 0{,}0012)$ km/s. Ce résultat paraît être paradoxal parce qu'il n'est lié à aucun système de référence et de ce fait est en contradiction avec la loi de composition des vitesses de la mécanique classique. En effet, suivant cette loi, si $\mathbf{v}$ est la vitesse de l'onde dans un référentiel d'inertie K, la vitesse de cette onde dans un autre référentiel d'inertie K' doit être égale à $\mathbf{v} - \mathbf{V}$, où $\mathbf{V}$ est la vitesse du système K' par rapport à K. Or, la vitesse de l'onde électromagnétique ne satisfait pas à cette condition parce qu'elle a une même valeur constante dans tous les référentiels d'inertie.

Pour pouvoir lever ce paradoxe il faut abandonner l'hypothèse, faite tacitement en mécanique classique, que le temps a un caractère absolu et considérer comme fausse la *transformation de Galilée* $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t$ qui lie entre elles les coordonnées $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}'$ d'un événement quelconque dans les systèmes de référence K et K'.

En effet, considérons une équation d'onde unidimensionnelle

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0,$$

dont les solutions ont la forme d'ondes planes se propageant à la vitesse c. Par raison de simplification, supposons que la grandeur $\varphi \equiv \varphi(x, t)$ est une certaine fonction scalaire de x et de t. Alors, si cette équation se rapporte à un référentiel d'inertie K, l'équation d'onde correspondant à un autre référentiel d'inertie K' doit être de la forme

$$\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t'^2} = 0,$$

où $\varphi' \equiv \varphi'(x', t') = \varphi(x, t)$. Mais une telle relation entre les équations qui déterminent les grandeurs φ et φ' est impossible si la transformation de Galilée $x' = x - Vt$, $t' = t$ est valable. C'est pourquoi nous la remplacerons par une transformation plus générale

$$x' = \alpha x + \beta t, \quad t' = \gamma x + \delta t,$$

où α, β, γ et δ sont certaines constantes qui ne peuvent dépendre que de la vitesse relative V des référentiels. Essayons de les choisir de telle sorte que l'équation de φ' découle de celle de φ. Remarquons à cet effet que

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi'}{\partial x'^2}\alpha^2 + 2\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x'\,\partial t'}\alpha\gamma + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial t'^2}\gamma^2,$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\varphi'}{\partial x'^2}\beta^2 + 2\frac{\partial^2\varphi'}{\partial x'\,\partial t'}\beta\delta + \frac{\partial^2\varphi'}{\partial t'^2}\delta^2.$$

De ce fait, la constance ou, comme on dit, l'*invariance* de l'équation d'onde conduit aux conditions suivantes:

$$-\gamma^2 + \delta^2/c^2 = 1; \quad \alpha^2 - \beta^2/c^2 = 1; \quad \alpha\gamma - \beta\delta/c^2 = 0.$$

En posant $\beta/\alpha = -V$, nous obtenons une transformation modifiée de Galilée

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

que l'on appelle ***transformation de Lorentz.***

Il est facile de voir que V est la vitesse due référentiel K' par rapport au référentiel K. En effet, l'origine des coordonnées du référentiel K', c'est-à-dire le point $x' = 0$, se déplace par rapport au référentiel K suivant la loi $x - Vt = 0$.

La chose la plus étonnante dans la transformation de Lorentz est que

le temps t' dans le référentiel K' ne coïncide pas avec le temps t dans le référentiel K.

On peut donc dire que l'invariance de la vitesse de la lumière s'obtient au prix de l'abandon du caractère absolu du temps.

Pour éclaircir ce point, envisageons deux événements qui se sont réalisés en un certain point x du référentiel K à des instants de temps t_1 et t_2. Alors, dans le référentiel K' les instants correspondants seront

$$t_1' = \frac{t_1 - Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad t_2' = \frac{t_2 - Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

d'où il résulte que

$$t_2 - t_1 = (t_2' - t_1')\sqrt{1 - V^2/c^2},$$

c'est-à-dire que $t_2 - t_1 \neq t_2' - t_1'$.

Le sens physique de cette relation est le suivant. Envisageons une horloge U se trouvant au repos dans le référentiel K au point x et soient t_1 et t_2 deux instants mesurés par cette horloge. Par rapport au référentiel K' l'horloge U se déplace à la vitesse $-V$, et t_1' et t_2' sont les instants marqués par deux horloges différentes U_1' et U_2' au repos dans le référentiel K' aux points x_1' et x_2'. Alors les instants t_1'

et t'_2 seront marqués par les horloges U'_1 et U'_2 à des instants où l'horloge U passe devant elles. Ainsi,

le temps mesuré par une horloge en mouvement est inférieur à celui marqué par une horloge au repos.

Il semble à première vue que cette affirmation est en contradiction avec l'équivalence de tous les référentiels d'inertie, mais en réalité il n'en est pas ainsi parce que dans le référentiel K il n'y a qu'une seule horloge alors que dans le référentiel K' il y en a deux.

En comparant les temps marqués par les horloges, nous avons tacitement supposé que toutes les horloges liées au référentiel K (et au référentiel K') marchaient en synchronisme. Mais puisque nous avons dû abandonner le caractère absolu du temps, il convient maintenant d'expliquer comment on peut en principe synchroniser les horloges l'une sur l'autre.

Le plus simple pour synchroniser les horloges est d'utiliser des signaux lumineux. A cet effet, plaçons en des points différents du référentiel considéré des horloges identiques marchant identiquement. Envoyons à partir du point où se trouve l'horloge U_1, à l'instant t_1, un signal lumineux vers l'horloge U_2. Si l est la distance qui sépare les deux horloges, nous devons marquer sur l'horloge U_2 le temps $t_2 = t_1 + l/c$.

Revenons à la transformation de Lorentz et considérons une barre au repos dans le référentiel K'. Sa longueur est $L = x_2 - x_1$, où x_2 et x_1 sont les coordonnées des extrémités de la barre. Cherchons la longueur de cette barre dans le référentiel K'. A cet effet il faut trouver les coordonnées x'_2 et x'_1 des extrémités de la barre à un même instant t'. En récrivant la transformation de Lorentz sous la forme

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \qquad t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

(elle ne diffère de la précédente que par la substitution de $-V$ à V) et en posant $t'_1 = t'_2 = t'$, nous obtiendrons

$$x'_2 - x'_1 = (x_2 - x_1)\sqrt{1 - V^2/c^2}.$$

Ainsi,

la longueur de la barre est différente dans différents référentiels. Elle a sa valeur maximale dans le référentiel par rapport auquel la barre est au repos. Cette longueur est appelée *longueur propre* de la barre.

La longueur de la barre dans le référentiel par rapport auquel elle est animée d'un mouvement est $(1 - V^2/c^2)^{-1/2}$ fois inférieure à sa longueur propre. Ce phénomène est connu sous le nom de *contraction de Lorentz*.

La transformation de Lorentz que nous venons de considérer a la propriété de ne pas faire varier ou comme on dit de *laisser invariante*

la quantité $x^2 - c^2t^2$, c'est-à-dire que $x'^2 - c^2t'^2 = x^2 - c^2t^2$. Cette transformation n'a pas porté sur les coordonnées y et z, mais dans le cas général nous avons affaire à des transformations qui portent sur toutes les trois coordonnées x, y, z. Les transformations de Lorentz ont la propriété de laisser inchangée la forme quadratique $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2.$$

Dans cette relation x, y, z déterminent les coordonnées d'espace d'un événement quelconque et t est l'instant où cet événement s'est produit dans le référentiel K, alors que x', y', z', t' ont même sens pour le même événement dans le référentiel K'.

Les transformations de Lorentz sont susceptibles d'une interprétation géométrique simple. Introduisons à cet effet un espace à quatre dimensions représenté par un ensemble de points (x_1, x_2, x_3, x_4), où $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$, et x, y, z, t sont les coordonnées d'espace et de temps d'un événement quelconque. Les points appartenant à cet espace sont appelés *points d'univers* et à chacun de tels points correspond un certain événement.

Les transformations de Lorentz laissent invariante la quantité $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$. On peut donc dire qu'elles correspondent à des « rotations » du système de coordonnées dans l'espace à quatre dimensions considéré (que l'on appelle espace pseudo-euclidien à quatre dimensions ou encore continuum espace-temps de Minkowski).

Par exemple, le cas particulier des transformations de Lorentz que nous avons examiné plus haut correspond à une « rotation » dans un plan (x_1, x_4). La rotation à quatre dimensions du système de coordonnées peut toujours être considérée comme le mouvement de translation du système de référence dans une certaine direction, associée à sa rotation dans un espace tridimensionnel ordinaire.

Il est facile d'obtenir une transformation de Lorentz correspondant au mouvement du référentiel K' par rapport au référentiel K dans une direction arbitraire avec une vitesse **V**. A cet effet, représentons le vecteur **r** sous la forme

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_\perp + \mathbf{r}_\parallel = \left(\mathbf{r} - \frac{(\mathbf{rV})\,\mathbf{V}}{V^2}\right) + \frac{(\mathbf{rV})\,\mathbf{V}}{V^2},$$

où $\mathbf{r}_\parallel$ et $\mathbf{r}_\perp$ sont les composantes du vecteur **r** dans la direction de la vitesse **V** et dans une direction perpendiculaire à cette vitesse. En vertu des formules obtenues plus haut nous pouvons écrire

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - (\mathbf{rV})\,\mathbf{V}/V^2 - (t - \mathbf{rV}/V^2)\,\mathbf{V}/\sqrt{1 - V^2/c^2},$$
$$t' = (t - \mathbf{rV}/c^2)/\sqrt{1 - V^2/c^2}.$$

Les transformations de Lorentz, qui relient entre eux les différents référentiels d'inertie, et la relativité du temps et de l'espace

qui en découle constituent la base de la *théorie de la relativité*, une des théories physiques modernes les plus importantes. Cette théorie reposant sur les recherches de Lorentz, de Poincaré et d'Einstein a été mise au point en 1905 par Einstein à qui revient le mérite d'avoir donné une interprétation profonde actuelle de tous les problèmes de la relativité.

§ 7.2. Temps propre

Considérons deux événements: (x_1, y_1, z_1, t_1) et (x_2, y_2, z_2, t_2). Si l'on forme une quantité

$$s_{12}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - c^2 (t_1 - t_2)^2$$

il est évident qu'elle se comportera lors des transformations de Lorentz comme la quantité $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$, c'est-à-dire sera invariant:

$$s_{12}^2 = s_{12}'^2,$$

où $s_{12}'^2 = (x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 + (z_1' - z_2')^2 - c^2 (t_1' - t_2')^2$. La grandeur s_{12} s'appelle *intervalle* entre les événements considérés.

Pour des événements infiniment voisins l'un de l'autre, se produisant dans le référentiel K, l'intervalle est déterminé par la formule

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 - c^2\mathrm{d}t^2.$$

En passant à un autre référentiel K', nous avons

$$\mathrm{d}s'^2 = \mathrm{d}x'^2 + \mathrm{d}y'^2 + \mathrm{d}z'^2 - c^2\mathrm{d}t'^2.$$

Le ralentissement de la marche d'une horloge en mouvement peut être lié à la notion d'intervalle.

Supposons qu'une horloge soit animée d'un mouvement quelconque par rapport au référentiel K. Lions à cette horloge un référentiel K' qui ne sera pas dans le cas général un référentiel d'inertie. Pourtant pendant des intervalles de temps infiniment petits, le référentiel K' peut être considéré de toute évidence comme un système inertiel.

Prenons maintenant un intervalle de temps infiniment petit, égal à $\mathrm{d}t$ dans le référentiel K, et cherchons l'intervalle de temps correspondant mesuré par l'horloge dans le référentiel K'. Dans ce dernier référentiel l'horloge est au repos, de sorte que pour elle $\mathrm{d}x' = \mathrm{d}y' = \mathrm{d}z' = 0$. En nous reportant à l'expression de l'intervalle et en tenant compte de son invariance, nous obtenons

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 - c^2\mathrm{d}t^2 = - c^2\mathrm{d}t'^2.$$

Si l'horloge se déplace par rapport à K avec une vitesse v, dans l'expression de $\mathrm{d}s^2$ on peut remplacer $\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$ par $v^2\mathrm{d}t^2$. Il vient

$$\mathrm{d}t' = \sqrt{1 - v^2/c^2}\,\mathrm{d}t.$$

Soulignons qu'ici v peut être une fonction arbitraire du temps parce que pour établir cette expression nous avons supposé seulement que K' était un référentiel d'inertie pendant l'intervalle dt.

Notre horloge est en mouvement à bord d'un certain objet (par rapport auquel elle est au repos). Il est donc naturel d'appeler le temps marqué par cette horloge *temps propre* (ou *vrai*) *de l'objet*. Par la suite il sera noté τ, si bien que

$$d\tau = dt\sqrt{1-v^2/c^2};$$

$$\tau_1-\tau_2=\int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{1-v^2/c^2}.$$

Nous voyons que

le temps propre d'un objet en mouvement est toujours plus petit que le temps mesuré par une horloge au repos quelconque.

De l'invariance de l'intervalle résulte la formule générale pour $d\tau$

$$d\tau = ds/(ic).$$

Pour en terminer avec le temps propre, illustrons la variation de la marche du temps sur l'exemple de désintégration d'une particule élémentaire appelée muon. La durée de vie d'un muon au repos $\tau_\mu = 2{,}2\cdot 10^{-6}$ s. Supposons qu'un muon soit créé dans l'atmosphère à une altitude de 30 km et qu'il soit animé d'une vitesse $v =$ $= 299\,791$ km/s. Pour atteindre la surface terrestre il doit mettre un temps $t = 30/300\,000 = 10^{-4}$ s. Ce temps est beaucoup plus grand que τ_μ et néanmoins le muon arrive à atteindre la Terre. Cela est possible du fait que la durée de vie du muon par rapport à la Terre

$$\Delta t = \tau_\mu/\sqrt{1-v^2/c^2} \approx 0{,}7\cdot 10^{-3}\ \text{s}.$$

§ 7.3. Composition des vitesses

En abordant les transformations de Lorentz, nous avons dit que l'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide, c'est-à-dire la valeur constante de cette vitesse dans tous les référentiels d'inertie, est en contradiction avec la loi de composition des vitesses valable en mécanique classique. Regardons maintenant comment est levée cette contradiction et quelle est la forme de la loi de composition des vitesses dans la théorie de la relativité.

Les vitesses d'une particule quelconque dans les référentiels K et K' sont égales respectivement à

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt, \quad \mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt',$$

où les différentielles des coordonnées et des temps sont liées par les transformations de Lorentz

$$dx = \frac{dx' + V\,dt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + V\,dx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

(le référentiel K' est supposé en mouvement à la vitesse V par rapport à K). En divisant les trois premières égalités par la quatrième, nous obtenons les formules de transformation de la vitesse qui nous intéressent :

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - v'_x V/c^2}.$$

Si l'on fait tendre vers l'infini la vitesse c, on obtient les formules de composition des vitesses de la mécanique classique.

Si la particule se déplace le long de l'axe des x, sa vitesse a pour valeur

$$v = \frac{v' + V}{1 + v'V/c^2}.$$

En y posant $v' = c$, nous obtenons $v = c$, c'est-à-dire que la vitesse de la lumière jouit effectivement de la propriété d'invariance.

La loi de composition des vitesses peut être mise sous une forme bien élégante si l'on introduit des tangentes hyperboliques des vitesses (divisées par c) $\alpha = \text{th}\,(v/c)$, $\alpha' = \text{th}\,(v'/c)$, $\gamma = \text{th}\,(V/c)$. Nous obtiendrons

$$\alpha = \alpha' + \gamma,$$

c'est-à-dire que *lors d'un mouvement parallèle ce sont les tangentes hyperboliques des vitesses qui s'ajoutent.* Il est aisé de s'assurer que

$$1 - v^2/c^2 = (1 - v'^2/c^2)\,(1 - V^2/c^2)/(1 + \mathbf{v}'\mathbf{V}/c^2)^2.$$

Cette formule montre que si $v' = c$, alors $v = c$ et que cette conclusion est valable quelle que soit la direction de propagation de la lumière. En outre, si $v'^2 \leqslant c^2$, alors $v^2 \leqslant c^2$. Cela signifie que *la vitesse des objets matériels ne peut pas être supérieure à la vitesse de la lumière.* Une telle conclusion découle aussi immédiatement de la forme des transformations de Lorentz, car la vitesse relative des référentiels, c'est-à-dire la vitesse relative des objets matériels, ne peut pas être plus grande que c, puisque pour $V > c$ les transformations de Lorentz cessent d'avoir un sens.

Déterminons comment varie la direction de la vitesse de la particule au passage d'un référentiel à un autre. En admettant, pour simplifier, que $v_z = v'_z = 0$ et en notant θ et θ' les angles que les vitesses $\mathbf{v}$ et $\mathbf{v}'$ font avec l'axe des x (la vitesse relative des référentiels étant dirigée le long de l'axe des x), si bien que $v_x = v \cos\theta$, $v_y = v \sin\theta$, $v'_x = v' \cos\theta'$, $v'_y = v' \sin\theta'$, nous tirons des formules

de transformations de vitesses

$$\operatorname{tg}\theta = v'\sqrt{1-V^2/c^2}\sin\theta/(v'\cos\theta' + V).$$

Dans le cas le plus intéressant de la propagation de la lumière, $v = v' = c$ et la formule prend la forme

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{1-V^2/c^2}}{\cos\theta' + V/c}\sin\theta'.$$

Cette formule décrit l'*aberration de la lumière*, c'est-à-dire la variation de la direction de propagation de la lumière lors du passage d'un référentiel à un autre.

Pour l'aberration de la lumière il est aussi facile d'obtenir les formules suivantes:

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{1-V^2/c^2}}{1+\cos\theta'\cdot V/c}\sin\theta'; \quad \cos\theta = \frac{\cos\theta' + V/c}{1+\cos\theta'\cdot V/c}.$$

Pour les faibles valeurs du rapport V/c nous en déduisons

$$\theta' - \theta = \sin\theta'\cdot V/c, \quad V/c \ll 1.$$

§ 7.4. Applications des transformations de Lorentz au champ électromagnétique

Au § 5.2 nous avons signalé la relativité des champs électrique et magnétique. Si par exemple dans un référentiel K il existe un champ magnétique **B** et il n'y a pas de champ électrique, dans un référentiel K' qui se déplace à une vitesse **V** par rapport à K, prendra naissance un champ électrique égal, pour de faibles vitesses relatives des référentiels, à $[\mathbf{VB}]/c$ (ici et dans la suite de ce chapitre nous désignons par **B** l'induction de champ magnétique et utilisons le système d'unités de Gauss; comme il s'agit du vide, $\mathbf{B} = \mathbf{H}$).

On peut donc parler de la transformation des champs électrique et magnétique lors du passage d'un référentiel d'inertie à un autre. Pour le domaine des faibles vitesses $V \ll c$ les formules de transformation ont été établies au § 5.2, elles revêtent la forme suivante:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{VH}], \quad \mathbf{H}' = \mathbf{H} - \frac{1}{c}[\mathbf{VE}],$$

où les champs **E** et **H** exercent leur action dans le référentiel K, et les champs **E**′ et **H**′ dans le référentiel K'.

Proposons-nous maintenant de montrer que par application de ces formules on peut obtenir une transformation générale de champs valable pour toute vitesse V.

En introduisant la notation $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{E} + i\mathbf{H}$, on peut évidemment récrire la transformation de champs pour les faibles valeurs de V/c

sous la forme

$$\psi' = \psi - \frac{i}{c}[V\psi],$$

d'où, pour V parallèle à l'axe des z,

$$\psi'_x = \psi_x + i\frac{V}{c}\psi_y, \quad \psi'_y = \psi_y - i\frac{V}{c}\psi_x, \quad \psi'_z = \psi_z.$$

Puisque $\psi'_z = \psi_z$, il s'agit de la transformation d'un vecteur complexe ψ à deux composantes: $\psi_x \equiv \psi_1$ et $\psi_y \equiv \psi_2$. Ecrivons cette transformation sous forme matricielle:

$$\psi_i \rightarrow \psi'_i = L_{ik}(V/c)\,\psi_k$$

ou, en abrégé,

$$\psi' = L\,(V/c)\,\psi,$$

où L est la matrice de transformation dépendant de V/c (sur l'indice qui se rencontre deux fois la sommation se fait de 1 à 2). Pour les faibles valeurs du rapport $V/c = \beta$ la matrice L prend la forme

$$L(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & i\beta \\ -i\beta & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta \ll 1,$$

et le problème consiste à trouver une matrice $L(\beta)$ valable pour tout β (la vitesse adimensionnée β sera parfois appelée vitesse tout court).

A cet effet, passons du référentiel K' qui se meut par rapport à K avec la vitesse β à un référentiel K'' qui se meut par rapport à K' avec la vitesse β' (dirigée elle aussi le long de l'axe des z). Il en résulte deux transformations:

$$\psi \rightarrow \psi' = L(\beta)\,\psi, \quad \psi' \rightarrow \psi'' = L(\beta')\,\psi',$$

mais elles sont équivalentes à une seule transformation

$$\psi \rightarrow \psi'' = L(\beta'')\,\psi$$

correspondant au passage $K \rightarrow K''$, où β'' est la vitesse du référentiel K'' par rapport à K. Nous pouvons donc écrire une relation matricielle suivante:

$$L(\beta'') = L(\beta)\,L(\beta'),$$

où, suivant la loi de composition des vitesses,

$$\beta'' = (\beta + \beta')/(1 + \beta\beta').$$

Rappelons-nous maintenant que si l'on passe des vitesses aux tangentes hyperboliques des vitesses $\alpha = \operatorname{th}\beta$, la loi de composition des vitesses prend la forme $\alpha'' = \alpha + \alpha'$. Par conséquent, en introduisant la désignation $L(\beta) = \tilde{L}(\alpha)$, nous obtenons

$$\tilde{L}(\alpha + \alpha') = \tilde{L}(\alpha)\,\tilde{L}(\alpha').$$

C'est une équation fonctionnelle de la matrice $\tilde{L}$, dont la solution est triviale:

$$\tilde{L}(\alpha) = e^{\alpha\sigma},$$

où σ est une constante (dans le cas considéré une matrice à deux lignes est constante, c'est-à-dire indépendante de α). Sa forme est facile à établir si nous tenons compte que pour de faibles α

$$\tilde{L}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & i\alpha \\ -i\alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad |\alpha| \ll 1.$$

Il est évident que cette matrice peut se mettre sous la forme $e^{\alpha\sigma}$, où

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, nous avons trouvé la forme de $\tilde{L}(\alpha)$ pour tout α. En remarquant que

$$\sigma^{2n} = 1, \quad \sigma^{2n+1} = \sigma,$$

où n est un entier, et en faisant usage du développement $e^z = \Sigma z^n/n!$, on peut s'assurer que

$$\tilde{L}(\alpha) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\alpha & i\operatorname{sh}\alpha \\ -i\operatorname{sh}\alpha & \operatorname{ch}\alpha \end{pmatrix}.$$

Il ne nous reste maintenant qu'à passer de $\tilde{L}(\alpha)$ à $L(\beta)$. Il vient

$$L(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} 1 & i\beta \\ -i\beta & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = V/c.$$

En nous rappelant que $\psi' = L(\beta)\psi$, où $\psi = (\mathbf{E} + i\mathbf{H})_\perp$ et le symbole $\perp$ sert à désigner les composantes perpendiculaires (par rapport à **V**) des champs, il est facile d'établir les formules générales de transformation de Lorentz pour les champs:

$$\mathbf{E}'_\perp = \left(\mathbf{E}_\perp + \frac{1}{c}[\mathbf{V}\mathbf{H}_\perp]\right) \Big/ \sqrt{1 - V^2/c^2},$$

$$\mathbf{H}'_\perp = \left(\mathbf{H}_\perp - \frac{1}{c}[\mathbf{V}\mathbf{E}_\perp]\right) \Big/ \sqrt{1 - V^2/c^2},$$

$$\mathbf{E}'_\parallel = \mathbf{E}_\parallel, \quad \mathbf{H}'_\parallel = \mathbf{H}'_\parallel,$$

où $\mathbf{E}_\parallel$ et $\mathbf{H}_\parallel$ sont les composantes des champs orientées suivant **V**. Nous voyons que

les composantes parallèles des champs restent inchangées lors du passage d'un référentiel à un autre, alors que les composantes perpendiculaires « s'entremêlent ».

Des formules de transformation de champs il résulte que

$$E^2 - H^2 = E'^2 - H'^2, \quad \mathbf{EH} = \mathbf{E'H'};$$

les grandeurs $E^2 - H^2$ et EH sont des invariants. Cependant, il y a un point à éclaircir ici. Le fait est que nous n'avons considéré que les transformations continues de Lorentz qui représentent des rotations de l'univers à quatre dimensions de Minkowski. Mais il peut y avoir, en principe, encore deux transformations discrètes : la transformation de la réflexion spatiale ($\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = -\mathbf{r}$) et celle de l'inversion du temps ($t \to t' = -t$). Lors de ces transformations qui sont elles aussi à prendre en compte, la grandeur EH change de signe, c'est-à-dire que EH → → E'H' = —EH. C'est pourquoi, si nous voulons avoir un invariant vrai pour absolument toutes les transformations de l'univers à quatre dimensions, nous devons prendre $(\mathbf{EH})^2$ au lieu de EH.

Faisons usage de la transformation de Lorentz pour déterminer les intensités des champs électrique et magnétique produits par une charge électrique animée d'un mouvement uniforme. Supposons que cette charge se déplace dans le référentiel K avec la vitesse V le long de l'axe des z. Il s'agit de calculer les champs **E** et **H** qu'elle engendre. Passons au référentiel K' par rapport auquel la charge est au repos. Dans ce référentiel il n'existe évidemment que le champ électrique

$$\mathbf{E}' = e\mathbf{r}'/r'^3.$$

Le référentiel K se déplace par rapport à K' avec la vitesse $-\mathbf{V}$. Par conséquent, les formules de transformation de champs donnent

$$\mathbf{E}_\perp = \mathbf{E}'_\perp/\sqrt{1-V^2/c^2}, \quad \mathbf{E}_\parallel = \mathbf{E}'_\parallel, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{c}[\mathbf{VE}'_\perp]/\sqrt{1-V^2/c^2},$$

et il ne reste qu'à exprimer le rayon vecteur $\mathbf{r}'$ joignant la charge au point d'observation (x', y', z') dans le référentiel K' par l'intermédiaire du rayon vecteur $\mathbf{r}$ joignant la charge au point d'observation (x, y, z) dans le référentiel K (ses composantes sont $x - Vt$, y, z). Les composantes de ces vecteurs sont liées par les formules

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

qui permettent de s'assurer facilement que

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{r}}{r^{*3}}(1 - V^2/c^2),$$

où $r^{*2} = (x - Vt)^2 + (y^2 + z^2)(1 - V^2/c^2) = r^2\,(1 - V^2/c^2 \sin^2\Theta)$ et Θ est l'angle que font entre eux **r** et **V**. Ainsi, en définitive,

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{r}}{r^3}\frac{1 - V^2/c^2}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\sin^2\Theta\right)^{3/2}}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{c}[\mathbf{VE}].$$

Nous voyons qu'à une distance donnée de la charge l'intensité **E** du champ électrique augmente avec Θ de zéro jusqu'à $\pi/2$. Pour

$\Theta = 0$, c'est-à-dire lorsque $\mathbf{r} \parallel \mathbf{V}$, cette intensité est minimale:

$$E_{\parallel} = \frac{e}{r^2}(1 - V^2/c^2).$$

Pour $\Theta = \pi/2$, c'est-à-dire lorsque $\mathbf{r} \perp \mathbf{V}$, l'intensité prend sa valeur maximale:

$$E_{\perp} = \frac{e}{r^2} \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Quand V tend vers c, l'intensité longitudinale du champ tend vers zéro. On peut dire que

lorsque V augmente, tout se passe comme si le champ électrique de la charge en mouvement « s'aplatissait » dans la direction du mouvement et devenait transversal quand $V \to c$. Le champ magnétique est perpendiculaire au champ électrique et quand $V \to c$, son intensité devient égale à celle du champ électrique.

§ 7.5. Impulsion et énergie d'une particule

Après avoir étudié les transformations de Lorentz nous passons maintenant à la loi dynamique du mouvement dans la théorie de la relativité ou, comme on dit encore, en dynamique relativiste. A cet effet, il faut disposer des expressions donnant l'impulsion d'une particule, dont la dérivée par rapport au temps doit être toujours égale à la force appliquée à la particule.

En mécanique classique, l'impulsion (rappelons qu'on dit encore la quantité de mouvement) est définie par le produit de la masse d'une particule m par sa vitesse $\mathbf{v}$: $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Or, dans la théorie de la relativité une telle définition ne peut pas être correcte, car l'impulsion peut prendre une valeur aussi élevée que l'on veut tant en mécanique classique qu'en mécanique relativiste, alors que la vitesse dans la théorie de la relativité est limitée et ne peut pas être supérieure à c.

C'est pourquoi la relation de définition de l'impulsion $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ doit être modifiée. Nous allons montrer que la structure de la nouvelle expression de $\mathbf{p}$ peut être établie en partant de la loi de conservation de l'impulsion et de l'exigence de son invariance par rapport aux transformations de Lorentz.

A cet effet, effectuons par la pensée une expérience suivante. Soient deux observateurs A et B qui se déplacent le long de l'axe des x avec une vitesse relative V et lancent l'un à l'autre, le long de l'axe des y, avec la même vitesse u, des billes de même masse. Les billes entrent en collision le long de l'axe des y, de sorte que les composantes x des vitesses des deux billes se conservent.

Introduisons les référentiels K_A et K_B liés respectivement aux observateurs A et B et désignons les vitesses des billes dans ces référentiels par $\mathbf{v}_1^A$ et $\mathbf{v}_2^B$ avant collision et par $\mathbf{v}_3^A$ et $\mathbf{v}_4^B$ après collision. Alors, en appliquant la loi de composition des vitesses, il est aisé de

déterminer les composantes de ces vecteurs dans les deux référentiels :

$$(\mathbf{v}_1^A)_x = 0\,; \quad (\mathbf{v}_1^A)_y = u\,; \quad (\mathbf{v}_3^A)_x = 0\,; \quad (\mathbf{v}_3^A)_y = -u'\,;$$
$$(\mathbf{v}_2^B)_x = 0\,; \quad (\mathbf{v}_2^B)_y = -u\,; \quad (\mathbf{v}_4^B)_x = 0\,; \quad (\mathbf{v}_4^B)_y = u',$$
$$(\mathbf{v}_2^A)_x = -V\,; \quad (\mathbf{v}_2^A)_y = -u\sqrt{1-V^2/c^2}\,;$$
$$(\mathbf{v}_1^B)_x = V\,; \quad (\mathbf{v}_1^B)_y = u\sqrt{1-V^2/c^2}\,;$$
$$(\mathbf{v}_3^B)_x = V\,; \quad (\mathbf{v}_3^B)_y = -u'\sqrt{1-V^2/c^2}\,;$$
$$(\mathbf{v}_4^A)_x = -V\,; \quad (\mathbf{v}_4^A)_y = u'\sqrt{1-V^2/c^2},$$

où $-u'$ est la composante y de la vitesse de la première bille dans le référentiel K_A après collision.

Supposons maintenant que l'impulsion $\mathbf{p}$ de la particule se définisse par la formule

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}f\,(v^2),$$

où m est la masse de la particule et f, une certaine fonction du carré de sa vitesse, et que la loi de conservation de l'impulsion soit observée. Alors il est clair que les projections de l'impulsion totale des billes dans le référentiel K_A sur les axes x et y avant et après collision s'expriment par

$$P_x = -mVf\,(V^2 + u^2\,(1 - V^2/c^2)),$$
$$P'_x = -mVf\,(V^2 + u'^2\,(1 - V^2/c^2)),$$
$$P_y = muf\,(u^2) - mu\sqrt{1-V^2/c^2}\,f\,(V^2 + u^2\,(1 - V^2/c^3)),$$
$$P'_y = -mu'f\,(u'^2) + mu'\sqrt{1-V^2/c^2}\,f\,(V^2 + u'^2\,(1 - V^2/c^2)).$$

L'égalité des projections x implique $u = u'$, si bien que l'égalité $P_y = P'_y$ prend la forme

$$u\sqrt{1-V^2/c^2}\,f\,(V^2 + u^2\,(1 - V^2/c^2)) = uf\,(u^2).$$

Après avoir divisé cette égalité par u, faisons tendre u vers zéro. Il en résultera $\sqrt{1 - V^2/c^2}f\,(V^2) = f\,(0)$. Pour les faibles vitesses, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, c'est-à-dire que $f\,(0) = 1$. Par conséquent, $f\,(V^2) = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$, et nous sommes conduits à l'expression suivante de l'impulsion d'une particule :

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Pour $v \ll c$, l'impulsion $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, ainsi qu'elle doit l'être. Lorsque $v \to c$, l'impulsion tend vers l'infini.

La dérivée de l'impulsion par rapport au temps est la force qui s'exerce sur la particule. De l'expression de $\mathbf{p}$ il résulte que si la

vitesse ne varie qu'en direction,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Si la vitesse ne varie qu'en module,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\frac{m}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}\frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Dans le premier cas la force est dirigée perpendiculairement à la vitesse, et dans le second cas, suivant la vitesse. Nous voyons que le rapport de la force $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ à l'accélération $d\mathbf{v}/dt$ est dans les deux cas différent, c'est-à-dire que la masse effective définie par le rapport de la force à l'accélération est différente pour les deux directions de la force.

Proposons-nous maintenant de déterminer l'énergie d'une particule en dynamique relativiste. Si $d\mathbf{r}$ est le déplacement de la particule sous l'action d'une force $\mathbf{F}$, il est évident que la variation de son énergie est $d\mathscr{E} = \mathbf{F}d\mathbf{r}$, et comme $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$,

$$d\mathscr{E} = \mathbf{v}d\mathbf{p}.$$

En y portant l'expression obtenue pour $\mathbf{p}$, nous obtenons

$$d\mathscr{E}=(1-v^2/c^2)^{-1/2}\,d\frac{mv^2}{2}+\frac{mv^2}{2}\,d\,(1-v^2/c^2)^{-1/2}=mc^2\,d\,(1-v^2/c^2)^{-1/2},$$

d'où il résulte que

$$\mathscr{E}=\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+C^{te}.$$

Le problème se ramène maintenant à la détermination de la constante. Il semble qu'on pourrait la choisir de telle sorte que l'énergie s'annule pour la particule au repos, c'est-à-dire choisir $C^{te} = -mc^2$. Or, il se trouve qu'en réalité il faut choisir une constante nulle, c'est-à-dire considérer que

$$\mathscr{E}=\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Dans ces conditions, l'énergie d'une particule au repos n'est pas nulle mais égale à

$$\mathscr{E}_0 = mc^2,$$

c'est-à-dire que l'énergie d'une particule au repos est égale au produit de sa masse par le carré de la vitesse de la lumière.

Un tel choix de la constante rend la dynamique relativiste cohérente en ce sens que l'impulsion et l'énergie de la particule

$$\mathbf{p}=m\mathbf{v}/\sqrt{1-v^2/c^2},\quad \mathscr{E}=mc^2/\sqrt{1-v^2/c^2}$$

se trouvent réunies en un seul quadrivecteur énergie-impulsion. Nous reviendrons sur ce sujet au § 7.7, et pour le moment indiquons que de

cette relation (qui a été établie, de même que les formules de $\mathbf{p}$ et de $\mathscr{E}$, par Einstein) il résulte une conclusion remarquable suivante: *si la particule perd une énergie* $\Delta\mathscr{E}$, *sa masse diminue en même temps de*

$$\Delta m = \Delta\mathscr{E}/c^2.$$

Remarquons également que des formules donnant l'énergie et l'impulsion d'une particule résultent les relations

$$\mathscr{E} = c\sqrt{m^2c^2 + p^2}, \quad \mathbf{p} = \mathscr{E}\mathbf{v}/c^2.$$

Pour $v \ll c$ l'expression de l'énergie prend la forme

$$\mathscr{E} = mc^2 + mv^2/2.$$

Le deuxième terme représente ici l'énergie cinétique de la particule en mécanique newtonienne, et le premier terme traduit l'*énergie au repos* de la particule.

Dans la formule qui lie $\mathscr{E}$ et $\mathbf{p}$ on peut poser $m = 0$. Nous obtiendrons alors la relation entre l'énergie et l'impulsion d'une particule dénuée de masse

$$\mathscr{E} = cp.$$

Sa vitesse est de toute évidence égale à c. Un exemple bien connu de particule qui ne possède pas de masse propre est fourni par le photon (quantum de lumière) qui est une particule associée à l'onde électromagnétique.

Décrivons maintenant la démonstration physique de la relation $\Delta m = \Delta\mathscr{E}/c^2$ donnée par Einstein.

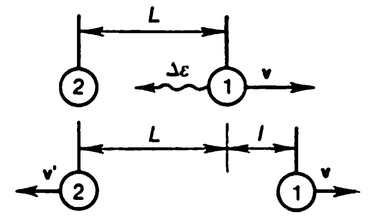


Fig. 7.1. Etablissement de la relation d'Einstein

Envisageons deux corps de même masse m se trouvant à une distance L l'un de l'autre (fig. 7.1). Supposons que le corps *1* émette une énergie électromagnétique $\Delta\mathscr{E}$ qui est absorbée par le corps *2*. En émettant de l'énergie, le corps *1* subit un recul et commence à se mouvoir avec une vitesse v. Le corps *2* absorbe l'énergie émise au bout d'un temps L/c au cours duquel le corps *1* parcourt une distance $l = vL/c$. Pour déterminer la vitesse v du corps *1*, remarquons que par suite de son émission il perd, comme il a été établi au § 6.2, une impulsion $\Delta p = \Delta\mathscr{E}/c$. En même temps le corps *1* doit perdre une certaine masse Δm. Si la masse du corps est suffisamment grande, sa vitesse est petite devant c. Cela signifie que cette vitesse doit être liée à Δp par la relation $\Delta p = (m - \Delta m)\,v$. En introduisant $\Delta p = \Delta\mathscr{E}/c$ dans cette relation, nous obtenons

$$v = \Delta\mathscr{E}/[c\,(m - \Delta m)].$$

Ainsi, le déplacement du corps *1* sera égal à

$$l = L\Delta\mathcal{E}/[(m - \Delta m)\, c^2].$$

Tenons maintenant compte du fait qu'après l'échange d'énergie, c'est-à-dire de masse, le centre de gravité de nos deux corps doit conserver sa position. Ceci signifie que doit être vérifiée la relation

$$(m - \Delta m)\left(\frac{L}{2} + l\right) = (m + \Delta m)\frac{L}{2}.$$

En reportant dans cette relation l'expression trouvée pour l, nous obtenons la *relation d'Einstein*

$$\Delta m = \Delta\mathcal{E}/c^2.$$

§ 7.6. Mouvement d'une particule chargée dans le champ électromagnétique

Connaissant l'expression de l'impulsion d'une particule, nous pouvons établir l'équation du mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique extérieur. La particule est soumise dans ce cas à une force (dans le système d'unités de Gauss)

$$\mathbf{f} = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vB}]\right),$$

où e est la charge de la particule, $\mathbf{v}$, sa vitesse, $\mathbf{E}$, l'intensité du champ électrique et $\mathbf{B}$, l'intensité du champ magnétique. D'où l'équation du mouvement de la particule

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vB}]\right); \quad \mathbf{p} = m\mathbf{v}/\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Aux vitesses faibles ($v \ll c$), l'impulsion $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, et nous obtenons l'équation de Newton avec la force de Lorentz $\mathbf{f}$.

Déterminons comment varie dans le temps l'énergie de la particule: $d\mathcal{E}/dt = \mathbf{v}\,d\mathbf{p}/dt$. En y introduisant $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{f}$ et en remarquant que $\mathbf{v}\,[\mathbf{vB}] = 0$, nous obtenons

$$d\mathcal{E}/dt = e\mathbf{E}\mathbf{v}.$$

Nous voyons que la variation de l'énergie de la particule n'est déterminée que par le champ électrique. Cela provient du fait que la variation d'énergie est égale au travail des forces qui s'exercent sur la particule, et la force magnétique ne produit aucun travail étant perpendiculaire à la vitesse.

L'impulsion de la particule peut s'exprimer par l'intermédiaire de son énergie:

$$\mathbf{p} = \mathcal{E}\mathbf{v}/c^2.$$

En reportant cette expression dans l'équation du mouvement et en utilisant la formule donnant $d\mathcal{E}/dt$, nous trouvons l'accéléra-

tion acquise par la particule dans le champ électromagnétique

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m} \sqrt{1 - v^2/c^2} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} (\mathbf{vE}) \right\}.$$

Si $v \ll c$, nous obtenons la formule bien connue de la mécanique classique $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}/m$.

La formule de l'accélération en dynamique relativiste, c'est-à-dire pour $v \approx c$, diffère sur deux points de la formule de la mécanique classique : premièrement, elle fait intervenir un facteur caractéristique $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ et, deuxièmement, elle contient un terme additionnel d'intensité de champ électrique $\mathbf{v}(\mathbf{vE})/c^2$.

Passons maintenant à l'étude du mouvement de la particule dans le champ électromagnétique. Commençons par examiner le mouvement dans un champ électrique constant et uniforme. Si $\mathbf{v}_0$ est la vitesse initiale de la particule, il est évident que la particule se déplace dans le plan $(\mathbf{E}, \mathbf{v}_0)$. Orientons l'axe des x suivant $\mathbf{E}$, l'équation du mouvement prend alors la forme

$$\dot{p}_x = eE, \quad \dot{p}_y = 0,$$

d'où $p_x = eEt + p_{x0}$, $p_y = p_{y0}$, p_{x0} et p_{y0} étant les valeurs initiales de p_x et de p_y respectivement. Si l'origine des temps est choisie de telle sorte que la valeur de p_x, qui lui correspond, soit nulle, alors

$$p_x = eEt, \quad p_y = p_0,$$

où p_0 est une nouvelle valeur initiale de l'impulsion de la particule.

Nous voyons que p_x augmente indéfiniment avec le temps. Regardons comment varient avec le temps la vitesse de la particule et son énergie. L'énergie $\mathscr{E}$ de la particule est liée à son impulsion par la relation $\mathscr{E} = c\sqrt{m^2c^2 + p^2}$, si bien que dans le cas considéré

$$\mathscr{E} = c \sqrt{m^2c^2 + (eEt)^2 + p_0^2}.$$

Pour déterminer la variation de la vitesse avec le temps, faisons usage de la formule $\mathbf{v} = c^2\mathbf{p}/\mathscr{E}$, d'où il résulte que

$$v_x = \frac{c^2 p_x}{\mathscr{E}} = \frac{ceEt}{\sqrt{m^2c^2 + (eEt)^2 + p_0^2}},$$

$$v_y = \frac{c^2 p_y}{\mathscr{E}} = \frac{cp_0}{\sqrt{m^2c^2 + (eEt)^2 + p_0^2}}.$$

Nous voyons que

lors de la croissance indéfinie du temps la projection de la vitesse le long du champ tend vers c, alors que la projection perpendiculaire de la vitesse tend vers zéro.

En tenant compte que $v_x = dx/dt$ et $v_y = dy/dt$, nous pouvons déterminer les coordonnées de la particule en fonction du temps:

$$x = \frac{1}{eE} \sqrt{\mathscr{E}_0^2 + (ceEt)^2}; \quad y = \frac{p_0 c}{eE} \operatorname{Arsh} \frac{ceEt}{\mathscr{E}_0}.$$

où $\mathscr{E}_0 = c\sqrt{m^2c^2 + p_0^2}$ (les constantes d'intégration correspondantes sont posées nulles). Il est facile d'en tirer la trajectoire de la particule

$$x = \frac{\mathscr{E}_0}{eE} \operatorname{ch} \frac{eEy}{p_0 c} .$$

La partie de la trajectoire correspondant aux valeurs faibles de y (à condition que $eEy/(p_0c) \ll 1$) présente la forme d'une parabole:

$$x = \frac{eE}{2mv_0^2} y^2 + \mathrm{C^{te}}.$$

Passons maintenant à l'étude du mouvement de la particule dans un champ magnétique. En utilisant la formule $\mathbf{p} = \mathscr{E}\mathbf{v}/c^2$ et en tenant compte que l'énergie ne varie pas dans un champ magnétique, on peut mettre l'équation du mouvement de la particule sous la forme suivante:

$$\frac{1}{c^2} \mathscr{E} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{c} [\mathbf{vB}]$$

ou encore sous la forme

$$\dot{\mathbf{v}} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{v}],$$

où $\boldsymbol{\omega} = -ec\mathbf{B}/\mathscr{E}$.

Cette équation est analogue à l'équation $\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$ qui détermine la vitesse des particules d'un corps solide animé d'un mouvement de rotation à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$. On peut donc dire que l'extrémité du vecteur vitesse de la particule tourne autour du champ magnétique à une vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega} = -ec\mathbf{B}/\mathscr{E}$. Cette vitesse angulaire s'appelle *fréquence cyclotronique*. Dans le cas d'un champ constant et uniforme la fréquence $\boldsymbol{\omega}$ est une constante. Dans le domaine non relativiste ($v \ll c$) l'énergie $\mathscr{E} = mc^2$, si bien que la fréquence cyclotronique prend la forme familière

$$\boldsymbol{\omega} = -e\mathbf{B}/(mc).$$

Il est facile de voir que dans un plan perpendiculaire à $\mathbf{B}$ la particule suit une circonférence de rayon

$$r = v_\perp/\omega = cp_\perp/(eB),$$

où $v_\perp$ et $p_\perp$ sont les composantes de la vitesse et de l'impulsion perpendiculaires à $\mathbf{B}$. La composante de la vitesse de la particule le long de $\mathbf{B}$ étant invariable, la trajectoire de la particule est une hélice de rayon r et d'axe orienté le long de l'induction $\mathbf{B}$.

§ 7.7. Quadrivecteurs et quadritenseurs

Comme nous l'avons vu plus haut, le passage d'un référentiel d'inertie à un autre entraîne non seulement les variations de coordonnées d'espace et de temps de chaque événement mais également celles

de composantes du champ électromagnétique et ces variations suivent une loi bien déterminée, à savoir la loi de transformation liée à celle des transformations de Lorentz qui correspond au passage considéré des référentiels.

D'une manière analogue, à chacune des grandeurs physiques correspond sa propre loi de transformation lors du passage d'un référentiel à un autre.

Ces lois peuvent être classées et établies sous la forme générale si l'on introduit les notions de *vecteurs* et de *tenseurs à quatre dimensions* (en abrégé, *quadrivecteurs* et *quadritenseurs*).

On appelle quadrivecteur l'ensemble de quatre grandeurs A_1, A_2, A_3, A_4, qui se transforme de la même façon que les coordonnées d'un point d'univers x_1, x_2, x_3, x_4.

La transformation de Lorentz des coordonnées d'un point d'univers s'écrira sous la forme

$$x_i \to x'_i = L_{ik} x_k,$$

où L_{ik} sont certaines grandeurs dépendant de la vitesse relative des référentiels (étant entendu que la sommation sur l'indice k se fait de 1 à 4). Comme la grandeur $x_i^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ reste invariante par une transformation de Lorentz, les matrices L vérifient les relations

$$L_{ik} L_{jk} = \delta_{ij},$$

où $\delta_{ij} = 1$ pour $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ (ici et plus loin on sous-entend que la sommation s'effectue sur l'indice qui se rencontre deux fois). C'est pourquoi le quadrivecteur A_i se transforme suivant la loi

$$A_i \to A'_i = L_{ik} A_k.$$

La grandeur $A_i A_i \equiv A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2$, de même que la grandeur $x_i x_i$, reste invariante, par des transformations de Lorentz: $A_i A_i = A'_i A'_i$. Cette grandeur peut s'écrire sous la forme

$$A_i A_i = \mathbf{A}^2 - A_0^2,$$

où $\mathbf{A}$ réunit trois composantes spatiales A_1, A_2, A_3 du quadrivecteur, et $A_0 = A_4/i$ est la composante temporelle du quadrivecteur (A_0 étant une grandeur réelle). Ainsi il vient

$$\mathbf{A}^2 - A_0^2 = \mathbf{A}'^2 - A_0'^2.$$

Si l'on prend deux quadrivecteurs A_i et B_i, la grandeur $A_i B_i = \mathbf{AB} - A_0 B_0$ se transforme dans des transformations de Lorentz de la même manière que la grandeur $A_i A_i$, c'est-à-dire reste un invariant ou, comme on dit encore, un *scalaire*:

$$\mathbf{AB} - A_0 B_0 = \mathbf{A'B'} - A'_0 B'_0.$$

Cette grandeur est appelée *produit scalaire des quadrivecteurs* A_i *et* B_i.

La réciproque de ce théorème est également vraie : si A_iB_i est un scalaire et A_i un quadrivecteur, B_i est un quadrivecteur.

Indiquons quelques exemples de quadrivecteurs. Les coordonnées x_i étant un quadrivecteur, les différentielles des coordonnées dx_i constituent elles aussi un quadrivecteur. La grandeur $dx_i dx_i = ds^2$ est un invariant (le carré de l'intervalle). De ce fait, la différentielle du temps propre est aussi un invariant

$$d\tau = ds/(ic).$$

Par suite, si nous divisons dx_i par $d\tau$, nous obtiendrons le *quadrivecteur vitesse*

$$u_i = dx_i/d\tau.$$

En tenant compte que $d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$, v étant la vitesse de la particule, on peut mettre u_i sous la forme

$$u_i \equiv \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\Big/\sqrt{1-v^2/c^2},\ ic/\sqrt{1-v^2/c^2}\right).$$

En multipliant u_i par la masse de la particule, nous obtenons le *quadrivecteur impulsion* ou encore le *quadrivecteur impulsion-énergie* de la particule :

$$p_i \equiv (m\mathbf{v}/\sqrt{1-v^2/c^2},\quad imc/\sqrt{1-v^2/c^2}).$$

Les composantes spatiales de p_i déterminent l'impulsion **p** et la composante temporelle traduit l'énergie $\mathscr{E}$ de la particule multipliée par i/c. Vu cette circonstance, on peut écrire immédiatement les formules de transformation de l'impulsion et de l'énergie de la particule lors du passage d'un référentiel d'inertie à un autre :

$$p'_x = \frac{p_x - V\mathscr{E}/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}},\quad \mathscr{E}' = \frac{\mathscr{E} - Vp_x}{\sqrt{1-V^2/c^2}},\quad p'_y = p_y,\ p'_z = p_z$$

(le référentiel K' se déplace par rapport à K le long de l'axe des x avec la vitesse V). Montrons que

la densité de courant électrique j = ρv et la densité de charge ρ constituent un quadrivecteur :

$$(\rho\mathbf{v},\ ic\rho) \equiv j_i.$$

A cet effet, multiplions l'égalité $de = \rho dV$ par dx_i, il vient

$$de\, dx_i = \rho\, dV\, dt\, \frac{dx_i}{dt}.$$

Il est aisé de s'assurer que $dVdt$ est un invariant. En effet,

$$dV'dt' = dx'_1 dx'_2 dx'_3 dx'_4/(ic) = \|\partial x'_i/\partial x_k\|\, dx_1 dx_2 dx_3 dx_4/(ic),$$

où $\| \partial x'_i / \partial x_k \|$ est un jacobien de passage des variables x_i aux variables x'_i. Mais ce jacobien est égal à l'unité comme le montrent les transformations de Lorentz.

D'un autre côté, $dedx_i$ est un quadrivecteur. Par suite $j_i = \rho dx_i/dt \equiv (\rho \mathbf{v}, ic\rho)$ est lui aussi un quadrivecteur. Il en résulte que les densités de courant et de charge se transforment lors du passage d'un référentiel d'inertie à un autre suivant les formules

$$j'_x = \frac{j_x - V\rho}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,; \quad \rho' = \frac{\rho - Vj_x/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\,; \quad j'_y = j_y, \; j'_z = j_z.$$

Passons maintenant à la définition des quadritenseurs. On appelle quadritenseur du deuxième ordre l'ensemble de 16 grandeurs T_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$, qui subit la transformation de Lorentz suivant la loi

$$T_{ij} \rightarrow T'_{ij} = L_{ik} L_{jl} T_{kl}.$$

En particulier, un quadritenseur du deuxième ordre est formé par les grandeurs $A_i B_j$, où A_i et B_i sont deux quadrivecteurs arbitraires. Puisque la grandeur $A_i B_i$ est un invariant (ou un scalaire), la grandeur T_{ii}, c'est-à-dire la somme des éléments diagonaux de la matrice T_{ij}, sera elle aussi un invariant.

On peut définir de même les tenseurs d'ordre plus élevé. Ainsi, on appelle tenseur du troisième ordre l'ensemble de 4^3 grandeurs T_{ijl} qui lors des transformations de Lorentz suivent la loi

$$T_{ijl} \rightarrow T'_{ijl} = L_{in} L_{jm} L_{lp} T_{nmp},$$

on appelle tenseur du quatrième ordre l'ensemble de 4^4 grandeurs T_{ijlk} qui se transforment suivant la loi

$$T_{ijlk} \rightarrow T'_{ijlk} = L_{ir} L_{js} L_{lt} L_{ku} T_{rstu},$$

et ainsi de suite.

Les exemples les plus simples de quadritenseurs sont fournis par les ensembles de produits des composantes des quadrivecteurs. Ainsi, les grandeurs $A_i B_j C_l$, où A_i, B_i, C_i sont des quadrivecteurs, forment un quadritenseur d'ordre 3, et les grandeurs $A_i B_j C_l D_k$ forment un quadritenseur d'ordre 4 (D_k étant un quadrivecteur).

De ce qui précède nous pouvons conclure que si l'on considère comme identiques deux indices d'un tenseur et qu'on effectue la sommation sur ces indices, l'ordre de ce tenseur diminuera de deux unités. En particulier, T_{iij} est un tenseur du premier ordre ou un quadrivecteur, et T_{ljli} est un tenseur du deuxième ordre. L'abaissement de l'ordre d'un tenseur effectué de cette façon s'appelle *opération de réduction.*

Si T_{ij} et A_l sont un quadritenseur d'ordre 2 et un quadrivecteur, l'ensemble de grandeurs $T_{ij} A_l$ est un quadritenseur d'ordre 3, alors que l'ensemble de grandeurs $B_i = T_{ij} A_j$ est un quadrivecteur.

Réciproquement, s'il est connu que A_i et B_i sont des quadrivecteurs, les grandeurs T_{ij} qui les lient forment un quadritenseur d'ordre 2. Il en résulte que si les composantes d'un quadrivecteur A_i dépendent de la coordonnée x_i, c'est-à-dire si $A_i = A_i(x_l)$ est un certain champ quadrivectoriel, les dérivées $\partial A_i/\partial x_k$ forment un quadritenseur d'ordre 2. En effet, $dA_i = dx_k \partial A_i/\partial x_k$ et puisque dx_i et dA_i sont des quadrivecteurs, $\partial A_i/\partial x_k$ est un quadritenseur.

Le plus important des quadritenseurs est le *tenseur champ électromagnétique*

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -iE_x \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y \\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix},$$

qui réunit les composantes des vecteurs champ électrique **E** et champ magnétique **B** (rappelons que dans le vide **B** = **H**). Le fait que les grandeurs F_{ik} forment un quadritenseur découle de la loi de transformation du champ électromagnétique et de la définition du tenseur.

Il y a lieu d'attirer l'attention sur le fait que ni **E**, ni **B** ne sont des quadrivecteurs et que seul l'ensemble sus-indiqué de leurs composantes forme un quadritenseur d'ordre 2. Ce tenseur est antisymétrique, c'est-à-dire que $F_{ik} = -F_{ki}$, et par suite comporte six composantes non nulles.

Pourtant il faut ne pas perdre de vue que s'il ne s'agit que des rotations spatiales, **E** et **B** sont des vecteurs (plus exactement, des vecteurs tridimensionnels).

Enfin, il convient d'avoir en vue une particularité du vecteur induction magnétique du champ: lors de l'inversion du temps ($t \to -t$) il change de signe ($\mathbf{B} \to -\mathbf{B}$), alors que l'intensité de champ électrique conserve son signe ; lors de la réflexion de l'espace ($\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$) chaque vecteur vrai (par exemple, le vecteur vitesse **v** et le vecteur champ électrique **E**) change de signe, alors que le vecteur **B** ne change pas de signe, ce qui explique pourquoi on l'appelle pseudovecteur.

Le tenseur antisymétrique de champ F_{ik} peut toujours se mettre sous la forme

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k},$$

où A_i est un certain quadrivecteur. On l'appelle *quadrivecteur potentiel du champ électromagnétique*. En désignant par **A** ses composantes d'espace et par $i\varphi$ sa composante de temps, on peut écrire l'induction magnétique et l'intensité de champ électrique sous la forme

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi.$$

Ainsi, **A** n'est rien d'autre que le potentiel vecteur du champ magnétique que nous connaissons. Dans le cas statique, lorsque les champs sont indépendants du temps, **E** = — grad φ, c'est-à-dire que φ est dans ce cas un potentiel électrostatique.

Nous devons comprendre maintenant le sens physique de l'introduction des notions de quadrivecteurs et de quadritenseurs, c'est-à-dire mettre en évidence leur raison d'être. Ce sens réside en ce que toutes les grandeurs physiques peuvent être réunies en des ensembles qui sont soit des quadrivecteurs, soit des quadritenseurs de différents ordres, soit enfin des *spineurs*, c'est-à-dire des grandeurs dont les combinaisons quadratiques forment des quadrivecteurs.

Par exemple, l'impulsion **p** et l'énergie $\mathcal{E}$ d'une particule forment un quadrivecteur impulsion p_i, les vecteurs **E** et **B** forment un quadritenseur de champ électromagnétique F_{ik}, etc. On peut donc dire que les quadrivecteurs et les quadritenseurs (ainsi que les quadrispineurs) sont des objets mathématiques qui correspondent aux différentes grandeurs physiques.

Ayant établi qu'une grandeur physique ou une autre est un vecteur ou un tenseur, nous déterminons par là même la loi qui régit la variation de cette grandeur lors des transformations de Lorentz et puisqu'il n'existe pas d'autres objets mathématiques liés aux transformations de Lorentz, comme on le montre en mathématiques, nous avons la possibilité de classer toutes les grandeurs physiques suivant la loi à laquelle elles obéissent dans les transformations de Lorentz.

Mais ce n'est pas encore tout. Comme tous les référentiels d'inertie sont équivalents, les lois de la nature doivent revêtir la même forme dans tous les référentiels. Si l'on choisit un référentiel déterminé quelconque, toute loi physique peut être énoncée dans ce référentiel par une égalité $T = 0$, où T est une certaine grandeur ou un ensemble de grandeurs. Puisque les lois de la nature doivent avoir la même formulation dans tous les référentiels, une égalité analogue doit être vérifiée dans tous les autres référentiels. Puisque toutes les grandeurs physiques sont, comme nous venons d'expliquer, de nature vectorielle ou tensorielle, la grandeur T doit être soit un quadrivecteur, soit un quadritenseur (ou un quadrispineur), mais dans ces conditions l'invariance de la loi de la nature s'obtient automatiquement. En effet, la linéarité de la loi de transformation d'un tenseur (et d'un vecteur) signifie que si les composantes du tenseur sont nulles dans un référentiel quelconque, elles le sont également dans tout autre référentiel, c'est-à-dire que la relation $T = 0$ entraîne la relation $T' = 0$.

Autrement dit, en introduisant la notion de quadrivecteurs et de quadritenseurs, nous devons donner à chaque loi de la nature une formulation quadridimensionnelle — vectorielle ou tensorielle — pour être sûrs que cette formulation est invariante par les transformations de Lorentz. Seule une telle formulation des lois de la nature

(dite *covariante*) peut être exacte, car elle satisfait à l'exigence de l'équivalence de tous les référentiels.

Remarquons cependant que la réciproque n'est pas vraie, c'est-à-dire que toute l'égalité tensorielle $T = 0$ n'exprime pas une loi vraie de la nature.

Regardons maintenant comment se présentent en dynamique relativiste et en dynamique classique les lois de l'électromagnétisme, c'est-à-dire les équations de Maxwell et la loi du mouvement d'une particule. Commençons par les équations de Maxwell.

La seconde paire d'équations de Maxwell

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad \mathrm{div}\ \mathbf{E} = 4\pi\rho$$

peut s'écrire, en utilisant le tenseur de champ F_{ik}, sous la forme

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} = -\frac{4\pi}{c} j_i, \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

où $j_i \equiv (\mathbf{j}, ic\rho)$ est la densité d'un quadricourant. Ainsi, la seconde paire d'équations de Maxwell peut être mise sous une forme quadridimensionnelle.

La première paire d'équations de Maxwell

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \ \mathrm{div}\ \mathbf{B} = 0$$

peut être mise sous la forme

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} = 0,$$

où i, k, l prennent les valeurs 1, 2, 3, 4. Mais le premier membre de cette égalité est un tenseur d'ordre 3, c'est-à-dire que la première paire d'équations de Maxwell peut être mise elle aussi sous une forme quadridimensionnelle.

Nous voyons que la seconde paire d'équations de Maxwell exprime la nullité d'un certain quadrivecteur, et la première paire traduit la nullité d'un certain quadritenseur d'ordre 3. Or, la nullité d'un quadritenseur (ou d'un quadrivecteur) ne dépend pas du choix d'un référentiel.

Nous avons ainsi démontré l'invariance des équations de Maxwell par les transformations de Lorentz.

Passons maintenant aux équations du mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique. Si $\mathbf{p}$ et $\mathscr{E}$ sont l'impulsion et l'énergie de la particule, nous avons d'après le paragraphe 7.6

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vB}]\right\}, \quad \frac{d\mathscr{E}}{dt} = e\mathbf{Ev}.$$

Ces équations peuvent être mises sous une forme quadridimensionnelle. En effet, en introduisant un quadrivecteur impulsion $p_i \equiv$

$\equiv [p, \mathscr{E}/(ic)]$ et un quadrivecteur vitesse $u_i = dx_i/d\tau$ de la particule et en nous rappelant la définition du tenseur de champ, nous pouvons récrire les équations du mouvement sous la forme

$$\frac{dp_i}{d\tau} = eF_{ik}u_k; \quad i, k = 1, 2, 3, 4.$$

Comme $F_{ik}u_k$ est un quadrivecteur, cette équation exprime la nullité du quadrivecteur $dp_i/d\tau - eF_{ik}u_k$. Cette équation est donc invariante par les transformations de Lorentz. On a démontré par là même l'invariance des équations du mouvement initiales par les transformations de Lorentz en dynamique relativiste. Remarquons cependant que les équations du mouvement de la mécanique classique de Newton ne présentent pas une telle invariance, elles ne sont invariantes que par les transformations de Galilée, mais ne le sont pas par les transformations de Lorentz. C'est justement la raison pour laquelle elles ne sont pas exactes. Plus exactement, on peut dire qu'elles sont valables seulement aux vitesses faibles $v \ll c$, alors que les équations de la dynamique relativiste d'Einstein sont valables pour toutes vitesses.

§ 7.8. Effet Doppler

La transformation de quadrivecteurs trouve une application importante dans la théorie de l'effet Doppler.

Considérons un champ électromagnétique ayant la forme d'une onde monochromatique plane dont toutes les grandeurs de champ $f(\mathbf{r}, t)$ varient en fonction des coordonnées et du temps suivant une loi $\exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)]$, c'est-à-dire sont de la forme $f(\mathbf{r}, t) = Fe^{i\varphi}$, où F est l'amplitude du champ, $\mathbf{k}$, le vecteur d'onde, ω, la fréquence de l'onde et $\varphi = \mathbf{kr} - \omega t$, la phase de l'onde. Dans le cas d'un champ dans le vide que nous allons considérer ici, $\omega = ck$.

Dans les transformations de Lorentz, l'amplitude F se transforme de la même façon que le champ f lui-même. De ce fait la phase φ doit être un invariant ou un scalaire.

On peut en tirer des conclusions importantes sur la transformation des grandeurs $\mathbf{k}$ et ω lors du passage d'un référentiel à un autre. En effet, écrivons la phase sous la forme

$$\varphi = k_j x_j,$$

où $x_j \equiv (\mathbf{r}, ict)$ et k_j réunit quatre valeurs de $\mathbf{k}$ et $i\omega/c$. Comme φ est un scalaire et x_j un quadrivecteur, k_j est un quadrivecteur. Vu qu'il réunit le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ et la fréquence ω, on lui donne le nom de *quadrivecteur d'onde*.

Il s'ensuit que dans les transformations de Lorentz le quadrivecteur d'onde $\mathbf{k}$ se transforme comme le rayon vecteur spatial $\mathbf{r}$ d'un événement quelconque, et la fréquence ω comme le temps t.

Soient $\mathbf{k}_0$ et ω_0 le vecteur d'onde et la fréquence dans un référentiel K_0. Alors, dans un référentiel K qui se déplace à la vitesse $\mathbf{V}$ par rapport à K_0,

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \frac{\omega_0}{c}\frac{\mathbf{V}}{V}\left(\cos\alpha\sqrt{1-V^2/c^2} - \cos\alpha + \frac{V}{c}\right)\Big/\left(1-\frac{V}{c}\cos\alpha\right);$$

$$\omega = \omega_0\sqrt{1-V^2/c^2}\Big/\left(1-\frac{V}{c}\cos\alpha\right),$$

où α est l'angle (dans le référentiel K) que le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ fait avec la vitesse $\mathbf{V}$. De la première formule il résulte que

$$\cos\alpha_0 = (\cos\alpha - V/c)/(1 - V\cos\alpha/c),$$

où α_0 est l'angle (dans le référentiel K_0) entre le vecteur d'onde $\mathbf{k}_0$ et la vitesse $\mathbf{V}$. Cette formule détermine la variation de la direction de propagation de la lumière au passage d'un référentiel d'inertie à l'autre. Ce phénomène, connu sous le nom d'aberration de la lumière, a été déjà examiné au § 7.3.

La seconde formule traduit le changement de fréquence de la lumière au passage d'un référentiel à l'autre. Ce phénomène porte le nom d'*effet Doppler*. Si $V \ll c$, la variation de fréquence est donnée par la formule

$$\omega \cong \omega_0\,(1 + V\cos\alpha/c).$$

§ 7.9. Principe d'équivalence

Au cours des paragraphes qui précèdent nous avons recours uniquement aux référentiels d'inertie. Or, il existe aussi un nombre infini de systèmes de référence non inertiels, c'est-à-dire de systèmes qui se déplacent avec une accélération par rapport aux référentiels d'inertie, que nous pouvons aussi utiliser pour la description des mouvements mécaniques (ce que nous faisons d'ailleurs lorsque nous prenons pour système de référence la Terre qui n'est pas un référentiel d'inertie parce qu'elle est animée de mouvements de rotation autour de son axe, autour de l'axe du Soleil et autour du centre de notre Galaxie).

Il est vrai que les référentiels d'inertie offrent un certain avantage sur ceux non inertiels du fait que le mouvement d'un corps libre est rectiligne et uniforme dans les systèmes d'inertie et ce n'est pas le cas pour les systèmes non inertiels.

Le mouvement est plus simple dans les référentiels d'inertie que dans les systèmes non inertiels puisque dans ces derniers prennent naissance des forces spécifiques dues justement à l'absence d'inertie, par exemple, la force centrifuge d'inertie ou la force de Coriolis qui ne s'exercent pas dans les systèmes inertiels.

La particularité la plus importante que présentent les forces d'inertie est que l'accélération qu'elles provoquent ne dépend pas de

la masse du corps en mouvement. Il apparaît ainsi une analogie qui se transforme en une liaison étroite entre les systèmes d'inertie et les champs de gravitation.

Pour expliciter cette analogie, considérons un système non inertiel animé d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré par rapport à un référentiel d'inertie. Dans ce système prend naissance une force d'inertie égale à $-m\mathbf{a}$, où $\mathbf{a}$ est l'accélération du système et m la masse du corps (absolument quelconque) se trouvant dans le système. Si nous considérons maintenant un champ de gravitation constant et uniforme, d'accélération $\mathbf{g}$, le corps est soumis dans ce champ à l'action de la pesanteur $m\mathbf{g}$. C'est pourquoi, si $\mathbf{g} = -\mathbf{a}$, le mouvement du corps (en présence de toutes forces supplémentaires) dans le système non inertiel s'effectue exactement de la même manière que le mouvement du corps dans un système d'inertie soumis à l'action du champ de gravitation $\mathbf{g}$.

Cette *indiscernabilité de la force d'inertie qui prend naissance dans un système non inertiel en mouvement rectiligne et uniformément accéléré et d'un champ de gravitation uniforme* est connue sous le nom de *principe d'équivalence*. Un exemple illustrant le principe d'équivalence est fourni par le mouvement dans un ascenseur. Si l'ascenseur tombe librement, les corps qui s'y trouvent ne sont pas soumis à l'action de la pesanteur, c'est-à-dire qu'il se crée un état d'*apesanteur*, par contre, si l'ascenseur monte avec une accélération, la force d'inertie s'ajoute à l'action de la pesanteur et tout se passe comme si l'action de la pesanteur dans l'ascenseur devenait plus forte.

Il est à remarquer que le principe d'équivalence est d'une application plus universelle qu'il ne peut y paraître à un premier coup d'œil. Le fait est que

non seulement les mouvements mécaniques mais tous les autres processus physiques se déroulent exactement de la même manière tant dans un référentiel non inertiel en mouvement avec une accélération constante que dans un référentiel d'inertie dans lequel règne un champ de gravitation uniforme.

On peut en conclure qu'il est impossible d'employer correctement des référentiels non inertiels sans tenir compte des forces de gravitation.

Si, dans la mécanique classique de Newton, on introduit dans l'équation du mouvement les forces d'inertie, on peut oublier que nous utilisons un référentiel non inertiel : après la prise en compte des forces d'inertie le système non inertiel ne diffère pas d'un référentiel d'inertie.

Regardons maintenant si le passage des référentiels d'inertie aux systèmes non inertiels est tellement inoffensif dans la théorie de la relativité. Considérons à cet effet un disque qui peut tourner autour d'un axe perpendiculaire à son plan et passant par son centre (axe des z). En faisant usage d'une règle à échelle de dimension a,

traçons sur la périphérie du disque et sur l'un de ses rayons des marques distantes l'une de l'autre de a. Le rapport du nombre de marques sur la périphérie à celui sur le rayon est voisin de 2π si a est petit.

Supposons maintenant que le disque commence à tourner uniformément autour de l'axe des z et que l'observateur se trouvant sur le disque mesure avec la même règle à échelle la circonférence du disque et son rayon. En appliquant la règle le long de la circonférence, l'observateur constatera qu'elle est contenue dans la circonférence un plus grand nombre de fois, c'est-à-dire qu'il obtiendra un plus grand nombre de marques que dans le cas où le disque était au repos. Quant au nombre de marques sur le rayon, il restera le même. Cela s'explique par la contraction de Lorentz de la longueur de la règle lorsqu'elle est orientée dans le sens de mouvement. Puisque la contraction de Lorentz se détermine par la quantité $\sqrt{1 - v^2/c^2}$, où $v = \omega R$ est la vitesse de la périphérie du disque (R étant son rayon et ω la vitesse angulaire de rotation), l'observateur se trouvant sur le disque en rotation en arrivera à cette conclusion que le rapport de la circonférence (périphérie du disque) à son rayon est égal non pas à 2π, comme dans le cas du disque au repos, mais à $2\pi/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Le disque en rotation est un système non inertiel. Ceci nous conduit à conclure que

dans les référentiels non inertiels l'espace n'est pas euclidien.

Or, les systèmes non inertiels sont équivalents à certains champs de gravitation. C'est pourquoi

dans un champ de gravitation l'espace cesse d'être euclidien. Cela signifie que les propriétés géométriques de l'espace ne peuvent pas être considérées comme quelque chose d'absolu même dans le cadre de la théorie de la relativité restreinte, mais doivent dépendre des champs de gravitation.

D'un autre côté, les champs de gravitation sont produits par la matière. Nous devons en conclure que la géométrie de l'espace dépend de la matière ou plus exactement se détermine par la matière. En d'autres termes, la géométrie de l'espace perd son existence autonome et devient en quelque sorte une partie de la physique.

Nous savons que l'espace est intimement lié au temps. On peut donc dire que

non seulement les propriétés de l'espace mais également celles du temps se déterminent en dernier ressort par la matière, par son caractère et sa structure, par sa répartition dans l'espace et par l'état de son mouvement.

C'est l'idée fondamentale de la théorie de la relativité générale, de la grande théorie physique élaborée par Einstein en 1915.

§ 7.10. Relation entre la métrique de l'espace-temps et la matière

Avant d'établir la loi qui détermine la liaison entre les propriétés de l'espace-temps et l'état de la matière, expliquons comment la notion d'intervalle est généralisée au cas des référentiels non inertiels.

Appliquons à cet effet le principe d'équivalence suivant lequel en chaque point d'univers ou, plus exactement, dans un voisinage suffisamment petit d'un point d'univers P, on peut introduire un référentiel dans lequel les forces de gravitation ne s'exercent pas. Ce référentiel qui peut être dit *en chute libre* (nous le désignerons par K_0) est un système local et non global, ce qui signifie que chacun des points d'univers possède son propre système de ce type. Il peut être considéré comme un référentiel d'inertie, de sorte qu'on peut déterminer pour lui le carré de l'intervalle à l'aide de la formule connue

$$ds^2 = dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 + dX_4^2,$$

où X_i désignent les coordonnées du point d'univers dans ce référentiel ($X_4 = iX_0$, X_0 étant une quantité réelle). Les différentielles des coordonnées se déterminent à l'aide d'échelles et d'horloges étalons ordinaires utilisées dans la théorie de la relativité restreinte.

Passons maintenant de K_0 à un autre référentiel, choisi arbitrairement, qui peut en général être non inertiel. Dans ce dernier le point d'univers P se détermine par certaines quatre coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 ($x_4 = ix_0$, x_0 étant une quantité réelle) qui peuvent être choisies tout à fait arbitrairement, ce qui correspond au choix arbitraire du référentiel non inertiel. Mais entre les coordonnées X_i et x_i il existe une liaison fonctionnelle: $X_i = X_i(x_l)$. Il en résulte que $dX_i =$ $= dx_j\, \partial X_i/\partial x_j$, si bien que le carré de l'intervalle ds^2 peut être exprimé par l'intermédiaire des différentielles des nouvelles coordonnées dx_i:

$$ds^2 = g_{ik}dx_i dx_k,$$

où $g_{ik} = \frac{\partial X_l}{\partial x_i}\frac{\partial X_l}{\partial x_k}$ (ici et plus loin on sous-entend que la sommation sur l'indice qui se rencontre deux fois s'effectue de 1 à 4).

Comme nous l'avons dit, les coordonnées x_i peuvent être choisies arbitrairement. Cela permet de passer des coordonnées x_i à de nouvelles coordonnées x_i', ce qui correspond à un nouveau référentiel non inertiel; dans ces conditions, la quantité ds^2 ne varie pas, c'est-à-dire reste invariante:

$$ds^2 = g_{ik}'dx_i'dx_k',$$

où g_{ik}' se détermine par l'intermédiaire des X_i et x_i' de même que g_{ik} l'est par l'intermédiaire de X_i et x_i.

Les quantités g_{ik} dépendent des coordonnées du point de départ P, c'est-à-dire de X_i ou x_i. Elles forment un tenseur du deuxième ordre que l'on appelle *tenseur métrique*. En langage de géométrie différentielle, on dit que le tenseur g_{ik} définit la métrique de l'espace-temps.

D'après les résultats obtenus au paragraphe précédent on peut conclure qu'en présence d'un champ de gravitation la métrique de l'espace est non euclidienne. Il y a plus que cela : dans le cas général d'un champ de gravitation variable quelconque, la métrique de l'espace non seulement n'est pas euclidienne mais encore varie avec le temps, c'est-à-dire que les relations entre les différentes longueurs varient avec le temps et donc la position relative des corps introduits dans ce champ ne reste pas inchangée. Il s'ensuit que

dans le cas général d'un champ de gravitation variable la notion de référentiel, qu'on a utilisée dans la théorie de la relativité restreinte, perd son sens physique. On entendait par référentiel un certain ensemble de corps au repos les uns par rapport aux autres et un ensemble d'horloges à marche identique dans les limites du référentiel. On doit maintenant avoir, comme il a été dit à propos de l'explication de la notion d'intervalle, dans chaque point d'univers son propre référentiel local présentant les propriétés du référentiel défini dans la théorie de la relativité restreinte. En d'autres termes, on a maintenant besoin d'une infinité de référentiels locaux.

Dans la théorie de la relativité restreinte on n'a utilisé que les référentiels d'inertie et l'invariance des lois de la nature au passage d'un référentiel à un autre était une exigence principale de la théorie. Autrement dit, toutes les équations de la physique devaient être invariantes par les transformations de Lorentz. La théorie de la relativité générale admet tous systèmes de coordonnées à quatre dimensions mais exige que les lois de la nature soient énoncées de la même façon pour tous les systèmes de coordonnées quadridimensionnels, c'est-à-dire que la formulation générale des lois de la nature soit indépendante du choix de système de coordonnées. C'est pour cette raison que cette théorie est appelée théorie de la relativité générale.

Cependant, il faut se garder de penser que les divers systèmes de coordonnées sont physiquement équivalents. Au contraire,

les phénomènes physiques peuvent se dérouler de façon différente dans les divers systèmes de référence.

Examinons de plus près le mouvement d'une particule dans divers systèmes de coordonnées. Dans la théorie de la relativité restreinte la quadrivitesse de la particule en l'absence de champ électromagnétique $u_i = \mathrm{d}x_i/\mathrm{d}\tau$ est constante. Pour établir comment se modifie ce résultat dans la théorie de la relativité générale il convient de le lier à la structure de l'intervalle ds ou de la différentielle du temps propre $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}s/(ic)$. Introduisons à cet effet la notion d'*action*

définie par

$$J = \int_1^2 ds,$$

où l'intégration s'effectue le long d'une ligne d'univers arbitraire joignant deux points d'univers *1* et *2*. Si ces points sont fixés, l'intégrale ne dépend que de la ligne d'univers ou, comme on dit, est *fonction de la ligne d'univers.*

Imaginons maintenant que nous faisons subir à cette ligne une variation infiniment petite. Il en résultera une variation de l'action

$$\delta J = \int_1^2 \delta\, ds.$$

En remarquant que

$$\delta ds = \delta\, (ds^2)/(2ds) = dx_i \delta dx_i/ds,$$

et en tenant compte que $\delta dx_i = d\delta x_i$, intégrons par parties, il vient

$$\delta J = \int_1^2 \frac{dx_i}{ds}\, d\delta x_i = \frac{dx_i}{ds}\, \delta x_i \Big|_1^2 - \int_1^2 d\, \frac{dx_i}{ds}\, \delta x_i .$$

Ici, le premier terme est nul parce que les points *1* et *2* sont fixés et donc $(\delta x_i)_1 = (\delta x_i)_2 = 0$. Ainsi

$$\delta J = - \int_1^2 \frac{d^2 x_i}{ds^2}\, \delta x_i\, ds.$$

La constance de u_i signifie que $d^2x_i/ds^2 = 0$ (rappelons que $d\tau = ds/(ic)$). Par conséquent, pour que la quadrivitesse d'une particule libre soit constante, il faut considérer que *pour un mouvement vrai l'action est extrémale*, c'est-à-dire que sa variation par rapport à la ligne d'univers correspondant au mouvement vrai de la particule est nulle:

$$\delta J = 0.$$

Passons maintenant à la théorie de la relativité générale. Attendu que la théorie de la relativité restreinte est localement valable en chacun des points d'univers, pour établir la loi du mouvement de la particule en l'absence de champ électromagnétique (et d'autres champs non gravitationnels), nous pouvons mettre à profit la propriété d'action extrémale pour le mouvement vrai ou, comme on dit, le

principe variationnel:

$$\delta J = \delta \int_1^2 ds = 0,$$

où maintenant $ds^2 = g_{ik} dx_i dx_k$.

Sans développer ici les détails du calcul, indiquons tout de suite le résultat. Les équations $d^2x_i/d\tau^2 = 0$ sont maintenant remplacées par les équations

$$\frac{d^2x_i}{d\tau^2} = -\Gamma^i_{kl} \frac{dx_k}{d\tau} \frac{dx_l}{d\tau},$$

où

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x_l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_m} \right)$$

et $g_{ik} g^{kl} = \delta_{il}$. C'est cette équation qui s'appelle *équation du mouvement dans un champ de gravitation.*

La dérivée $d^2x_i/d\tau^2$ peut être considérée comme une quadriaccélération et, par voie de conséquence, $-m\Gamma^i_{kl} \frac{dx_k}{d\tau} \frac{dx_l}{d\tau}$ comme une quadriforce qui s'exerce dans un champ de gravitation. Les quantités Γ^i_{kl} portent le nom de *symboles de Christoffel.*

Le tenseur métrique g_{ik} joue donc le rôle de potentiels de champ, et Γ^i_{kl}, celui d'intensité de champ.

Remarquons que

par un choix convenable d'un système de coordonnées on peut toujours faire s'annuler tous les symboles de Christoffel en tout point d'univers donné. Un tel choix signifie que nous sommes passés dans le voisinage du point considéré à un référentiel localement inertiel où le champ de gravitation ne s'exerce pas. C'est la possibilité d'un tel choix d'un système de coordonnées qu'exprime mathématiquement le principe d'équivalence.

Les lignes d'univers définies par le principe variationnel portent le nom de *lignes géodésiques* de l'espace quadridimensionnel muni de métrique g_{ik}.

La ligne géodésique dans un espace « courbe » remplace la droite dans l'espace plan ordinaire. Dans la théorie de la gravitation de Newton, le mouvement d'une particule dans l'espace plan ordinaire s'effectue suivant une trajectoire complexe, par exemple, dans le cas d'un champ uniforme elle a la forme d'une parabole. C'est précisément la trajectoire non rectiligne suivie par la particule qui témoigne que la particule est soumise à l'action d'une force, en l'occurrence d'une force de gravitation.

Dans la théorie de la relativité générale, le mouvement se fait sur une ligne géodésique dans l'espace-temps courbe et nous ne parlons

d'aucune force spéciale mais considérons seulement que la gravitation a changé la métrique de l'espace-temps. En ce sens

la gravitation dans la théorie d'Einstein est la même force « apparente » que la force centrifuge et la force de Coriolis dans la théorie de Newton.

Considérons à titre d'exemple le mouvement de la particule dans le cas où le tenseur métrique g_{ik} diffère peu du tenseur unité et revêt la forme

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1; \quad g_{44} = 1 + h,$$

où h est une petite quantité dépendant des coordonnées, $|h| \ll 1$, si bien que le carré de l'intervalle se détermine par la formule

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + (1 + h)\, dx_4^2 = d\mathbf{r}^2 - (c^2 + 2\varphi)\, dt^2,$$

où $dx_4 = icdt$ et $\varphi = c^2h/2$.

En posant $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$, où $\mathbf{v}$ est la vitesse de la particule, nous obtenons la différentielle du temps propre sous la forme

$$d\tau = ds/(ic) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} + h}\, dt \approx \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} + \frac{h}{2}\right) dt.$$

Par conséquent, l'expression du principe variationnel prend la forme

$$\frac{1}{ic}\, \delta J \equiv \delta \int_1^2 d\tau = \delta \int_1^2 \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} + \frac{h}{2}\right) dt = 0.$$

Il en résulte que

$$\int_1^2 \left(-\mathbf{v}\frac{d}{dt}\, \delta\mathbf{r} + \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{r}}\, \delta\mathbf{r}\right) dt = 0.$$

En intégrant par parties le premier terme et en tenant compte que la variation s'annule sur les frontières de *1* et *2*, nous obtenons

$$\int_1^2 \left(\dot{\mathbf{v}} + \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{r}}\right) \delta\mathbf{r}\, dt = 0.$$

La variation $\delta\mathbf{r}$ étant arbitraire, l'expression entre parenthèses s'annule, d'où l'on tire

$$\dot{\mathbf{v}} = -\operatorname{grad} \varphi.$$

Ainsi, nous avons obtenu l'équation du mouvement de Newton dans laquelle la force de gravitation est égale à $-m \operatorname{grad} \varphi$ (m étant la masse de la particule), c'est-à-dire que φ représente le potentiel de champ de gravitation. Nous voyons que dans un champ de gravi-

tation faible

$$g_{44} = 1 + 2\,\varphi/c^2.$$

Jusqu'ici nous avons considéré que le tenseur métrique était une fonction donnée des coordonnées x_i. Mais cette fonction elle-même, c'est-à-dire la métrique de l'espace-temps, se détermine, comme nous l'avons vu, par la matière, par sa structure, sa répartition et son mouvement.

L'essentiel consiste en ce que deux tenseurs se trouvent liés : le *tenseur de courbure* de l'espace-temps, déterminé par le tenseur métrique g_{ik}, et le *tenseur d'énergie-impulsion* de la matière.

Le tenseur de courbure R_{ik} de l'espace quadridimensionnel se définit par la formule universelle suivante

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x_l} - \frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x_k} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km},$$

où Γ^i_{kl} sont les symboles de Christoffel que nous avons déjà rencontrés. Ils comprennent les composantes de g_{ik} et leurs dérivées premières par rapport aux coordonnées. C'est pourquoi le tenseur de courbure fait intervenir tant les dérivées premières que les dérivées secondes du tenseur métrique par rapport aux coordonnées. Puisque le tenseur R_{ik} se détermine uniquement par le tenseur g_{ik}, on peut dire que le tenseur de courbure n'est qu'une notion purement géométrique.

Le tenseur d'énergie-impulsion T_{ik} n'est pas aussi universel que le tenseur de courbure. Cela tient à ce que la structure du tenseur T_{ik} dépend des propriétés concrètes de la matière qui « vit » dans l'espace-temps, ce qui rend impossible d'écrire pour lui une expression aussi générale que pour le tenseur R_{ik}. Dans le cas le plus simple, où la matière peut se décrire de façon purement hydrodynamique comme un certain milieu continu, le tenseur T_{ik} se définit par la formule

$$T_{ik} = (p + \varepsilon)\, u_i u_k + p g_{ik},$$

où p est la pression, ε, la densité d'énergie du milieu et $u_i = dx_i/d\tau$, le quadrivecteur vitesse.

Enonçons maintenant la loi générale qui établit la liaison entre la métrique de l'espace-temps et l'état de la matière. Cette loi est la suivante : *le tenseur de courbure de l'espace-temps est une fonction linéaire du tenseur d'énergie-impulsion de la matière.* Mathématiquement, elle s'exprime par la formule suivante :

$$R_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{ik} - \frac{1}{2}\, g_{ik} T\right),$$

où $T = T_{ik}g^{ik}$ (g^{ik} étant le tenseur inverse de g_{ik}, c'est-à-dire que $g_{ik}g^{kj} = \delta_{ij}$) et G, la *constante de gravitation*. C'est la même cons-

tante qui figure dans la loi de la gravitation universelle de Newton :

$$f = -G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

où m_1 et m_2 sont les masses de deux corps se trouvant à une distance r l'un de l'autre.

La loi établissant la liaison entre le tenseur de courbure et le tenseur d'énergie-impulsion a été découverte par Einstein en 1915. La formule traduisant cette loi porte le nom d'*équation d'Einstein.*

La loi de la gravitation de Newton est déduite de cette loi dans le cas non relativiste. Nous avons alors $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$, $g_{44} = 1 + 2\,\varphi/c^2$, où φ est, comme nous l'avons vu plus haut, le potentiel de gravitation. Le calcul des composantes du tenseur de courbure pour ces valeurs de g_{ik} donne le résultat suivant :

$$R_{44} = \Delta\varphi/c^2$$

(toutes les autres composantes de R_{ik} sont nulles).

Parmi les composantes du tenseur d'énergie-impulsion dans le cas non relativiste (et à pression p nulle) la seule composante $T_{44} = -\mu c^2$ (μ étant la densité de masse) est non nulle. Par suite, l'équation d'Einstein prend la forme

$$\Delta\varphi = 4\pi G\mu.$$

Mais cette équation n'est rien d'autre que l'équation obtenue dans la théorie de la gravitation de Newton pour le potentiel de gravitation. Elle est analogue à l'équation de Poisson pour le potentiel électrostatique, et de même que de l'équation de Poisson est déduite la loi de Coulomb, de l'équation d'Einstein est déduite la loi de la gravitation universelle de Newton.

Avant de clore ce paragraphe, arrêtons-nous encore un court instant à la métrique de l'espace-temps dans le cas où le champ de gravitation est pourvu de symétrie sphérique, c'est-à-dire qu'il est créé par un corps dont la répartition de la substance est à symétrie sphérique (le corps peut être quelconque). Dans ce cas l'équation d'Einstein admet une solution exacte et conduit à l'expression suivante pour le carré de l'intervalle à l'extérieur du corps :

$$ds^2 = dr^2/(1 - r_g/r) + r^2\,(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2) - (1 - r_g/r)c^2\,dt^2,$$

où $r_g = 2GM/c^2$ (M étant la masse du corps). Cette formule est appelée *métrique de Schwartschild*, du nom du savant allemand qui l'a obtenue en 1916. Pour $r \gg r_g$, cette métrique se réduit à la métrique obtenue dans la théorie de la relativité restreinte (métrique de Minkowski). La grandeur r_g s'appelle *rayon gravitationnel* d'un corps. Il est égal à 0,887 cm pour la Terre, à 2,95 km pour le Soleil et à $4{,}13\cdot 10^{11}$ km pour la Galaxie.

§ 7.11. Déplacement gravitationnel vers le rouge des raies spectrales

La théorie de la relativité générale prédit toute une série de phénomènes remarquables dont nous allons considérer ici deux phénomènes : le *déplacement vers le rouge* et la *déflexion de la lumière dans un champ de gravitation.* Le premier consiste en ce que

la fréquence de la lumière se propageant dans un champ de gravitation n'est pas la même le long de son trajet : elle est plus élevée là où le champ est plus intense. C'est pourquoi, par exemple, la lumière qui provient d'une étoile quelconque a sur la Terre une fréquence plus faible que sur l'étoile.

Le deuxième phénomène réside dans le fait que

un rayon lumineux est courbé par un champ de gravitation d'un corps massif.

Pour expliquer le déplacement vers le rouge, commençons par établir la relation entre la coordonnée temporelle x_4 ou, comme nous dirons, le *temps d'univers* $t = x_4/(ic)$ et le temps propre ou vrai τ d'un corps quelconque. A cet effet, il faut considérer deux événements infiniment proches l'un de l'autre se produisant à l'endroit où se trouve le corps. L'intervalle ds entre ces événements détermine alors (au facteur $1/(ic)$ près) l'intervalle $d\tau$ du temps propre ou vrai entre des événements pour le corps considéré. En annulant les différentielles des coordonnées spatiales ($dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0$) dans l'expression $ds^2 = g_{ik}\, dx_i dx_k$, nous obtenons la relation suivante entre les différentielles du temps propre ($d\tau$) et du temps d'univers (dt):

$$d\tau = \sqrt{g_{44}}\, dt,$$

d'où

$$\tau = \int \sqrt{g_{44}}\, dt,$$

où g_{44} dépend dans le cas général tant de t que de la position du corps.

Dans un champ de gravitation statique g_{44} est indépendant du temps et

$$\tau = \sqrt{g_{44}}\, t.$$

Nous avons vu plus haut que dans le cas d'un champ de gravitation faible $g_{44} = 1 + 2\varphi/c^2$, où φ est le potentiel de gravitation. Si en outre φ est indépendant du temps, il vient

$$\tau = (1 + \varphi/c^2)\, t, \qquad |\varphi/c^2| \ll 1.$$

Cette formule montre que le temps propre ou vrai s'écoule plus vite à des endroits de l'espace où le potentiel de gravitation est plus élevé. Si $\varphi < 0$ (ce qui est le cas usuel), le temps propre s'écoule

plus lentement là où le module du potentiel est plus grand. De la relation entre τ et t découle une remarquable conclusion suivante:

si l'une de deux horloges identiques a séjourné un certain temps dans un champ de gravitation à $\varphi < 0$, elle sera après ce séjour en retard par rapport à l'horloge qui n'a pas séjourné dans le champ de gravitation.

Examinons maintenant la propagation de la lumière dans un champ de gravitation constant. Dans le cas le plus simple la variation en fonction du temps du champ électromagnétique d'une onde lumineuse qui se propage dans un champ de gravitation constant se détermine par le facteur cos $[\omega_0 t + \chi(\mathbf{r})]$, où ω_0 est la fréquence correspondant au temps d'univers t et $\chi(\mathbf{r})$, la phase dépendant des coordonnées spatiales. Fait significatif, la fréquence ω_0 mesurée dans un champ de gravitation statique d'après le temps d'univers est une constante indépendante des coordonnées spatiales.

Pourtant, la dépendance du champ de l'onde lumineuse envers le temps d'univers ne présente pas d'intérêt physique direct parce qu'un observateur se trouvant en un certain point $\mathbf{r} = C^{te}$ de l'espace analyse le champ de l'onde lumineuse du point de vue de son propre temps τ et non du point de vue du temps d'univers t. C'est pourquoi dans l'expression cos $(\omega_0 t + \chi)$ le temps t doit être exprimé par τ. Nous obtiendrons alors cos $(\omega\tau + \chi)$, où

$$\omega = \omega_0 t/\tau = \omega_0/\sqrt{g_{44}}$$

ou dans le cas d'un champ de gravitation faible,

$$\omega = \omega_0 (1 - \varphi/c^2).$$

Cette formule détermine la fréquence ω de la lumière, mesurée en temps propre en un point de l'espace où le potentiel de gravitation est égal à φ. Elle montre que la fréquence mesurée en temps propre n'est pas la même le long du rayon lumineux (à la différence de la fréquence constante ω_0 !): elle est plus élevée à des endroits où le module du potentiel de gravitation φ est plus grand. En d'autres termes,

la fréquence ω augmente lorsque le rayon lumineux s'approche des corps qui engendrent un champ de gravitation et diminue lorsqu'il s'en éloigne.

Si la lumière est émise par un atome à un endroit où le potentiel de gravitation est φ_1 et est absorbée en un endroit où le potentiel de gravitation est φ_2, les fréquences de la lumière en ces endroits (mesurées en temps propre) sont différentes et ont pour valeurs respectives

$$\omega_1 = \omega_0 (1 - \varphi_1/c^2), \quad \omega_2 = \omega_0 (1 - \varphi_2/c^2).$$

En y faisant disparaître ω_0 et en tenant compte que $|\varphi_{1,2}|/c^2 \ll 1$, nous obtenons

$$\omega_2 = \omega_1 \left(1 + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2}\right),$$

$$(\omega_2 - \omega_1)/\omega_1 = (\varphi_1 - \varphi_2)/c^2.$$

En particulier, si la lumière « prend naissance » sur le Soleil ou sur une étoile avec une fréquence ω_1 et tombe sur la Terre, la fréquence ω_2 de la lumière incidente est inférieure à ω_1 parce que $\varphi_1 - \varphi_2 < 0$.

Jusqu'ici nous avons parlé de la variation de fréquence du rayon lumineux lors de son mouvement dans un champ de gravitation, si bien qu'il s'agissait seulement d'un atome émetteur unique.

Soient maintenant deux atomes émetteurs identiques: l'un sur le Soleil ou sur une étoile et l'autre sur la Terre. Leurs spectres d'émission observés respectivement sur le Soleil et sur la Terre sont tout à fait identiques. Mais lorsque le rayon lumineux émis par l'atome se trouvant sur le Soleil atteindra la Terre, sa fréquence ne sera plus égale à celle de la lumière émise par l'atome identique se trouvant sur la Terre. La fréquence de l'onde atteignant la Terre sera inférieure à celle de l'onde émise par l'atome terrestre. Cette différence de fréquence se détermine par la formule

$$\omega_1/\omega_2 = (\varphi_1 - \varphi_2)/c^2,$$

où φ_1 et φ_2 sont les potentiels de gravitation respectivement sur le Soleil et sur la Terre.

Puisque $\varphi_1 - \varphi_2 < 0$, $\Delta\omega < 0$, c'est-à-dire que le déplacement se produit dans le sens de diminution des fréquences. On s'explique ainsi l'appellation « déplacement vers le rouge » employée pour ce phénomène.

Le phénomène de déplacement vers le rouge est susceptible d'une interprétation physique simple basée sur l'aspect corpusculaire de la lumière. A savoir, représentons-nous le photon comme une particule d'énergie cinétique $\mathcal{E} = \hbar\omega$ et de masse $m = \mathcal{E}/c^2$. Lorsqu'une telle particule se déplace dans un champ de gravitation de potentiel φ, que nous supposerons faible, à son énergie cinétique s'ajoute l'énergie potentielle $m\varphi$, si bien que l'énergie totale de la particule devient égale à $\mathcal{E} + m\varphi = \hbar\omega\ (1 + \varphi/c^2)$. Lors du déplacement du photon son énergie totale se conserve, c'est-à-dire que

$$\hbar\omega_1\ (1 + \varphi_1/c^2) = \hbar\omega_2\ (1 + \varphi_2/c^2),$$

où ω_1 et ω_2 sont les fréquences du photon aux points de l'espace dont les potentiels de gravitation sont φ_1 et φ_2. Comme $|\varphi|/c^2 \ll 1$, il s'ensuit notre formule précédente pour le déplacement de fréquence $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$:

$$\Delta\omega/\omega = (\varphi_1 - \varphi_2)/c^2.$$

Si le champ de gravitation est produit par un corps dont la répartition de la masse présente une symétrie sphérique, le potentiel du champ à une distance r du centre du corps est égal à

$$\varphi = -GM/r,$$

où M est la masse du corps et G, la constante de gravitation. Supposons qu'un photon de fréquence ω_1 soit né sur la surface du corps $r = R$. Désignons par ω_2 la fréquence de ce photon à une distance infiniment grande du corps. Alors le déplacement de fréquence relatif s'exprime par la formule

$$\Delta\omega/\omega = -r_g/(2R),$$

où $r_g = 2GM/c^2$ est le rayon de gravitation du corps.

La formule donnant le déplacement vers le rouge est en excellent accord avec l'expérience. Par exemple, pour un rayon lumineux qui monte à 20 m au-dessus de la surface terrestre la formule donne pour la variation de fréquence relative dans le champ de gravitation de la Terre un résultat qui coïncide à 1 % près avec le résultat de l'expérience. Le déplacement vers le rouge des rayons lumineux en provenance du Soleil est mesuré à 6 % près.

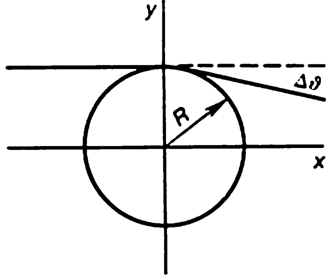


Fig. 7.2. Déflexion de la lumière dans le champ de gravitation

§ 7.12. Déflexion du rayon lumineux dans un champ de gravitation

Passons maintenant à l'étude du deuxième effet, c'est-à-dire de la déflexion du rayon lumineux dans un champ de gravitation. Qualitativement, cet effet peut être interprété si l'on part, comme dans le paragraphe précédent, du concept de rayon lumineux en tant que l'ensemble de particules, de photons, possédant une masse $m = \hbar\omega/c^2$. Supposons, par exemple, qu'une telle particule se déplace suivant l'axe des x dans un champ de gravitation produit par un corps de forme sphérique, de masse M et de rayon R (fig. 7.2). La déviation de la particule le long de l'axe des y se détermine en mécanique de Newton par l'équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{GMy}{r^3}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

En considérant que cette déviation est faible, on peut poser au second membre de cette équation $y = R$. Puis, en tenant compte que pour le photon $x = ct$, nous obtenons

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{GMR}{(R^2+x^2)^{3/2}}.$$

L'intégration de cette équation donne

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{GMx}{c^2R\sqrt{R^2+x^2}} + C^{te}.$$

Pour $x = -\infty$ nous avons $dy/dx = 0$, d'où $C^{te} = -GM/(c^2R)$. On peut en tirer pour l'angle de déviation du photon :

$$\Delta\theta = -\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=\infty} = \frac{2GM}{c^2R}.$$

Pourtant la déviation vraie est deux fois celle obtenue dans la théorie classique de Newton.

Montrons comment on trouve la déflexion du rayon dans un champ de gravitation en théorie de la relativité générale. Rappelons d'abord que si deux événements se situent sur un même rayon lumineux, dans la théorie de la relativité restreinte l'intervalle entre ces événements est nul. Dans la théorie de la relativité générale, cette propriété se conserve localement, c'est-à-dire que pour deux événements infiniment voisins l'un de l'autre qui se situent sur un même rayon lumineux l'intervalle est nul ; autrement dit, des points d'univers situés sur un rayon lumineux satisfont à la condition

$$ds^2 = g_{ik}dx_idx_k = 0.$$

Utilisons maintenant pour ds^2 la métrique de Schwarzschild (v. § 7.10). En désignant comme précédemment le potentiel de gravitation du corps $\varphi = -GM/r$, nous déduisons de la condition $ds^2 = 0$ pour $|\varphi|/c^2 \ll 1$, la relation suivante :

$$c^2\,dt^2 = d\mathrm{r}^2\,(1 - 2\varphi/c^2) - dr^2\,2\varphi/c^2,$$

où $d\mathrm{r}^2 = dr^2 + r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$ (θ et φ sont des angles azimutal et polaire).

Il nous faut maintenant déterminer la forme du rayon lumineux. On peut le faire en appliquant le *principe de Fermat* (v. § 20.3) d'après lequel

le chemin optique parcouru par un rayon lumineux passant d'un point à un autre correspond au temps minimal.

Cela signifie que la variation de l'intégrale $\int_C dt$ prise le long d'un contour C joignant deux points donnés, c'est-à-dire la variation de sa valeur lors de la variation du contour C, est nulle dans le cas où C coïncide avec le rayon lumineux :

$$\delta\int_C dt = 0.$$

En y introduisant au lieu de dt la valeur donnée par la condition $ds^2 = 0$, la métrique utilisée étant celle de Schwarzschild, nous obte-

nons pour déterminer la forme du rayon la condition variationnelle suivante :

$$\delta \int \sqrt{\mathrm{d}\mathbf{r}^2 (1 - 2\varphi/c^2) - \mathrm{d}r^2\, 2\varphi/c^2} = 0.$$

Supposons que le rayon se propage dans le plan (x, y) (fig. 7.2). Alors

$$\mathrm{d}\mathbf{r}^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2, \quad \mathrm{d}r = (x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y)/r, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

et la condition variationnelle devient

$$\delta \int \sqrt{(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)(1 - 2\varphi/c^2) - (x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y)^2\, 2\varphi/(r^2c^2)} = 0.$$

Enfin, tenons compte de ce que le rayon lumineux se propage au voisinage de l'axe des x, c'est-à-dire que son angle d'inclinaison sur cet axe est faible : $|\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}x\,| \ll 1$. Dans ce cas, la condition variationnelle prend une forme beaucoup plus simple :

$$\delta \int \left[\frac{1}{2}(y')^2 - \frac{\varphi}{c^2}\left(1 + \frac{x^2}{r^2}\right)\right] \mathrm{d}x = 0,$$

où $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$. Si on la récrit sous la forme

$$\delta \int L\,\mathrm{d}x = 0, \quad L = \frac{1}{2}(y')^2 - \frac{\varphi}{c^2}\left(1 + \frac{x^2}{r^2}\right),$$

il est facile de s'assurer qu'il en résulte l'équation

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

(connue sous le nom d'*équation de Lagrange-Euler*). En y portant l'expression de L, nous obtenons

$$y'' = -\frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}\right) y.$$

En admettant que la forme du rayon lumineux ne diffère que peu de la droite $y = R$ (fig. 7.2), on peut remplacer au second membre de cette équation y par R. Nous obtiendrons finalement la formule suivante pour la variation résultante de la quantité y' lorsque x varie de $-\infty$ à ∞ :

$$\Delta y' = -\frac{GMR}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x^2 + R^2}{\sqrt{(x^2 + R^2)^5}}\, \mathrm{d}x.$$

C'est cette quantité qui détermine l'angle de déflexion du rayon lumineux $\Delta\theta = |\,\Delta y'\,|$. Intégrons, il vient

$$\Delta\theta = 4GM/(c^2R) = 2r_g/R.$$

En y introduisant les valeurs de R et r_g pour le Soleil, on obtient la valeur théorique $\Delta\theta \approx 1{,}75''$. La valeur obtenue par voie expérimentale $\Delta\theta = (1{,}73 \pm 0{,}05)''$.

La déflexion des rayons lumineux dans un champ de gravitation est à la base de l'effet dit de *lentille gravitationnelle*. Si par exemple la lumière émise par une source S (fig. 7.3) se propage vers le

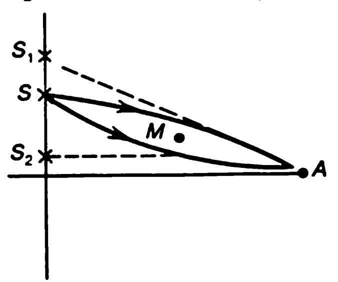


Fig. 7.3. Principe d'une lentille gravitationnelle

point d'observation A et rencontre sur son trajet un corps massif M, l'observateur se trouvant au point A verra, si le corps est ponctuel, deux sources lumineuses S_1 et S_2. Cet effet est lié à la découverte d'une paire unique de quasars : radiosources de très grande puissance QS00957 + 561 A, B.

FORMULES FONDAMENTALES

Transformations de Lorentz

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

$$t' = \frac{t - x/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Invariance de l'intervalle

$$ds^2 = ds'^2,$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\,dt^2$$

Temps propre

$$d\tau = dt\sqrt{1 - V^2/c^2}$$

Transformation de vitesse

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2},$$

$$v_y = \frac{v'_y\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2},$$

$$v_z = \frac{v'_z\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2}$$

Aberration de la lumière

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{\dfrac{V}{c} + \cos\theta'}\sin\theta'$$

Transformation de champs électromagnétiques	$\mathbf{E}'_\perp = \left(\mathbf{E}_\perp + \frac{1}{c}[\mathbf{V}\mathbf{H}_\perp]\right) \Big/ \sqrt{1-V^2/c^2}$, $\mathbf{H}'_\perp = \left(\mathbf{H}_\perp - \frac{1}{c}[\mathbf{V}\mathbf{E}_\perp]\right) \Big/ \sqrt{1-V^2/c^2}$, $\mathbf{E}'_\parallel = \mathbf{E}_\parallel$, $\mathbf{H}'_\parallel = \mathbf{H}_\parallel$
Invariants du champ	$E^2 - H^2 = E'^2 - H'^2$, $(\mathbf{E}\mathbf{H})^2 = (\mathbf{E}'\mathbf{H}')^2$
Champs d'une charge en mouvement uniforme	$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{r}}{r^3} \frac{1-V^2/c^2}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}}$, $\mathbf{H} = \frac{1}{c}[\mathbf{V}\mathbf{E}]$
Impulsion et énergie d'une particule	$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, $\mathscr{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = c\sqrt{m^2c^2+p^2}$
Equation du mouvement d'une particule chargée dans un champ électromagnétique	$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}]\right)$, $\frac{d\mathscr{E}}{dt} = e\mathbf{v}\mathbf{E}$
Effet Doppler	$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1-V^2/c^2}}{1-(V/c)\cos\theta}$
Déplacement vers le rouge	$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\varphi_1-\varphi_2}{c^2}$
Angle de déflexion du rayon lumineux dans un champ de gravitation	$\Delta\theta = \frac{2r_g}{R}$, $r_g = \frac{2GM}{c^2}$

II. PROPRIÉTÉS ÉLECTRIQUES ET MAGNÉTIQUES DE LA SUBSTANCE

CHAPITRE 8

DIÉLECTRIQUES

§ 8.1. Molécules polaires et non polaires

Comme nous l'avons dit à de nombreuses occasions, la diminution du champ dans les diélectriques par rapport au vide (pour les mêmes charges créatrices du champ) est liée au déplacement des charges dans les molécules du diélectrique sous l'effet du champ. Un tel déplacement des charges donne lieu à la naissance dans les molécules d'un champ dirigé le long du moment dipolaire. Il convient dans ces conditions de distinguer deux types de molécules de nature radicalement différente. Les molécules d'un type ne possèdent pas de moment dipolaire permanent en l'absence de champ, mais le moment dipolaire s'y apparaît sous l'action du champ qui agit comme s'il allongeait la molécule en écartant ses charges: les positives dans le sens du champ et les négatives en sens opposé. De telles molécules sont dites *non polaires*. Dans le cas des champs pas trop intenses, le moment dipolaire **d** d'une molécule non polaire est proportionnel à l'intensité du champ électrique: $\mathbf{d} = \varepsilon_0\alpha'\mathbf{E}$, où α' est une certaine grandeur caractéristique de chaque molécule; on l'appelle *coefficient de polarisabilité* (ou *polarisabilité* tout court) de la molécule.

Les molécules de l'autre type possèdent un moment dipolaire permanent même en l'absence de champ électrique extérieur. De telles molécules possédant un moment dipolaire pro re ou, comme on dit encore, un moment dipolaire spontané, sont appelées *molécules polaires*. Si une molécule polaire de moment dipolaire $\mathbf{d}_0$ est placée dans un champ électrique **E**, elle sera soumise à un couple de forces (fig. 8.1) de moment

$$\mathbf{K} = [\mathbf{d}_0\mathbf{E}].$$

En faisant tourner le dipôle, ce couple tend à le placer le long du champ. Ainsi, dans le cas d'un diélectrique constitué de molécules

polaires (un tel diélectrique est dit *polaire*), l'action du champ électrique est tout d'abord une action d'orientation : le champ tend à orienter les dipôles des différentes molécules le long du champ. En outre, les molécules polaires peuvent certes, de même que les molécules non polaires, se déformer sous l'effet d'un champ électrique extérieur. Mais cet effet est secondaire par rapport à l'effet d'orientation.

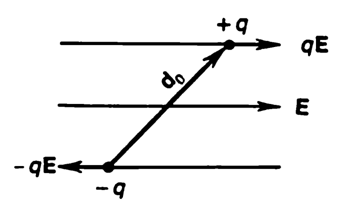


Fig. 8.1. Action d'orientation exercée par un champ électrique extérieur sur une molécule de diélectrique polaire

Bien que les molécules d'un diélectrique polaire possèdent un moment dipolaire spontané, les directions des moments dipolaires des différentes molécules de gaz, de liquides et de certains diélectriques solides polaires sont réparties, en l'absence de champ, d'une façon désordonnée, et la somme des moments dipolaires de toutes les molécules est donc nulle.

L'appartenance d'une molécule à l'un de deux types se détermine par sa structure et est étroitement liée à la symétrie de la molécule considérée. Ceci est illustré par les figures 8.2 et 8.3 qui montrent la disposition des ions dans les molécules d'eau H_2O et d'ammo-

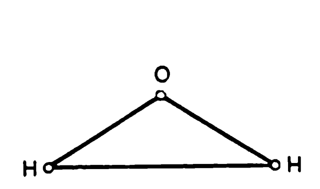


Fig. 8.2. Molécule d'eau

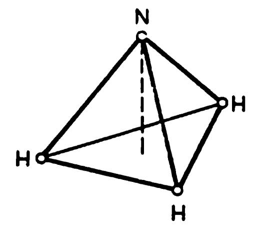


Fig. 8.3. Molécule d'ammoniac

niac NH_3. Ces deux molécules sont polaires parce qu'elles ont une direction déterminée le long de laquelle se situe le vecteur $\mathbf{d}_0$. Dans la molécule d'eau, le moment dipolaire est orienté suivant la bissectrice de l'angle dont le sommet est occupé par l'atome d'oxygène (cet angle est égal à 108°) et est égal à $6{,}2 \cdot 10^{-30}$ C·m. Quant au moment dipolaire de la molécule d'ammoniac, il est orienté suivant la hauteur d'une pyramide (ligne en traits interrompus de la figure 8.3) et vaut $5{,}1 \cdot 10^{-30}$ C·m. Les moments dipolaires de la plupart des molécules polaires sont de ce même ordre de grandeur parce que la dimension de la molécule est près de 10^{-10} m et la charge unitaire de l'ion est de $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

Des exemples de molécules plus symétriques sont donnés par la figure 8.4. Ces molécules ne sont pas polaires parce qu'elles ne

présentent pas une direction privilégiée suivant laquelle pourrait s'orienter le moment dipolaire propre. Lorsqu'une telle molécule est soumise à l'action d'un champ électrique extérieur, sa symétrie se trouve troublée et elle acquiert un moment dipolaire.

Considérons un gaz constitué par des molécules non polaires identiques. Dans un champ d'intensité **E** une telle molécule acquiert un moment dipolaire $\mathbf{d} = \varepsilon_0 \alpha' \mathbf{E}$. Si n est la densité de molécules, le vecteur polarisation du gaz a pour expression $\mathbf{P} = n\mathbf{d} = \varepsilon_0 \alpha \mathbf{E}$,

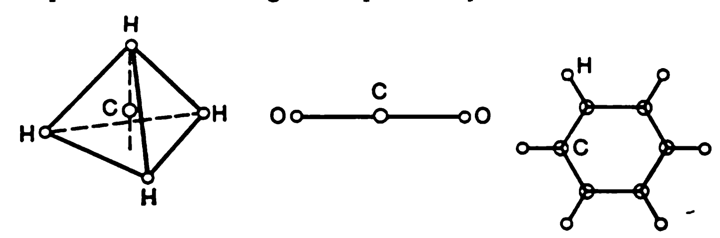


Fig. 8.4. Exemples de molécules non polaires

où $\alpha = n\alpha'$ est la susceptibilité diélectrique absolue du gaz. Comme nous l'avons vu au chapitre 2, la permittivité diélectrique ε est liée à la susceptibilité par la relation $\varepsilon = 1 + \alpha$. Nous voyons que parmi les grandeurs macroscopiques seule la densité de gaz non polaire entre dans l'expression de la permittivité.

Considérons maintenant un gaz composé de molécules polaires identiques. Dans ce cas, nous l'avons vu, le champ électrique tend à orienter les moments dipolaires des molécules dans le sens du champ. Or, cette tendance est contrariée par l'agitation thermique des molécules. Pour tenir compte de ces deux effets — l'action d'orientation du champ et l'action opposée de l'agitation thermique — il convient de déterminer la répartition des molécules suivant les directions de leurs moments dipolaires propres.

Pour résoudre ce problème, rappelons au préalable que si le gaz est placé dans un champ de force quelconque et se trouve à l'état d'équilibre statistique, la répartition spatiale de ses molécules se détermine par la *formule de Boltzmann*

$$n(\mathbf{r}) = n_0 e^{-U(\mathbf{r})/(kT)}.$$

Ici, $n(\mathbf{r})$ est la densité de molécules au point $\mathbf{r}$; $U(\mathbf{r})$, l'énergie potentielle de la molécule en ce point; n_0, la densité de molécules en un point où $U = 0$; T, la température du gaz; k, la constante de Boltzmann. Pour résoudre le problème qui nous intéresse on peut utiliser justement la formule de Boltzmann. Ce faisant, il convient d'entendre par U l'énergie potentielle du dipôle dans le champ (v. § 1.3):

$$U = -\mathbf{d}_0 \mathbf{E} = -d_0 E \cos\vartheta,$$

où $\mathbf{d}_0$ est le moment dipolaire propre de la molécule et ϑ, l'angle formé entre le moment dipolaire $\mathbf{d}_0$ et le champ $\mathbf{E}$. Pour ce qui est de la densité locale de molécules n (r), il faut maintenant parler non pas d'elle mais du nombre de molécules contenues dans l'angle solide unité axé sur la direction donnée de $\mathbf{d}_0$. En désignant par dN le nombre de molécules d'un gaz polaire dont les moments dipolaires sont compris dans un élément do d'angle solide et en tenant compte que $do = 2\pi \sin \vartheta \, d\vartheta$, on peut écrire

$$dN = C \exp [d_0 E \cos \vartheta/(kT)] \, 2\pi \sin \vartheta d\vartheta,$$

où C est une constante qui se détermine par la condition

$$C \int_0^{\pi} \exp [d_0 E \cos \vartheta/(kT)] \, 2\pi \sin \vartheta \, d\vartheta = N$$

(N étant le nombre total de molécules de gaz).

Déterminons maintenant la polarisation électrique $\mathbf{P}$ du gaz. Puisque la répartition spatiale des moments dipolaires dépend uniquement de l'angle ϑ que font entre eux les vecteurs $\mathbf{d}_0$ et $\mathbf{E}$, les composantes du vecteur $\mathbf{d}_0$ perpendiculaires au champ des molécules distinctes se compensent. La composante perpendiculaire au champ du vecteur $\mathbf{P}$ est donc nulle, et sa composante parallèle au champ est égale à $P = nd_0 \langle \cos \vartheta \rangle$, où n est la densité de dipôles et $\langle \cos \vartheta \rangle$ est la valeur moyenne du cos prise sur tous les dipôles:

$$\langle \cos \vartheta \rangle = \frac{1}{N} \int \cos \vartheta \, dN;$$

$$\langle \cos \vartheta \rangle = \frac{2\pi}{N} \int_0^{\pi} \exp \left(\frac{d_0 E \cos \vartheta}{kT} \right) \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta.$$

D'ordinaire, $d_0 E/(kT) \ll 1$, si bien que

$$dN = -\frac{N}{2} \left(1 + \frac{d_0 E}{kT} \cos \vartheta \right) d (\cos \vartheta);$$

$$\langle \cos \vartheta \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \left(1 + \frac{d_0 E}{kT} \cos \vartheta \right) \cos \vartheta \, d (\cos \vartheta) = \frac{d_0 E}{3kT}.$$

Comme $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \alpha \mathbf{E}$, on a pour un gaz polaire

$$\alpha = \frac{n d_0^2}{3\varepsilon_0 kT}, \quad \varepsilon = 1 + \frac{n d_0^2}{3kT\varepsilon_0}.$$

On remarquera, qu'à la différence de la permittivité du gaz de molécules non polaires, celle du gaz de molécules polaires dépend de la température. C'est pourquoi si l'on établit expérimentalement que la permittivité d'un diélectrique varie avec la température, cela signifie que ce diélectrique est polaire.

§ 8.2. Permittivité diélectrique des gaz denses et des liquides

Au paragraphe précédent nous avons défini la permittivité diélectrique des gaz en la liant à la polarisabilité d'une molécule distincte. A cet effet nous nous sommes placés dans l'hypothèse où le champ agissant sur une molécule distincte, ou comme on dit le champ local, coïncide avec le champ macroscopique moyen existant dans le diélectrique. Or, ces grandeurs diffèrent l'une de l'autre et la différence est d'autant plus grande que la densité de particules est plus forte.

Pour comprendre la différence entre un champ local et un champ moyen, rappelons comment nous avons déterminé la force qui s'exerce sur l'armature d'un condensateur plan. Il semble à première vue que cette force (rapportée à l'unité de surface) soit égale au produit de la densité superficielle de charge σ par l'intensité du champ $E = \sigma/\varepsilon_0$. Or, en réalité la densité superficielle de force est égale à

$$f = \frac{1}{2}\sigma E$$

parce que la force exercée sur la charge de l'armature se détermine non par le champ total mais seulement par le champ produit par la seconde armature (à l'endroit où se trouve la charge). Ce champ, qui a le sens d'un champ local (conformément à la terminologie adoptée plus haut), est égal à $\sigma/(2\varepsilon_0)$, c'est-à-dire à $E/2$.

En partant de cette analogie on peut dire que le champ local en un certain point du diélectrique est un champ qui existe dans une petite cavité entourant ce point du diélectrique. Dans le cas d'un gaz ou d'un liquide, c'est-à-dire de diélectriques isotropes, il est naturel de donner à cette cavité une forme sphérique. Comme il a été montré au § 2.2, l'intensité du champ dans une telle cavité s'exprime par

$$\mathbf{E}_l = \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon+1}\mathbf{E},$$

où $\mathbf{E}$ est l'intensité du champ loin de la cavité (ou, ce qui revient au même, l'intensité du champ qui existait au point considéré avant que l'on n'eût découpé la cavité). En se rappelant que $\varepsilon = 1 + \alpha$, on peut récrire l'expression du champ local $\mathbf{E}_l$ sous la forme

$$\mathbf{E}_l = E + \frac{\alpha}{3+2\alpha}E = \mathbf{E} + \frac{\varepsilon_0^{-1}}{3+2\alpha}\mathbf{P},$$

où $\mathbf{P} = \varepsilon_0\alpha E$ est la polarisation électrique. Si $\alpha \ll 1$, cette formule devient

$$\mathbf{E}_l = \mathbf{E} + \mathbf{P}/(3\varepsilon_0).$$

Elle porte le nom de *formule de Lorentz pour le champ local.*

Sous l'effet du champ local la molécule acquiert un moment dipolaire dirigé dans le sens de ce champ $\mathbf{d} = \alpha'\varepsilon_0\mathbf{E}_l$, où α' est le coefficient de polarisabilité de la molécule qui ne dépend que des propriétés de la molécule. Si n est la densité de molécules, la polarisation $\mathbf{P} = \alpha_g\varepsilon_0\mathbf{E}_l$, où $\alpha_g = n\alpha'$. D'un autre côté, $\mathbf{P} = \alpha\varepsilon_0\mathbf{E}$. On peut donc écrire

$$\alpha_g\left(E + \frac{\alpha}{3+2\alpha}E\right) = \alpha E$$

et

$$\alpha = \frac{3}{4}\left(\alpha' n - 1 + \sqrt{1 + \frac{2}{3}\alpha' n + \alpha'^2 n^2}\right).$$

Cette formule (connue sous le nom de *relation d'Onsager*) détermine la susceptibilité électrique α en fonction de la densité n de particules pour une valeur donnée du paramètre α', c'est-à-dire du coefficient de polarisabilité d'une molécule distincte.

La quantité α' peut être déterminée si l'on trouve au préalable, par voie expérimentale, la susceptibilité d'un gaz raréfié vu que dans ce cas la susceptibilité diélectrique du gaz est égale à $\alpha' n$ (la relation d'Onsager conduit elle aussi à un tel résultat pour les faibles valeurs de $\alpha' n$). Aussi, connaissant la densité du gaz, peut-on calculer α'. Le sens de la relation d'Onsager réside dans le fait qu'à l'aide de la même quantité α' on peut calculer la susceptibilité diélectrique d'un gaz dense ainsi que d'un liquide (à condition, bien sûr, que le passage à l'état condensé n'entraîne pas une variation de la polarisabilité de la molécule). Un tel calcul donne, par exemple, pour la permittivité diélectrique de CS_2 liquide, une valeur de 2,76, alors que le résultat expérimental est de 2,64 (la densité de CS_2 liquide étant dans ce cas 380 fois celle du gaz).

La relation d'Onsager donne $\alpha \approx \alpha' n\,(1 + \alpha' n/3)$ à des termes en $\alpha' n$ quadratiques près. Cette dernière expression peut se mettre (également à des termes quadratiques près) sous la forme

$$\alpha = \frac{\alpha' n}{1 - \alpha' n/3}.$$

Cette formule porte le nom de *formule de Lorenz-Lorentz*. En exprimant, à l'aide de cette formule, $\alpha' n$ par α et en remplaçant α par $(\varepsilon - 1)$, nous obtenons

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \alpha' n/3$$

(*formule de Clausius-Mosotti*).

En faisant usage de ces deux formules, on ne devra pas oublier qu'elles ne sont valables que dans le cas où $\alpha' n/3$ est petit par rapport à l'unité. Si $\alpha' n/3 = 1$, la formule de Lorenz-Lorentz donne pour α une valeur infiniment grande, alors qu'en réalité, d'après la relation d'Onsager, $\alpha = 3\,(1 + \sqrt{3})/2$.

§ 8.3. Permittivité diélectrique des cristaux

Les gaz et les liquides sont des milieux *isotropes*. Cela signifie que toutes leurs propriétés physiques, et notamment les propriétés électriques, sont uniformes dans toutes les directions. Au contraire, les corps solides (plus exactement, les monocristaux) se caractérisent par l'anisotropie de leurs propriétés. Autrement dit, les propriétés d'un monocristal varient suivant la direction. En particulier, la polarisabilité du cristal n'est en général pas la même dans les différentes directions. L'anisotropie des propriétés d'un monocristal est liée naturellement aux particularités de sa structure interne, c'est-à-dire à la présence du réseau cristallin.

La polarisabilité anisotrope du cristal se manifeste en particulier par le fait que si l'on découpe dans un monocristal deux plaques orientées différemment par rapport aux axes cristallographiques et qu'on place d'abord l'une et ensuite l'autre entre les armatures d'un condensateur, la capacité du condensateur ne sera en général pas la même dans les deux cas. Il en résulte que la permittivité diélectrique et donc la susceptibilité diélectrique du cristal varie suivant la direction. Une exception n'est faite que pour des cristaux du système cubique qui se comportent comme des corps isotropes.

Si l'on prend, par exemple, le cristal de béryl $(SiO_3)_6Al_2Be_3$ appartenant au système hexagonal, sa permittivité diélectrique est égale à 7,44 et à 7,85 suivant que le champ électrique est parallèle ou perpendiculaire à l'axe d'ordre 6. La permittivité diélectrique de l'apatite est égale à 7,4 lorsque le champ est dirigé le long de l'axe et à 9,5 lorsqu'il est perpendiculaire à l'axe. C'est dans le rutile TiO_2 appartenant au système tétragonal que la permittivité diélectrique varie le plus fortement suivant la direction. Si le champ est orienté suivant l'axe (d'ordre 4), la permittivité diélectrique est égale à 173, alors que dans le cas où le champ est perpendiculaire à cet axe elle n'est que de 89.

L'anisotropie de polarisabilité est caractéristique des monocristaux. Dans les polycristaux constitués par un très grand nombre de cristallites minuscules, orientés d'une façon désordonnée l'un par rapport à l'autre, la polarisabilité se trouve moyennée sur tout le volume, si bien que de tels cristaux se comportent comme des corps isotropes, c'est-à-dire comme les gaz et les liquides.

Pour les gaz et les liquides, la polarisation électrique $\mathbf{P} = \varepsilon_0\alpha\mathbf{E}$ est, comme nous l'avons vu, proportionnelle et parallèle à l'intensité du champ **E**, α étant la susceptibilité diélectrique. Pour les monocristaux diélectriques, cette formule est en général inapplicable parce qu'elle ne tient pas compte de l'effet d'anisotropie. En outre, il existe des monocristaux dont la polarisation électrique ne s'annule pas pour $E = 0$ et dépend d'une façon complexe, non linéaire, du champ. Nous considérons de plus près ces effets au cours

du paragraphe suivant et pour l'instant, nous allons examiner seulement l'effet d'anisotropie.

Si la polarisation **P** d'un monocristal est nulle pour $E = 0$, elle varie linéairement en fonction du champ lorsque l'intensité de ce dernier est suffisamment faible. Dans ces conditions, il faut ne pas perdre de vue que le vecteur polarisation dans le monocristal peut avoir un sens différent de celui du champ. Pourtant, si complexe que soit la symétrie du cristal, il existe toujours dans tout cristal au moins trois directions perpendiculaires entre elles telles que si la direction du champ coïncide avec l'une d'elles, le vecteur polarisation est dirigé dans le sens du champ. Cela signifie que si les axes de coordonnées X, Y, Z sont choisis suivant ces directions (on les appelle *directions principales de polarisabilité*) et si le champ électrique **E** est dirigé le long de l'axe des X, c'est-à-dire que $E_X = E$, $E_Y = E_Z = 0$, le vecteur polarisation **P** ne comporte que la projection P_X sur l'axe X non nulle qui est liée à E_X par la relation

$$P_X = \varepsilon_0 \alpha_1 E_X,$$

où α_1 est une quantité caractéristique du cristal indépendante du champ (supposé faible) et représentant la susceptibilité diélectrique du cristal le long de l'axe X. D'une manière analogue, si le champ est dirigé le long de l'axe Y ou de l'axe Z, le vecteur polarisation est orienté suivant l'axe Y ou l'axe Z, de sorte que dans le premier cas $P_Y = \varepsilon_0 \alpha_2 E_Y$, et dans le second cas $P_Z = \varepsilon_0 \alpha_3 E_Z$, où α_2 et α_3 sont les susceptibilités diélectriques du cristal suivant les axes Y et Z. Les quantités α_1, α_2, α_3 s'appellent *valeurs principales de la susceptibilité diélectrique* (de la polarisabilité) du cristal.

Considérons maintenant le cas où la direction du champ électrique **E** ne coïncide avec aucune des directions principales de polarisabilité. Pour déterminer la polarisation, représentons dans ce cas le champ par une superposition

$$\mathbf{E} = \mathbf{i} E_X + \mathbf{j} E_Y + \mathbf{k} E_Z,$$

où **i**, **j**, **k** sont des vecteurs unitaires normaux aux axes X, Y, Z; E_X, E_Y, E_Z, les projections du champ sur ces axes. Comme la polarisation **P** varie linéairement en fonction du champ **E**, les projections du vecteur polarisation sur les axes de coordonnées X, Y, Z sont $P_X = \varepsilon_0 \alpha_1 E_X$; $P_Y = \varepsilon_0 \alpha_2 E_Y$, $P_Z = \varepsilon_0 \alpha_3 E_Z$ et le vecteur **P** peut donc s'écrire sous la forme

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 (\mathbf{i} \alpha_1 E_X + \mathbf{j} \alpha_2 E_Y + \mathbf{k} \alpha_3 E_Z).$$

Il est clair que si les quantités α_1, α_2, α_3 ne sont pas égales, le vecteur **P** n'est pas parallèle au vecteur **E** comme c'est le cas pour un milieu isotrope.

L'anisotropie de polarisabilité conduit à celle de la permittivité diélectrique parce que l'induction électrique **D** est liée à la polarisation **P** et à l'intensité du champ électrique **E** par la relation $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ que le corps soit isotrope ou anisotrope. Il résulte de cette relation que dans les faibles champs les vecteurs **D** et **E** sont une fonction linéaire l'un de l'autre mais dans le cas général ces vecteurs ne sont pas parallèles. Si l'on introduit les *valeurs principales de la permittivité diélectrique*

$$\varepsilon_1 = 1 + \alpha_1, \quad \varepsilon_2 = 1 + \alpha_2, \quad \varepsilon_3 = 1 + \alpha_3.$$

les projections des vecteurs **D** et **E** sur les directions principales seront liées par les relations

$$D_X = \varepsilon_1\varepsilon_0 E_X, \quad D_Y = \varepsilon_2\varepsilon_0 E_Y, \quad D_Z = \varepsilon_3\varepsilon_0 E_Z.$$

Les quantités α_1, α_2, α_3 sont toujours positives, de ce fait, les valeurs principales de la permittivité diélectrique sont toujours supérieures à l'unité.

Dans les cristaux à faible symétrie du réseau appartenant aux systèmes *triclinique*, *monoclinique* et *rhombique*, toutes les trois valeurs principales de la permittivité diélectrique sont différentes. Ces cristaux sont dits *biaxiaux*. En outre, dans les cristaux du système rhombique les directions principales se déterminent cristallographiquement, alors que les directions principales des cristaux du système triclinique ne sont pas liées à des directions cristallographiques quelconques.

Dans les cristaux des systèmes *tétragonal*, *rhomboédrique* et *hexagonal* deux des trois valeurs principales de la permittivité diélectrique sont identiques (de tels cristaux sont dits *uniaxiaux*); dans ce cas, une des directions principales coïncide avec l'axe de symétrie (d'ordre 4, 3, 6 respectivement), et les deux autres peuvent être choisies arbitrairement dans un plan perpendiculaire à cet axe.

Dans les cristaux du système *cubique* toutes les trois valeurs principales de la permittivité diélectrique sont les mêmes. C'est pourquoi de tels cristaux se comportent comme des milieux isotropes; en particulier, les directions principales peuvent se choisir arbitrairement.

Soulignons une fois de plus qu'à la différence des monocristaux les polycristaux se comportent dans un champ électrostatique comme des milieux isotropes.

§ 8.4. Cristaux à polarisation spontanée

Dans le paragraphe précédent nous avons déjà signalé que le cristal peut non seulement se caractériser par l'anisotropie de polarisabilité mais également posséder une polarisation en l'absence de tout champ électrique. Cela tient à ce que le monocristal peut être

considéré comme une molécule géante unique. Il n'est donc pas surprenant que, de même qu'une molécule, le cristal peut être polaire dans son ensemble, c'est-à-dire posséder un moment dipolaire en l'absence de champ électrique extérieur. Ce moment sera macroscopique, c'est-à-dire que sa valeur sera proportionnelle au volume du cristal. Ainsi, dans ce cas, en l'absence de champ électrique, le cristal est pourvu d'une polarisation non nulle. Cette *polarisation* est dite *propre* ou *spontanée.*

Pour que le cristal possède une polarisation spontanée, il doit comporter une certaine direction privilégiée, invariante pour toutes les transformations de symétrie de son réseau. En particulier, parmi les éléments de symétrie ne doit pas figurer le centre de symétrie, sinon toute direction devient équivalente à la direction diamétralement opposée. Les éléments de symétrie ne peuvent comprendre qu'un seul axe et des plans de symétrie passant par cet axe. Cette condition est, certes, nécessaire mais nullement suffisante pour que le cristal soit pourvu de polarisation spontanée. Les cristaux à polarisation spontanée sont désignés sous le terme de *pyro-électriques.*

Parmi les cristaux à polarisation spontanée on distingue ceux qui possèdent un moment spontané à toute température, c'est-à-dire dans tout le domaine de températures dans lequel existe l'état cristallin, et ceux qui ne le possèdent que dans un intervalle de températures bien déterminé. Les cristaux du premier type sont des pyro-électriques proprement dits, et ceux du second type sont des ferro-électriques. Les substances pyro-électriques sont représentées, par exemple, par la tourmaline, et les principales substances ferro-électriques sont le sel de Seignette, le titanate de baryum et autres. Dans les corps pyro-électriques le moment dipolaire spontané ne se manifeste ordinairement qu'après leur chauffage lorsqu'ils se libèrent des ions déposés (ce qui explique l'emploi du préfixe « pyro »).

Le moment dipolaire spontané des pyro-électriques est dû soit au déplacement des sous-réseaux d'ions, soit à l'arrangement des groupes d'atomes possédant un moment dipolaire. Le déplacement des sous-réseaux a lieu, par exemple, dans les cristaux de titanate de baryum $BaTiO_3$. Le titanate de baryum est un cristal du système cubique : les ions Ba^{2+} se situent aux sommets du cube, les ions Ti^{4+}, au centre du cube et les ions O^{2-}, aux centres des faces (la structure de ce type s'appelle « structure de la pérowskite » du nom du minéral pérowskite $CaTiO_3$). A des températures inférieures à 391 K, lorsque le cristal de titanate de baryum possède une polarisation spontanée, le réseau du cristal est un peu déformé, à savoir étiré le long d'une des arêtes du cube ; c'est dans cette direction que se déplace l'ion de titane et prend naissance le moment dipolaire.

Dans les corps ferro-électriques, les ions (ou les groupes d'atomes possédant un moment dipolaire) responsables de l'apparition de la polarisation spontanée se déplacent assez facilement, alors que dans

les pyro-électriques ils sont fixés rigidement. C'est pour cette raison que la polarisation spontanée des ferro-électriques n'existe que dans une gamme de température déterminée, alors celle des pyro-électriques existe à toute température. Au-dessus d'une certaine température (dite *point de Curie* ou *température de Curie*) le moment dipolaire spontané disparaît dans les ferro-électriques. En même temps la symétrie du réseau cristallin subit une variation de sorte qu'au-dessous et au-dessus de la température de Curie la substance existe en deux phases différentes. Elles sont appelées respectivement *phases ferro-électrique* et *para-électrique.*

La transition de phase d'une substance ferro-électrique peut être tant du premier que du deuxième ordre. Dans le cas de la transition de phase du premier ordre, il se produit soit le dégagement, soit l'absorption de chaleur, alors dans la transition de phase du deuxième ordre la capacité calorifique du corps ferro-électrique subit une variation par saut au point de Curie. Lorsque la température d'un corps ferro-électrique s'approche de celle du point de Curie, sa permittivité diélectrique accuse une brusque croissance. Dans les corps pyro-électriques les transitions de phase de ces types ne se produisent pas.

Dans le domaine des températures élevées (supérieures à celle de Curie) le moment dipolaire spontané est toujours nul. Mais il peut être également nul aux températures basses, de sorte qu'il ne peut exister qu'un certain intervalle de température dans lequel la phase ferro-électrique est stable. (Dans ce cas les deux températures limites sont appelées *températures de Curie*, *supérieure* et *inférieure*).

Puisque les ions responsables de l'apparition de la polarisation spontanée des ferro-électriques peuvent se déplacer facilement, les contraintes mécaniques appliquées à de tels corps ont pour effet de provoquer l'apparition de polarisation électrique. Ce phénomène est appelé *effet piézo-électrique.* Il existe aussi l'effet piézo-électrique inverse, c'est-à-dire une modification de la forme ou des dimensions du cristal sous l'action d'un champ électrique extérieur. On se gardera de confondre cet effet avec l'électrostriction des diélectriques ordinaires, c'est-à-dire avec la variation de leur forme et de leur volume sous l'effet d'un champ électrique extérieur. L'électrostriction est proportionnelle au carré de l'intensité du champ électrique, alors que l'effet piézo-électrique inverse ne l'est qu'à la première puissance de l'intensité du champ.

Tous les ferro-électriques sont des corps piézo-électriques, mais tous les corps piézo-électriques ne sont pas ferro-électriques. Le quartz en fournit un exemple.

Mentionnons encore une classe de substances possédant une polarisation spontanée. Ce sont des diélectriques appelés électrets que l'on obtient par la solidification des mélanges de certaines résines organiques dans un champ électrique intense (ainsi que par d'autres

procédés). Le champ électrique oriente les moments dipolaires de certaines des molécules de ces substances, si bien qu'après la solidification de la résine et la suppression du champ les moments dipolaires conservent leur orientation. La polarisation ainsi réalisée peut subsister pendant plusieurs années, mais il paraît que l'état polarisé des électrets est un état métastable alors que leur état non polarisé est stable.

FORMULES FONDAMENTALES

Moment d'une force faisant tourner le dipôle	$\mathbf{K} = [\mathbf{d}_0\mathbf{E}]$
Energie potentielle du dipôle dans un champ électrique	$U = -\mathbf{d}_0\mathbf{E}$
Permittivité diélectrique d'un gaz polaire	$\varepsilon = 1 + \dfrac{nd_0^2}{3\varepsilon_0 kT}$
Susceptibilité diélectrique d'un liquide ou d'un gaz dense (formule d'Onsager)	$\alpha = \dfrac{3}{4}\left(\alpha' n - 1 + \sqrt{1 + \dfrac{2}{3}\alpha' n + \alpha'^2 n^2}\right)$
Vecteur polarisation d'un cristal	$\mathbf{P} = \mathbf{i}\alpha_1 E_X + \mathbf{j}\alpha_2 E_Y + \mathbf{k}\alpha_3 E_Z$

CHAPITRE 9

MÉTAUX ET SEMI-CONDUCTEURS

§ 9.1. Gaz électronique dégénéré

En énonçant les lois du courant continu nous avons introduit deux grandeurs: la conductivité électrique et la force électromotrice (f.é.m.), sans expliquer jusqu'ici la nature physique de ces grandeurs. Maintenant nous allons aborder ce problème en commençant par la conductibilité des métaux.

Comme il a été dit plus haut, la charge électrique est transportée dans les métaux par les électrons qui peuvent se déplacer librement d'un atome à un autre (plus exactement, d'un ion à un autre). Un tel déplacement est possible du fait que les couches électroniques de différents atomes se recouvrent. Il est donc naturel de partir du concept de gaz d'électrons parfait ou presque parfait dans le métal. Toutefois ce gaz doit différer de façon substantielle du gaz parfait ordinaire de molécules. Cette différence est particulièrement visible sur l'exemple de capacité calorifique des métaux. Si nous supposons, pour simplifier, que chaque atome de métal envoie un seul électron dans le gaz électronique, 1 atome-gramme de métal doit contenir $6{,}02 \cdot 10^{23}$ ions et autant d'électrons. La capacité calorifique molaire due aux ions est égale, ainsi qu'on le sait, à $3R$, où R est la constante des gaz (*loi de Dulong et Petit*). Quant à la capacité calorifique des électrons, considérés comme un gaz ordinaire, elle n'est égale qu'à $^3/_2\, R$. La capacité calorifique totale d'un métal doit donc être égale à $^9/_2\, R$. D'un autre côté, si l'on prend un diélectrique qui n'a pas de gaz électronique, sa capacité calorifique est égale à $3R$. Ainsi, la capacité calorifique du métal doit être de $^3/_2\, R$ supérieure à celle du diélectrique. Or, entre cette conclusion et l'expérience il y a une contradiction manifeste: dans le domaine de validité de la loi de Dulong et Petit, c'est-à-dire à des températures suffisamment élevées ($T \gg T_D$, T_D étant la *température* dite *de Debye*, v. plus loin), les capacités calorifiques molaires des métaux et des diélectriques ne diffèrent pratiquement pas l'une de l'autre. Cela signifie que le gaz électronique n'apporte pas de contribution quelque peu appréciable à la capacité calorifique du métal ou, plus exactement, la contribution du gaz électronique est nettement inférieure à $^3/_2\, R$. C'est la raison pour laquelle le gaz électronique dans le métal est dit *dégénéré*.

Quelle est la cause de la dégénérescence du gaz électronique? Elle est étroitement liée au caractère de la statistique des électrons.

Pour expliquer ce qu'on entend par là, rappelons au préalable que pour établir la distribution de Maxwell pour les molécules d'un gaz ordinaire, on introduit la notion d'*espace des phases* des molécules, dont les points, dits *points représentatifs*, se déterminent par six quantités: trois coordonnées x, y, z de la molécule et trois projections de son impulsion p_x, p_y, p_z. Le *volume de l'espace des phases* est proportionnel au produit du volume ordinaire par le volume de l'espace des impulsions. Les éléments de ces volumes en coordonnées cartésiennes sont $\Delta x \Delta y \Delta z$ et $\Delta p_x\ \Delta p_y\ \Delta p_z$. Dans l'espace des impulsions le volume d'une couche sphérique de rayon p et d'épaisseur Δp est égal à $4\pi p^2 \Delta p$.

Lorsque la molécule est animée d'un mouvement, son rayon vecteur $\mathbf{r}\ (x, y, z)$ et son impulsion $\mathbf{p}\ (p_x, p_y, p_z)$ varient avec le temps, c'est-à-dire que le point représentatif décrit dans l'espace des phases une certaine courbe appelée *trajectoire de phase*. Suivant les conditions initiales (c'est-à-dire les valeurs de x, y, z, p_x, p_y, p_z à l'instant initial $t = 0$), nous obtenons des trajectoires de phase différentes. Chacune des trajectoires de phase correspond à un état dynamique déterminé de la molécule, et comme par chaque point représentatif ne passe de toute évidence qu'une seule trajectoire de phase, on peut conclure qu'à chaque point représentatif correspond un état dynamique déterminé de la molécule.

Examinons maintenant, au lieu d'une seule, un grand nombre de molécules qui n'interagissent presque pas l'une avec l'autre, c'est-à-dire un gaz parfait. Dans ces conditions, les ensembles des états dynamiques de différentes molécules sont identiques mais une question se pose: existe-t-il une corrélation quelconque entre les états dynamiques des différentes molécules? Cette question peut s'énoncer sous une forme plus simple: le nombre de molécules pouvant se trouver dans un état dynamique donné est-il quelconque? Lors de l'établissement de la distribution de Maxwell cette question ne se pose pas à vrai dire parce qu'on suppose tacitement que le nombre de molécules se trouvant à l'état donné peut être quelconque. Pourtant, une telle supposition n'est pas logiquement nécessaire: on peut s'imaginer des situations dans lesquelles elle n'est pas justifiée. C'est justement le cas d'un gaz électronique. Il importe alors de ne pas perdre de vue que l'électron est doté d'un moment d'impulsion propre (on l'appelle *spin*) et que si on désire mesurer la projection du spin sur un axe quelconque, on n'obtient toujours que deux valeurs possibles. C'est pourquoi le nombre de variables déterminant l'état dynamique d'un électron doit comprendre encore la projection de son spin. Si l'on généralise ainsi la notion d'état dynamique de l'électron, il apparaît que

dans le même état dynamique ne peut se trouver plus d'un seul électron, c'est-à-dire que chaque état peut être soit non occupé, soit occupé par un seul électron tout au plus.

Cette remarquable proposition est connue sous le nom de *principe d'exclusion de Pauli*, elle détermine le caractère de la statistique des électrons. Les électrons ne sont pas seuls à obéir au principe de Pauli. Ce principe régit également les protons et les neutrons et, en général, toutes les particules dont le spin est égal à un nombre demi-entier de constantes de Planck modifiées $\hbar$ (v. plus loin). Toutes ces particules sont appelées *fermions* et on dit qu'elles sont régies par la *statistique de Fermi-Dirac*.

Une autre situation est également possible lorsque le nombre des particules pouvant se trouver dans un même état est quelconque. Elle se présente lorsque le spin des particules est égal à un nombre entier de $\hbar$. De telles particules portent le nom de *bosons* et on dit qu'elles obéissent à la *statistique de Bose* ou *de Bose-Einstein*. Les photons, les particules alpha, les deutérons, les mésons pi sont des bosons.

Pour établir la distribution des électrons à l'état d'équilibre statistique à laquelle conduit le principe de Pauli, divisons l'espace de phase Γ de l'électron en cellules élémentaires de même volume Γ_0 et associons à chacune de telles cellules un état cinématique de l'électron, c'est-à-dire deux états qui ne diffèrent l'un de l'autre que par la projection du spin de l'électron. Pour qu'une telle méthode de correspondance des cellules élémentaires aux états de l'électron soit raisonnable, il faut évidemment que le volume des cellules soit aussi petit que possible. Mais il existe ici une limitation imposée par la mécanique quantique : il est apparu que le volume Γ_0 de la cellule élémentaire ne peut pas être rendu inférieur à $(2\pi\hbar)^3$, où $\hbar$ est égale approximativement à 10^{-34} J·s ou à 10^{-27} erg·s (la quantité $\hbar = h/2\pi$ est appelée *constante de Planck modifiée ou h barré*). En donnant à Γ_0 une telle valeur, nous trouverons que le nombre de cellules contenues dans le volume de phase Γ est égal à

$$G = \Gamma/(2\pi\hbar)^3.$$

On dit que les électrons se trouvent dans des cellules de phase déterminées si ces cellules correspondent à des états de ces électrons. Si nous prenons des électrons à faible dispersion de l'impulsion et divisons leur nombre par le nombre de cellules de phase correspondantes, nous obtenons la *fonction de distribution* des électrons. Le problème consiste maintenant à trouver cette fonction.

Expliquons plus en détail cette notion de fonction de distribution parce que nous aurons à l'utiliser bien souvent par la suite. Considérons un élément de volume dans l'espace de phase $\Delta\Gamma = (2\pi\hbar)^{-3} \times \Delta x \, \Delta y \, \Delta z \, \Delta p_x \, \Delta p_y \, \Delta p_z$ au voisinage d'un point d'impulsion $\mathbf{p}$ et de rayon vecteur $\mathbf{r}$. Le nombre de particules $\Delta N = f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \, \Delta\Gamma$ contenues dans ce volume est proportionnel à $\Delta\Gamma$. C'est le coefficient $f(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ figurant dans cette relation qui s'appelle fonction de distri-

bution ou, plus exactement, fonction de distribution des particules dans un espace de phase.

Examinons d'abord l'état à $T=0$. Dans ce cas, l'énergie du système d'électrons doit avoir sa valeur minimale possible. Si les électrons n'obéissaient pas au principe de Pauli, l'impulsion correspondant au minimum d'énergie serait nulle, c'est-à-dire que tous les électrons se trouveraient dans une seule cellule correspondant à l'impulsion nulle. Mais en réalité le principe de Pauli reste valable et pour obtenir un minimum d'énergie il faut remplir les cellules de façon compacte, c'est-à-dire placer un électron (de projection donnée du spin) dans chaque cellule et prendre des cellules ayant une impulsion minimale possible. Supposons que les cellules ainsi remplies aient toutes les impulsions jusqu'à une certaine impulsion p_F. Nous devrons alors prendre le volume d'une sphère de rayon p_F, c'est-à-dire $^4/_3\ \pi p_F^3$, le multiplier par le volume du gaz et diviser par $(2\ \pi\hbar)^3$. Le nombre de cellules qui nous intéressent sera ainsi égal à $^4/_3\ \pi p_F^3 V/(2\pi\hbar)^3$. En plaçant dans chaque cellule deux électrons (de projections du spin différentes), nous trouverons le nombre total N d'électrons correspondant à un tel empilement compact :

$$N = 2\,\frac{4\pi}{3}\,\frac{p_F^3 V}{(2\pi\hbar)^3}\,.$$

Il en résulte que

$$p_F = (3\pi^2)^{1/3}\hbar n^{1/3},$$

où n est la densité de gaz électronique. Ainsi,

à $T = 0$, la distribution des électrons correspondant au minimum d'énergie est la suivante : tous les états des électrons dont les impulsions sont comprises entre zéro et p_F sont occupés, et les états à $p > p_F$ sont libres. On convient de donner à la quantité p_F le nom *d'impulsion limite de Fermi.*

L'énergie limite de l'électron (*énergie limite de Fermi*) correspondant à l'impulsion p_F a pour valeur

$$\varepsilon_F = \frac{p_F^2}{2m_e} = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{2m_e}\,\hbar^2 n^{2/3},$$

où m_e est la masse de l'électron. Nous voyons que l'impulsion limite est proportionnelle à la densité des électrons à la puissance 1/3, alors que l'énergie limite l'est à la puissance 2/3.

La distribution ainsi trouvée des électrons est évidemment isotrope dans l'espace des impulsions, c'est-à-dire qu'elle dépend uniquement du module et ne dépend pas de la direction de l'impulsion. Cela permet de considérer la fonction de distribution f comme une fonction de la seule énergie de l'électron $\varepsilon = p^2/(2m_e)$. Elle a

visiblement la forme d'un échelon qui s'interrompt brusquement pour une énergie égale à ε_F (fig. 9.1). La hauteur de cet échelon est égale à l'unité (la fonction de distribution se rapporte à une projection du spin déterminée).

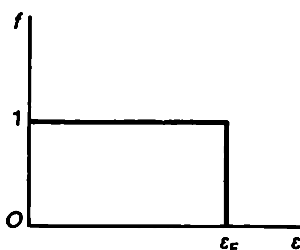


Fig. 9.1. Distribution de Fermi à zéro absolu]

Cherchons l'énergie totale du gaz électronique à $T = 0$. En vertu de la définition même de la fonction de distribution cette énergie peut s'écrire sous la forme

$$W = 2\int \varepsilon f \frac{V 4\pi p^2\,dp}{(2\pi\hbar)^3},$$

où V est le volume occupé par les électrons et le facteur 2 devant l'intégrale correspond à deux projections possibles du spin de l'électron. Pour calculer cette intégrale nous supposerons que l'énergie ε est une variable indépendante. Comme $\varepsilon = p^2/(2m_e)$, $d\varepsilon = p\,dp/m_e$ et donc

$$W = \frac{8\sqrt{2}\pi m_e^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} V \int_0^{\varepsilon_F} f\varepsilon^{3/2}\,d\varepsilon.$$

La fonction de distribution étant une fonction échelon, on peut remplacer f par l'unité et intégrer depuis $\varepsilon = 0$ jusqu'à $\varepsilon = \varepsilon_F$. Il vient

$$W = \frac{2\sqrt{2}}{5\pi^2}\frac{m_e^{3/2}}{\hbar^3} V\varepsilon^{5/2}.$$

En nous rappelant que $\varepsilon_F = (3\pi^2)^{2/3}\hbar^2 n^{2/3}/(2m_e)$, nous pouvons récrire l'expression de l'énergie du gaz électronique à $T = 0$ sous la forme suivante :

$$W = \frac{3^{5/3}\pi^{4/3}}{10}\frac{\hbar^2 n^{5/3} V}{m_e}.$$

Nous voyons qu'à $T = 0$ l'énergie du gaz électronique est proportionnelle à la densité des électrons à la puissance 5/3.

§ 9.2. Distribution de Fermi-Dirac

Proposons-nous maintenant de déterminer la fonction de distribution des électrons à l'état d'équilibre statistique à une température différente de zéro. A cet effet, il faut, de même que lors de l'établissement de la distribution de Maxwell, examiner les collisions des électrons soit l'un avec l'autre, soit, ce qui est plus simple, avec des molécules mélangées au gaz électronique et se trouvant à l'état d'équilibre statistique. La fonction de distribution f_m de telles molé-

cules est proportionnelle à exp $[-\varepsilon_m/(kT)]$, où $-\varepsilon_m$ est l'énergie de la molécule, T, la température et k, la constante de Boltzmann.

Supposons qu'un électron d'énergie ε entre en collision avec une molécule d'énergie ε_m. Par suite de cette collision les énergies des particules subissent une variation, mais cette variation ne sera pas univoque de sorte qu'on peut parler seulement de la probabilité d'une variation ou d'une autre. Désignons par $w(\varepsilon, \varepsilon_m; \varepsilon', \varepsilon'_m)$ la probabilité pour que les énergies des particules deviennent, par suite de la collision, en 1 s égales respectivement à ε' et ε'_m. Il est clair que quelle que soit la collision, elle est régie par la loi de conservation de l'énergie, c'est-à-dire que $\varepsilon + \varepsilon_m = \varepsilon' + \varepsilon'_m$.

Déterminons comment varie en 1 s, par suite des collisions avec les molécules de gaz, le nombre d'électrons d'énergie ε. Il est évident que la variation du nombre de particules est égale à la différence entre le nombre d'électrons qui passent en 1 s à l'état d'énergie ε et le nombre d'électrons qui quittent cet état (également en 1 s). Si les électrons n'obéissaient pas au principe de Pauli, le nombre d'électrons quittant l'état d'énergie ε par suite des collisions avec des molécules possédant l'énergie ε_m serait déterminé par la quantité $\sum_{\varepsilon', \varepsilon'_m} w(\varepsilon, \varepsilon_m; \varepsilon', \varepsilon'_m) f(\varepsilon) f_m(\varepsilon_m)$, où $f(\varepsilon)$ est la fonction de distribution des électrons. Mais en réalité le principe de Pauli est valable, de sorte qu'un électron ne peut passer à l'état d'énergie ε' que si cet état est libre. Cela signifie que l'expression écrite plus haut doit être multipliée encore par $1 - f(\varepsilon')$. Ainsi, le nombre d'électrons qui quittent en 1 s l'état d'énergie ε a pour valeur

$$\sum_{\varepsilon', \varepsilon_m, \varepsilon'_m} w(\varepsilon, \varepsilon_m; \varepsilon', \varepsilon'_m) f(\varepsilon) f_m(\varepsilon_m) [1 - f(\varepsilon')].$$

On détermine d'une manière analogue le nombre d'électrons qui passent en 1 s à l'état d'énergie ε:

$$\sum_{\varepsilon', \varepsilon_m, \varepsilon'_m} w(\varepsilon', \varepsilon'_m; \varepsilon, \varepsilon_m) f(\varepsilon') f_m(\varepsilon'_m) [1 - f(\varepsilon)].$$

La quantité $w(\varepsilon', \varepsilon'_m; \varepsilon, \varepsilon_m)$ entrant dans cette expression est la probabilité de passage en 1 s des particules (électron et molécule) des états ε', ε'_m aux états ε, ε_m. Comme les lois de la mécanique restent inchangées lors de l'inversion du temps, la probabilité de passage direct $\varepsilon, \varepsilon_m \to \varepsilon', \varepsilon'_m$ et celle de passage inverse $\varepsilon', \varepsilon'_m \to \varepsilon, \varepsilon_m$ sont égales: $w(\varepsilon, \varepsilon_m; \varepsilon', \varepsilon'_m) = w(\varepsilon', \varepsilon'_m; \varepsilon, \varepsilon_m)$. Vu cette circonstance, nous obtenons finalement l'expression suivante pour la variation du nombre d'électrons par suite des collisions avec les

molécules :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^{\text{coll}} = \sum_{\varepsilon', \varepsilon_m, \varepsilon'_m} w(\varepsilon, \varepsilon_m ; \varepsilon', \varepsilon'_m)\{f(\varepsilon')[1-f(\varepsilon)] f_m(\varepsilon'_m) -$$
$$- f(\varepsilon)[1-f(\varepsilon')] f_m(\varepsilon_m)\}.$$

A l'état d'équilibre statistique, cette quantité doit être nulle, c'est-à-dire que $f(\varepsilon')\,[1-f(\varepsilon)]\,f_m(\varepsilon'_m) = f(\varepsilon)\,[1-f(\varepsilon')]f_m(\varepsilon_m)$. Si nous reportons dans cette égalité la distribution maxwellienne pour les molécules, nous obtiendrons

$$\frac{1-f(\varepsilon)}{f(\varepsilon)}\, e^{\varepsilon_m/(kT)} = \frac{1-f(\varepsilon')}{f(\varepsilon')}\, e^{\varepsilon'_m/(kT)}.$$

Mais $\varepsilon_m - \varepsilon'_m = \varepsilon' - \varepsilon$, si bien que

$$\frac{1-f(\varepsilon)}{f(\varepsilon)}\, e^{-\varepsilon/(kT)} = \frac{1-f(\varepsilon')}{f(\varepsilon')}\, e^{-\varepsilon'/(kT)}.$$

Le second membre de cette égalité dépend uniquement de ε', et le premier, uniquement de ε. D'un autre côté, ε et ε' n'étant aucunement liés l'un à l'autre, il convient de considérer que le premier et le second membres de l'égalité représentent une seule et même constante indépendante de l'énergie de l'électron. Cette constante peut s'écrire sous la forme $e^{-\mu/kt}$, où μ est une certaine autre constante que l'on appelle *potentiel chimique* des électrons. Ainsi,

$$[1-f(\varepsilon)]\, e^{-\varepsilon/(kT)}/f(\varepsilon) = e^{-\mu/(kT)},$$

d'où

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/(kT)}+1}.$$

C'est cette formule qui définit la distribution d'énergie du gaz électronique à l'état d'équilibre statistique. Elle porte le nom de *distribution de Fermi*.

Rappelons que la fonction $f(\varepsilon)$ donne la distribution des électrons ayant une projection de spin donnée. Pour trouver le nombre dN d'électrons contenus dans le volume V et ayant une énergie comprise entre ε et $\varepsilon + d\varepsilon$, il faut multiplier la fonction de distribution de Fermi $f(\varepsilon)$ par

$$2\,\frac{4\pi p^2\, dp V}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{\sqrt{2}\, m_e^{3/2}}{\pi^2\hbar^3}\, \varepsilon^{1/2}\, d\varepsilon V.$$

Il vient

$$dN\, \frac{\sqrt{2}\, m_e^{3/2}}{\pi^2\hbar^3}\, V\, \frac{\varepsilon^{1/2}\, d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/(kT)}+1}.$$

En intégrant cette expression par rapport à l'énergie, nous trouverons le nombre total d'électrons:

$$N = \frac{\sqrt{2}\, m_e^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} V \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}\, d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/(kT)}+1} .$$

Cette formule lie la constante μ avec la densité d'électrons $n = N/V$.

Examinons maintenant les particularités de la distribution de Fermi. Nous supposerons que la température est suffisamment basse, si bien que $kT \ll \mu$. Dans ce cas, si l'énergie ε de l'électron est inférieure à μ d'une quantité telle que $(\mu - \varepsilon) > kT$, l'exponentielle $e^{(\varepsilon-\mu)/(kT)}$ entrant au dénominateur de la distribution de Fermi est petite, de sorte que la distribution des électrons pour $T \neq 0$ ne diffère pratiquement pas de celle pour $T = 0$. Au contraire, si l'énergie de l'électron $\varepsilon < \mu$ et leur différence $(\varepsilon - \mu) \gg kT$, l'exponentielle est très grande et la fonction de distribution est proche de zéro. La distribution prend alors la forme représentée par la figure 9.2. C'est aussi un échelon qui ne s'interrompt pas brusquement, comme dans le cas de $T = 0$, mais présente un « flou » (une queue) dont l'étendue est de l'ordre de kT. Nous voyons que si $kT \ll \mu$, la distribution pour $T \neq 0$ ne diffère de celle pour $T = 0$ que dans la « zone de flou » large de $\sim kT$. Dans ce cas la quantité μ diffère peu de ε_F et la condition $kT \ll \mu$ peut se récrire sous la forme $T \ll T_F$, où

$$T_F = \frac{\varepsilon_F}{k} = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{2m_e k} \hbar^2 n^{2/3}.$$

La quantité T_F s'appelle *température de dégénérescence* du gaz électronique. Elle est d'autant plus élevée que la densité d'électrons est plus forte. Pour les métaux, $n \sim 10^{24}$ cm^{-3}, $p_F/\hbar \sim 1{,}2 \cdot 10^8$ cm^{-1} et, par conséquent, $\varepsilon_F \sim 5{,}6$ eV et $T_F \sim 6 \cdot 10^4$ K. Cela signifie que la condition $T \ll T_F$ est satisfaite à toutes les températures jusqu'à celle de fusion du métal.

Si $T \sim T_F$, la largeur de la zone floue devient comparable à l'énergie limite ε_F. Si $T \ll T_F$, la quantité μ diffère peu de ε_F, à savoir elle est légèrement inférieure à ε_F, d'une quantité de l'ordre de $(kT)^2/\varepsilon_F$. Pour $T \gg T_F$, la distribution de Fermi se transforme en distribution de Maxwell. (De telles situations peuvent être réalisées dans les semi-conducteurs et les semi-métaux où la densité des électrons est beaucoup plus faible que dans les métaux.)

Cherchons maintenant l'énergie du gaz électronique pour $T \neq 0$. Elle est définie par la formule générale

$$W = 2 \int \varepsilon f(\varepsilon) \frac{4\pi p^2\, dp V}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{\sqrt{2}\, m_e^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} V \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2}\, d\varepsilon}{e^{(\varepsilon-\mu)/(kT)}+1} .$$

Nous n'allons pas calculer cette intégrale en nous bornant à examiner comment varie l'énergie en fonction de la température pour $T \ll T_F$. A cet effet, utilisons la fonction de distribution simplifiée représentée par la figure 9.3. Elle peut être considérée comme une demi-somme de deux échelons caractéristiques de $T = 0$: l'un d'eux

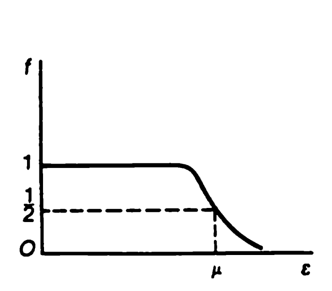


Fig. 9.2. Distribution de Fermi à une température non nulle

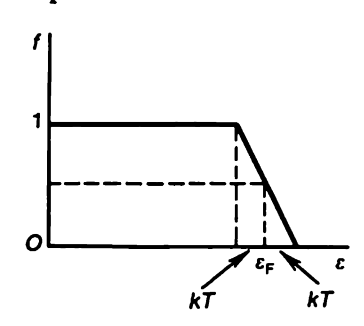


Fig. 9.3. Détermination de l'énergie d'un gaz électronique à une température non nulle

correspond à l'énergie limite $\varepsilon_F - kT$ et l'autre, à l'énergie limite $\varepsilon_F + kT$. Cela permet d'évaluer de façon approchée l'énergie à $T \neq 0$:

$$W \sim \frac{\sqrt{2}\, m_e^{3/2}}{5\pi^2 \hbar^3} [(\varepsilon_F - kT)^{5/2} + (\varepsilon_F + kT)^{5/2}].$$

Comme $kT \ll \varepsilon_F$, nous obtenons

$$W = \frac{2\sqrt{2}}{5\pi^2} \frac{m_e^{3/2}}{\hbar^3} \varepsilon_F^{5/2} V \left[1 + \xi \left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2\right],$$

où ξ est un nombre de l'ordre de l'unité. Ainsi, en définitive,

$$W \approx W_0 \left[1 + \xi \left(\frac{kT}{\varepsilon_F}\right)^2\right],$$

où W_0 est l'énergie à $T = 0$. Nous voyons que pour $T \ll T_F$ l'énergie d'un gaz électronique dégénéré est pratiquement indépendante de la température parce que l'augmentation relative de l'énergie du gaz électronique, due au chauffage, constitue par rapport à l'énergie pour $T = 0$ une quantité de l'ordre de $(T/T_F)^2$. Il en résulte que la vitesse moyenne quadratique ou la vitesse thermique moyenne de l'électron $\langle v \rangle$ ne varie pratiquement pas avec la température. Cette vitesse se définit par $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{2W}{mN}}$ et vaut approximativement $\langle v \rangle \sim \sqrt{\frac{\varepsilon_F}{m}}$.

Recherchons enfin la capacité calorifique C du gaz électronique. Elle est définie par la formule connue $C = \mathrm{d}W/\mathrm{d}T$, d'où

$$C = 2\xi W_0 \frac{T}{T_F^2}.$$

Rapportée à un électron, la capacité calorifique est de l'ordre de grandeur de la quantité

$$c \sim k \frac{T}{T_F}.$$

Si le gaz électronique se comportait comme un gaz maxwellien ordinaire, nous aurions $c = {}^3/_2\, k$; mais en réalité, nous l'avons vu, la capacité calorifique est T_F/T fois plus petite que cette quantité. La cause en est le principe de Pauli auquel obéissent les électrons.

Ainsi, le principe de Pauli explique les propriétés thermiques spécifiques du gaz électronique pour $T \ll T_F$ ou, comme on dit, du gaz électronique dégénéré.

§ 9.3. Métaux, diélectriques et semi-conducteurs

Le principe de Pauli permet d'expliquer non seulement les particularités que présentent les propriétés thermiques du gaz électronique mais également le fait même de division des cristaux en métaux-diélectriques et semi-conducteurs. Pour mettre en évidence la dif, férence de principe qui existe entre ces types de cristaux et le rôle joué ici par le principe de Pauli, essayons d'abord de comprendre ce qui se produit lorsque des atomes séparés se réunissent en un cristal unique.

Si l'on considère un atome isolé, l'énergie de ses électrons en mouvement ne peut prendre que certaines valeurs bien déterminées ou, en d'autres termes, l'atome se caractérise par un spectre énergétique discret. Un tel spectre est représenté schématiquement par la figure 9.4 où les valeurs possibles de l'énergie de l'atome ε_1, ε_2, . . . sont figurées par différentes droites horizontales.

Supposons maintenant que des atomes distincts se sont réunis en un seul cristal. Dans ce cas les noyaux atomiques se situeront aux nœuds d'un certain réseau et les couches électroniques des atomes seront plus ou moins interpénétrées, de sorte que strictement parlant les électrons deviendront collectivisés, c'est-à-dire appartiendront en commun à l'ensemble du réseau cristallin. Le caractère du spectre énergétique sera lui aussi changé. Si l'on ne considère d'abord qu'un seul électron et part du schéma représenté par la figure 9.4, chaque niveau énergétique ε_i $(i = 1, 2, \ldots)$ se transforme en une bande comprenant autant de niveaux qu'il y a d'électrons en tout, c'est-à-dire qu'il y a d'atomes réunis en cristal. Autrement dit, nous aurons le schéma représenté par la figure 9.5. Dans cette figure, les

chiffres 1, 2, . . . servent à désigner les *bandes d'énergie* distinctes en lesquelles se transforment les niveaux énergétiques ε_1, ε_2, . . . de l'atome. Les lignes horizontales dans les limites de chaque bande d'énergie désignent les niveaux énergétiques possibles d'un électron isolé dans le cristal. Le nombre de niveaux de chaque bande est égal au nombre d'électrons dans le cristal. Le schéma de la figure 9.5 est un schéma simplifié, la situation réelle est beaucoup plus compliquée parce que certaines bandes d'énergie peuvent se recouvrir;

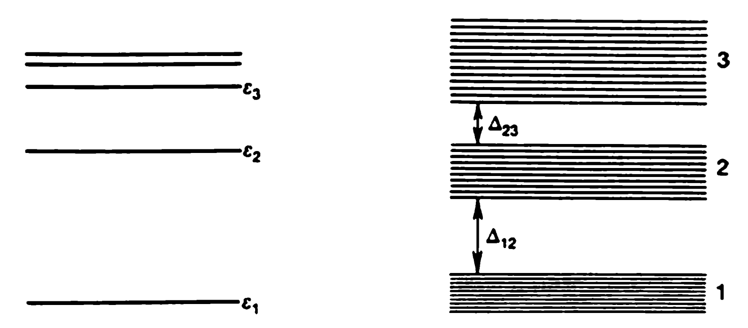


Fig. 9.4. Spectre énergétique d'un atome isolé

Fig. 9.5. Spectre énergétique d'un cristal

pourtant nous n'allons pas examiner ici ces complications. Ce qui compte principalement, c'est l'existence de bandes d'énergie séparées par des distances énergétiques Δ_{12}, Δ_{23}, . . . et le fait que dans les limites de chaque bande le spectre est pratiquement continu, car le nombre de niveaux dans chacune des bandes est très grand. Les bandes sont séparées par des intervalles interdits (c'est-à-dire que l'électron ne peut pas avoir une énergie comprise dans un de ces intervalles).

Jusqu'ici nous avons parlé du spectre énergétique d'un seul électron. Or, le cristal comprend un nombre très grand d'électrons: un ou plusieurs pour chaque atome. Si l'on fait abstraction de l'interaction entre les électrons, le problème consiste à placer les électrons à des niveaux énergétiques permis d'un électron distinct. C'est ici qu'entre en action le principe d'exclusion de Pauli qui postule que chaque niveau énergétique ne peut être occupé que tout au plus par un seul électron d'orientation déterminée du spin.

Si le nombre ΔN de niveaux énergétiques contenus dans un petit intervalle $\Delta\varepsilon$ d'énergies est connu: $\Delta N = \nu(\varepsilon)\,\Delta\varepsilon$, il est facile de comprendre combien d'électrons peuvent posséder une énergie comprise dans cet intervalle: le nombre de tels électrons ne peut pas excéder $2\nu(\varepsilon)\,\Delta\varepsilon$. Le graphique de la fonction $2\nu(\varepsilon)$, que l'on appelle *densité d'états électroniques*, est représenté schématiquement par

la figure 9.6. Si nous voulons que l'énergie du cristal soit maximale autant que possible, nous devons d'abord remplir la bande d'énergie la plus basse, ensuite la bande suivante plus haute, et ainsi de suite, jusqu'à ce que tous les électrons soient dépensés, c'est-à-dire soit atteinte l'énergie limite de Fermi ε_F qui se détermine, nous l'avons vu, par la densité d'électrons dans le cristal considéré. Il est clair que deux cas peuvent se présenter lors d'un tel placement successif des électrons : soit tous les électrons remplissent complètement quelques bandes alors que les autres bandes restent libres (fig. 9.6, *a*),

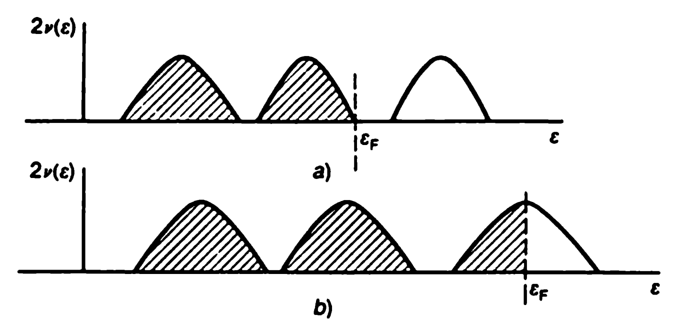


Fig. 9.6. Densité d'états électroniques d'un diélectrique cristallin (*a*) et d'un métal (*b*)

soit le nombre d'électrons est insuffisant pour remplir entièrement toutes les bandes d'énergies et la dernière des bandes à remplir présente des niveaux non occupés (fig. 9.6, *b*). Dans le premier cas le niveau de Fermi $\varepsilon = \varepsilon_F$ coïncide avec le bord de la dernière bande occupée, dans le second cas il se situe quelque part à l'intérieur de l'une des bandes (dans les figures, les états électroniques de $\varepsilon < \varepsilon_F$ sont hachurés).

Il est facile de voir que le cristal est un isolant, c'est-à-dire un diélectrique, lorsque toutes les bandes d'énergie sont complètement remplies, ou un conducteur, c'est-à-dire un métal, si l'une des bandes n'est remplie que partiellement (mais elle comporte des électrons!). En effet, si le cristal est soumis à l'action d'un champ électrique faible, les électrons seront accélérés sous l'effet de ce champ et passeront de l'état de plus petite énergie à l'état de plus grande énergie. Mais dans le premier cas un tel passage est impossible parce que l'électron ne peut passer à un état que si cet état est, en vertu du principe de Pauli, libre. Or, il n'y a pas d'états libres, ils sont tous occupés. Au contraire, dans le second cas le passage est possible parce que la bande d'énergie comporte des états libres. C'est pourquoi le passage du courant électrique dans le second cas est possible même pour un champ électrique aussi minime que l'on veut, c'est-à-dire que le cristal se comporte comme un conducteur. C'est pour cette

raison qu'une bande incomplète est appelée *bande de conduction*, et les électrons qui s'y trouvent sont appelés *électrons de conduction*. Soulignons que dans le métal le courant peut passer pour un champ électrique aussi faible que l'on veut parce qu'il présente des niveaux non occupés dans la bande de conduction. Les diélectriques ne possèdent pas cette propriété. Néanmoins les diélectriques peuvent être eux aussi parcourus par des courants mais pour des champs très intenses qui rendent possible le passage des électrons dans la bande de conduction. Ce phénomène (que l'on appelle *claquage électrique des diélectriques*) a un caractère bien complexe que nous n'allons pas examiner ici.

Ainsi, la différence entre les diélectriques et les métaux ne réside pas dans la différence de degré de liaison de l'électron — plus forte dans le premier cas et plus faible dans le second — comme il semblerait à première vue. Cette différence ne tient pas non plus au recouvrement des couches électroniques parce que les couches électroniques des métaux et des diélectriques se recouvrent, ce recouvrement étant particulièrement important pour les électrons périphériques. La différence entre les métaux et les diélectriques est liée essentiellement au caractère du spectre énergétique du corps associé au principe d'exclusion de Pauli. Il est clair que si les électrons n'obéissaient pas au principe de Pauli, il n'y aurait pas de différence entre les métaux et les diélectriques et tous les corps seraient des conducteurs. Il en serait, par exemple, si les atomes étaient constitués par des noyaux et des pions négatifs parce que les pions sont des bosons, c'est-à-dire des particules qui n'obéissent pas au principe de Pauli.

Comme nous l'avons vu, dans le diélectrique il existe un écart énergétique entre la bande complètement remplie et les bandes non remplies. Mais supposons que la largeur de cet écart est petite. Dans ce cas il est facile de faire passer les électrons de la bande occupée dans la bande libre : il suffit de chauffer le cristal pour obtenir un conducteur à deux bandes de conduction. De tels cristaux à faible largeur de l'écart énergétique Δ portent le nom de *semi-conducteurs* (plus exactement, de *semi-conducteurs intrinsèques*). Dans les semi-conducteurs le nombre d'électrons de conduction est proportionnel à $\exp[-\Delta/(kT)]$. Cette quantité croît rapidement lorsque la température s'élève, alors qu'aux températures basses et pour des valeurs élevées de Δ elle est voisine de zéro. Ainsi, le nombre d'électrons de conduction dans les semi-conducteurs varie fortement avec la température tandis que dans les métaux le nombre d'électrons de conduction est indépendant de la température. (Indiquons à titre d'exemple que Δ est de 0,7 eV pour Ge et de 0,2 eV pour InSb.)

Il est important que dans un semi-conducteur intrinsèque à une température non nulle un champ électrique provoque le mouvement non seulement des électrons qui se trouvent dans une bande non remplie mais également de ceux qui se trouvent dans la bande complè-

tement remplie à $T = 0$ (on l'appelle *bande de valence*). Le nombre d'états libérés dans cette bande étant petit, il est plus commode d'examiner non pas le déplacement des électrons de la bande de valence mais celui, en sens inverse, des états libres eux-mêmes. Ces états libres sont appelés *trous* (ou *lacunes*) ; de même que les électrons, les trous obéissent au principe de Pauli. Puisque nous considérons que les trous se déplacent sous l'effet d'un champ électrique dans le sens opposé à celui de déplacement des électrons, il convient de leur attribuer une charge électrique égale en module à celle de l'électron mais de signe contraire. Il est clair que dans un semi-conducteur in-

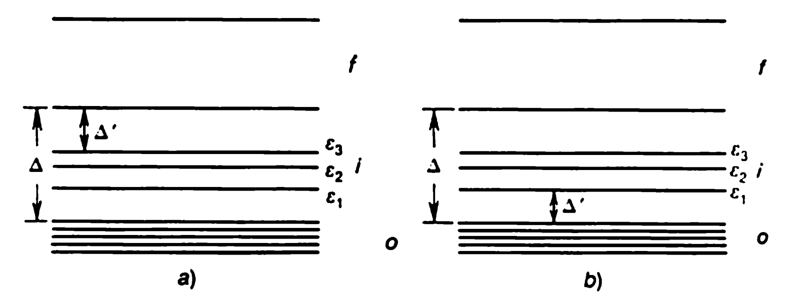


Fig. 9.7. Schéma des niveaux d'énergie des électrons dans les semi-conducteurs extrinsèques de type n (a) et de type p (b):
o, bandes occupées; f, bandes libres; i, niveaux d'impureté

trinsèque la concentration en électrons de conduction est égale à celle en trous (*condition de neutralité électrique*) et que le niveau de Fermi se situe à l'intérieur de la bande interdite, entre la bande de valence et la bande de conduction.

Remarquons qu'en principe les électrons peuvent passer de la bande remplie dans une bande libre également dans le diélectrique, mais l'écart énergétique entre les bandes y est si élevé (il se chiffre ordinairement par plusieurs électrons-volts, c'est-à-dire par plusieurs dizaines de milliers de kelvins) que la quantité $\exp[-\Delta/(kT)]$ est infime jusqu'à la température de fusion du diélectrique.

Toutefois, dans un diélectrique à Δ élevé, la conductibilité peut être produite si ce diélectrique contient un nombre suffisant d'atomes d'impureté (par exemple, quelques millièmes de pour cent). Dans ce cas les niveaux électroniques des atomes d'impureté (dits *niveaux d'énergie des impuretés*) peuvent se trouver entre la bande occupée et la bande libre du diélectrique. La figure 9.7, a représente une situation lorsque les niveaux d'impureté ε_1, ε_2, ε_3 sont occupés et les électrons qui s'y trouvent peuvent passer dans la bande libre. Le nombre d'électrons passés est proportionnel à $c \cdot \exp[-\Delta'/(kT)]$, où Δ' est l'écart énergétique entre le niveau d'impureté supérieur oc-

cupé et le niveau inférieur de la bande libre et c, la concentration des atomes d'impureté. Si $\Delta' \ll \Delta$, cette quantité est beaucoup plus grande que $\exp[-\Delta/(kT)]$ même pour des valeurs faibles de c. En pénétrant dans la bande d'énergie non occupée du diélectrique, les électrons des atomes d'impureté deviennent des électrons de conduction. Le cristal cesse d'être un diélectrique et devient un *semi-conducteur extrinsèque* ou *dopé du type n* ou *à excès d'électrons*. Une autre situation possible est représentée par la figure 9.7, *b*. Ici, les niveaux d'impureté ε_1, ε_2, ε_3 ne sont pas occupés et les électrons se trouvant dans la bande remplie peuvent passer à ces niveaux, en laissant des trous dans cette bande. Un tel cristal est dit *semi-conducteur extrinsèque* ou *dopé du type p* ou *à défaut d'électrons*.

On obtient des semi-conducteurs extrinsèques en introduisant des atomes d'impureté non seulement dans les diélectriques mais également dans des semi-conducteurs intrinsèques. Dans ce dernier cas, le semi-conducteur contient tant les électrons de conduction que des trous, mais la concentration des particules d'une espèce est supérieure à celle des particules de l'autre espèce (suivant la nature de l'impureté introduite).

Indiquons les valeurs de Δ' pour certains semi-conducteurs extrinsèques: $\sim$ 0,01 eV pour le germanium dopé en phosphore (semi-conducteur du type n) et pour le germanium dopé en bore (semi-conducteur du type p), $\sim$ 0,045 eV pour le silicium comportant les mêmes impuretés.

Dans les semi-conducteurs, les électrons de conduction et les trous sont beaucoup moins nombreux que les électrons libres dans les métaux, de sorte que les gaz d'électrons et de trous dans les semi-conducteurs ne sont pas en règle générale dégénérés. C'est pourquoi, en particulier, la vitesse quadratique moyenne d'un électron et d'un trou dans le semi-conducteur est proportionnelle à $\sqrt{T}$ comme pour les molécules ordinaires (rappelons que dans les métaux la vitesse quadratique moyenne électronique est pratiquement indépendante de la température). Il peut arriver toutefois que les électrons ou les trous dans un semi-conducteur (extrinsèque) soient dégénérés. Le semi-conducteur est alors dit *dégénéré*, sa conductibilité est comparable à celle d'un métal.

§ 9.4. Emission thermoélectronique

Comme nous l'avons vu au cours des paragraphes précédents, les électrons de conduction constituent dans un métal un gaz dégénéré de particules obéissant au principe de Pauli (un tel gaz s'appelle *gaz de Fermi*). Ce gaz est maintenu dans le métal par les forces de liaison atomiques, c'est-à-dire par les forces d'attraction des électrons par les noyaux atomiques. Mais de même que les molécules peuvent s'évaporer d'un liquide, les électrons peuvent quitter le mé-

tal. Cet effet est connu sous le nom d'*émission thermoélectronique.* L'évaporation d'un liquide augmente avec la température. Il en est de même pour l'émission thermoélectronique.

Il n'est pas difficile de trouver la densité des électrons qui se sont « évaporés » à partir de la surface d'un métal. A cet effet, les électrons se trouvant dans le métal et les électrons qui se sont échappés du métal doivent être considérés comme un gaz unique de particules se trouvant à l'état d'équilibre statistique. Il est clair que l'énergie potentielle d'un électron est plus faible à l'intérieur d'un métal qu'à son extérieur (sinon l'électron ne pourrait en général pas se trouver à l'intérieur du métal). C'est ainsi que se pose le problème de la détermination de la distribution des électrons non seulement suivant les impulsions mais également suivant les coordonnées spatiales. Ce problème peut être résolu si l'on se rappelle que la distribution des molécules ordinaires selon leurs vitesse et coordonnées (*distribution de Maxwell-Boltzmann*) s'obtient à partir de la distribution de Maxwell en vitesse, en remplaçant l'énergie cinétique de la molécule par son énergie totale, c'est-à-dire par la somme des énergies cinétique et potentielle. Une situation analogue se produit également pour le gaz de Fermi. Il nous faut connaître seulement la variation de l'énergie potentielle de l'électron $U(x)$ en fonction de la distance x à la surface du métal. Nous partirons de la dépendance la plus simple représentée par la figure 9.8: ici, au domaine à l'intérieur du métal ($x < 0$) correspond un puits de potentiel rectangulaire de profondeur $U > 0$. Cette figure montre également le potentiel chimique μ. Le gaz électronique à l'intérieur du métal étant dégénéré, la valeur de μ coïncide pratiquement avec le maximum d'énergie de l'électron et tous les niveaux (à compter depuis le fond du puits) sont occupés, celui de μ y compris. C'est pourquoi un électron peut être arraché du métal le plus facilement dans le cas où son énergie est voisine de μ. L'extraction de l'électron exige d'effectuer dans ce cas un travail minimal égal à $\Phi = U - \mu$. Ce travail est appelé *travail d'extraction* ou *travail de sortie.*

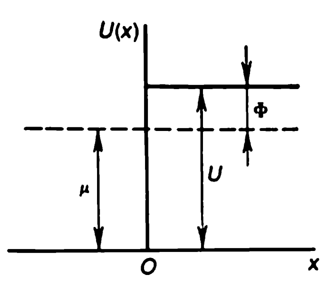


Fig. 9.8. Etablissement de la formule du courant d'émission thermoélectronique

Considérons maintenant les électrons à l'extérieur du métal. Puisqu'ils sont en équilibre avec les électrons à l'intérieur du métal, le potentiel chimique du gaz électronique à l'extérieur du métal ne diffère pas de celui du gaz électronique à l'intérieur du métal. (Rappelons que si un système physique est en équilibre, la température, la pression et les potentiels chimiques des particules de chaque espèce sont les mêmes en tous les points de ce système.) Par conséquent,

la fonction de distribution des électrons à l'extérieur du métal (dans le vide) est de la forme

$$f_{\text{vide}} = \{e^{(U+\varepsilon_k-\mu)/(kT)} + 1\}^{-1},$$

où $\varepsilon_k = p^2/(2m_e)$ est l'énergie cinétique d'un électron d'impulsion p à l'extérieur du métal (m_e étant la masse de l'électron). En tenant compte que $U - \mu = \Phi$ et en supposant que $\Phi \gg kT$, on peut omettre l'unité figurant au dénominateur de la distribution de Fermi. Ainsi, à l'extérieur du métal, les électrons obéissent à la distribution maxwellienne :

$$f_{\text{vide}} \approx e^{-\Phi/(kT)} e^{-\varepsilon_k/(kT)} \quad (kT \gg \Phi).$$

Pour trouver la densité d'électrons n_{vide} à l'extérieur du métal, il faut multiplier f_{vide} par $2\cdot 4\pi\, p^2 dp/(2\pi\hbar)^3$ et intégrer le résultat sur p:

$$n_{\text{vide}} = e^{-\Phi/(kT)} \frac{1}{\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty e^{-p^2/(2m_e kT)} p^2\, dp.$$

L'intégrale figurant dans cette expression est égale à $\sqrt{\pi/2}\,(m_e kT)^{3/2}$, si bien que

$$n_{\text{vide}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{(m_e kT)^{3/2}}{\pi^2\hbar^3} e^{-\Phi/(kT)}.$$

Nous voyons que la densité des électrons échappés du métal dépend de la température, et cette dépendance est essentiellement exponentielle. Lorsque la température s'élève, la densité des électrons croît très rapidement.

Connaissant la fonction de distribution des électrons à l'extérieur du métal on peut déterminer le courant d'émission électronique. A cet effet, il faut déterminer le flux d'électrons partant de la frontière du métal vers le vide, c'est-à-dire des électrons dont la projection de la vitesse v_x est positive. Il en résulte que la densité de courant d'émission j_s (c'est-à-dire le courant émis par une unité de surface du métal) se définit par la formule

$$j_s = 2e \int_{(v_x>0)} v_x f_{\text{vide}} \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3},$$

où e est la charge de l'électron et $d^3p = dp_x\, dp_y\, dp_z$. Cette intégrale se sépare en trois intégrales sur p_x, p_y, p_z et comme les intégrales sur p_y et p_z sont identiques et égales à $\sqrt{2\pi mkT}$ et l'intégrale sur p_x est égale à kT, nous obtenons en définitive

$$j_s = \frac{em}{2\pi^2\hbar^3}(kT)^2 e^{-\Phi/(kT)}.$$

Cette formule traduit la loi de *Richardson-Dushmann*. On l'écrit ordinairement sous la forme

$$j_s = CT^2 e^{-\Phi/(kT)}, \quad C \simeq 1{,}204\cdot 10^6 \ \mathrm{A\cdot m^{-2}\cdot K^{-2}},$$

où T est la température. Nous voyons que le courant d'émission, de même que la densité des électrons émis, varie avec la température essentiellement suivant une loi exponentielle et croît rapidement lorsque la température s'élève. Aussi, pour obtenir des courants d'émission intenses faut-il chauffer fortement le métal. Un courant d'émission plus intense est fourni (à une même température) par le métal dont le travail de sortie est plus faible. Les valeurs du travail de sortie de divers métaux sont les suivantes : 4,52 eV pour le tungstène, 4,07 eV pour le tantale, 6,27 eV pour le platine, 2,24 eV pour le calcium, 1,81 eV pour le césium. Pour mieux illustrer la variation de la densité du courant d'émission en fonction de la température, prenons l'exemple de tungstène. La densité de son courant d'émission vaut 10^{-19} A·m^{-2} à la température de 1000 K, 10^{-7} A·m^{-2} à la température de 2000 K et $1{,}4\cdot 10^{-3}$ A·m^{-2} à la température de 3000 K.

Remarquons que la dépendance du courant d'émission vis-à-vis de la température résulte uniquement du fait qu'à l'extérieur du cristal le gaz électronique n'est pas dégénéré ; c'est la raison pour laquelle la loi de Richardson-Dushmann est également valable pour les semi-conducteurs. De plus, on démontre que bien que le semi-conducteur ne contienne pas d'électrons de $\varepsilon = \mu$, son travail de sortie est égal, de même que pour un métal, à $\Phi = U - \mu$.

Les électrons peuvent être émis aussi par un métal froid, mais à condition que ce métal soit soumis à un champ électrique intense (dirigé vers le métal) ou illuminé avec une lumière de longueur d'onde suffisamment courte (v. plus loin); enfin les électrons peuvent être arrachés d'un métal en le soumettant au bombardement d'un flux d'ions. Dans le cas de l'émission par champ électrique (appelée parfois émission froide) la variation de la densité des électrons n_{vide} à l'extérieur du métal en fonction de l'intensité du champ E s'exprime par la relation $n_{\text{vide}} \sim \exp[-\gamma\Phi^{3/2}/(|e|E)]$, où Φ est le travail de sortie et $\gamma = 4\sqrt{2m}/(3\hbar)$. La densité des électrons n_{vide} est indépendante de la température mais varie très fortement avec l'intensité du champ, en croissant brusquement lorsque cette intensité augmente. On peut dire que l'intensité du champ joue ici le même rôle que celui joué par la température dans l'émission thermoélectronique.

L'arrachement des électrons d'un métal par la lumière (*effet photoélectrique externe ou effet photoémissif*) ne se produit que dans le cas où la fréquence ω de la lumière est supérieure à une certaine valeur limite. A savoir, il faut que soit remplie la condition $\hbar\omega > \Phi$. Dans ce cas l'énergie cinétique de l'électron libéré est

$$mv^2/2 = \hbar\omega - \Phi.$$

Cette relation (connue sous le nom de *loi d'Einstein*) montre que dans l'effet photoélectrique la lumière se comporte comme un gaz de particules et que l'énergie d'une telle particule, appelée photon, est égale à $\hbar\omega$. Si l'énergie du photon est inférieure au travail d'extraction Φ de l'électron, la libération de l'électron est impossible, alors que pour $\hbar\omega > \Phi$ l'arrachement de l'électron devient possible et la relation écrite n'est rien d'autre que l'expression de la loi de conservation de l'énergie.

§ 9.5. Différence de potentiel de contact

Si deux conducteurs de natures différentes (pour fixer les idées, nous parlerons des métaux) sont mis en contact, ils échangeront des électrons pour arriver finalement à un état d'équilibre statistique. Dans ce cas les électrons des deux métaux peuvent être considérés comme un seul gaz de Fermi ayant même température et même potentiel chimique. C'est seulement les énergies des électrons qui seront différentes et en particulier les profondeurs des puits de potentiel U_1 et U_2. Cela signifie que sur la surface de séparation des deux métaux il existe un saut $\Delta U = U_1 - U_2$ d'énergie potentielle de l'électron. L'énergie potentielle pouvant se représenter par le produit de la charge e de la particule par le potentiel φ, il existe sur la surface frontière entre deux métaux un saut de potentiel $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{1}{e}(U_1 - U_2)$. Plus haut nous avons lié l'énergie potentielle U au travail d'extraction $\Phi = U - \mu$ et puisque les potentiels chimiques des deux métaux sont égaux, la différence de potentiel se détermine par la différence des travaux d'extraction Φ_1 et Φ_2 des deux métaux :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = (\Phi_1 - \Phi_2)/e.$$

La différence de potentiel entre deux métaux en contact s'appelle différence de potentiel de contact.

Nous voyons que la différence de potentiel de contact est proportionnelle à la différence de travaux d'extraction.

La signification physique de cette relation est très simple. Soit par exemple $\Phi_1 > \Phi_2$. Dans ce cas les électrons peuvent passer plus facilement du métal *2* dans le métal *1* que dans le sens opposé. Dans le métal *1* il se forme une charge excédentaire, et un champ électrique dirigé du métal *2* vers le métal *1* prend naissance entre les métaux. Ce champ s'oppose au passage des électrons du métal *2* dans le métal *1*. Un équilibre sera atteint lorsque la différence de potentiel de contact deviendra égale à $(\Phi_1 - \Phi_2)/e$.

Calculons l'intensité du champ dû à la différence de potentiel de contact. Considérons le cas le plus simple où deux surfaces métalli-

ques planes ayant des potentiels φ_1 et φ_2 sont en contact (fig. 9.9 qui représente une coupe suivant un plan perpendiculaire à la ligne de contact passant par le point O, α étant l'angle formé entre les deux plans). Il est clair que les surfaces équipotentielles sont ici des plans passant par la ligne de contact des métaux, et les lignes de force sont des arcs de cercle centrés sur le point O. Le potentiel dans le plan qui fait un angle θ avec le plan 1 est égal à $\varphi = \varphi_1 + \frac{\theta}{\alpha}(\varphi_2 - \varphi_1)$, et l'intensité du champ à une distance r du point O est $E = (\varphi_2 - \varphi_1)/\alpha r$. Elle décroît comme l'inverse de la distance au point O. En multipliant E par ε_0, nous trouvons la densité de charges superficielles sur les surfaces des conducteurs 1 et 2.

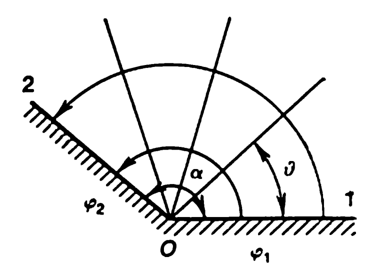


Fig. 9.9. Etablissement de la formule de l'intensité du champ dû à une différence de potentiel de contact

Remarquons que puisque le métal est un corps anisotrope dont les propriétés varient suivant la direction, le travail d'extraction des électrons peut dépendre de l'orientation de la surface du métal par rapport aux axes cristallographiques de son réseau cristallin. Il en résulte que dans un même cristal peuvent exister des différences de potentiel de contact entre ses différentes faces. Un champ électrique peut donc prendre naissance dans les monocristaux métalliques, au voisinage de leurs arêtes.

Si l'on prend non pas deux, mais toute une série de métaux mis en contact deux à deux $1, 2, \ldots$, il naît entre les métaux voisins les différences de potentiel de contact $\varphi_{12} = (\Phi_1 - \Phi_2)/e$, $\varphi_{23} = (\Phi_2 - \Phi_3)/e$, ..., où Φ_1, Φ_2, ... sont les travaux d'extraction respectifs des métaux $1, 2, \ldots$ Il est aisé d'en tirer la différence de potentiel entre les métaux extrêmes 1 et n:

$$\varphi_{1n} = \varphi_{12} + \varphi_{23} + \ldots + \varphi_{(n-1)n} = (\Phi_1 - \Phi_n)/e.$$

Nous voyons qu'elle n'est déterminée que par les métaux extrêmes. Dès lors, si cette série de métaux est réunie en un anneau, le travail d'extraction Φ_n sera égal à Φ_1 et la somme de toutes les différences de potentiel sera nulle. Cela signifie qu'il est impossible d'obtenir une source de f.é.m. à l'aide de seuls métaux se trouvant à l'état d'équilibre statistique. Ce n'est pas étonnant, sinon la loi de conservation de l'énergie ne serait pas observée. Pourtant on peut réaliser une source de f.é.m. si l'on maintient les soudures des métaux à des températures différentes, parce que dans ce cas le système de conducteurs devient un système hors d'équilibre.

Envisageons ce qui se passe dans un contact franc entre deux conducteurs 1 et 2 lorsque leur écartement $d \sim 10^{-9}$ m. Il est évident

que dans cet écartement il se crée un champ électrique d'intensité $E = \varphi_{12}/d = (\Phi_1 - \Phi_2)/(ed)$ auquel correspond une densité superficielle de charge $\sigma = \varepsilon_0 (\Phi_1 - \Phi_2)/(ed)$. Cela signifie qu'au voisinage du contact il se forme dans un conducteur une couche enrichie en électrons, et dans l'autre conducteur, une couche appauvrie en électrons, dont l'épaisseur $L \sim \sigma/(en)$, où n est la densité de porteurs de charges (électrons, trous). La présence de ces couches conduit à une asymétrie du contact: la résistance du contact devient différente pour les courants qui traversent le contact dans des sens opposés.

Supposons qu'un seul ou les deux conducteurs en contact sont constitués par des semi-conducteurs ayant une densité de porteurs de charges $n \sim 10^{16}$ à 10^{21} m^{-3}. D'ordinaire, $|\Phi_1 - \Phi_2| \sim 1$ eV,

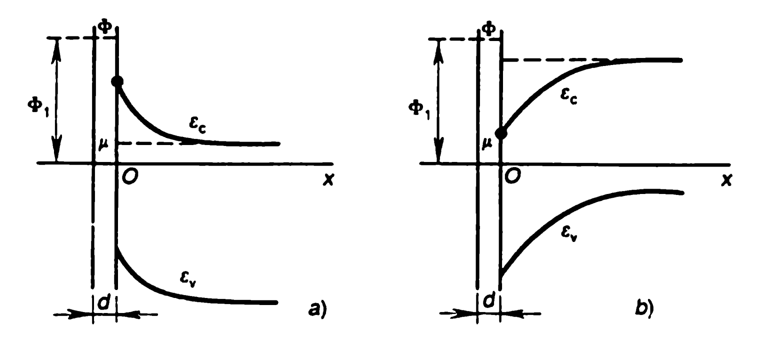


Fig. 9.10. Courbure des bandes d'énergie dans un semi-conducteur au voisinage du contact semi-conducteur-métal

si bien que dans un semi-conducteur $L \sim 5 \cdot 10^{-5}$ à 5 m. Autrement dit, $L \gg d$, de sorte que ce n'est pas l'écartement mais le semi-conducteur lui-même qui chute la plus grande partie de la tension due à la différence de potentiel de contact. Il en résulte une *courbure des bandes d'énergie*: le niveau inférieur ε_c de la bande de conduction et le niveau supérieur ε_v de la bande de valence dépendent de la distance x au contact. Les courbes de variation de ces niveaux sont montrées sur la figure 9.10. La figure 9.10, *a* se rapporte au contact métal-semi-conducteur du type n (dont le travail d'extraction est plus petit que celui d'un métal), et la figure 9.10, *b*, au contact métal-semi-conducteur du type p (le travail d'extraction de tels semi-conducteurs est en règle générale supérieur à celui d'un métal).

Les grandes dimensions des couches enrichies et appauvries dans les semi-conducteurs permettent d'influer facilement sur ces couches à l'aide d'un champ extérieur. C'est pour cette raison que les effets de contact dans les semi-conducteurs sont largement utilisés avant tout dans l'électronique des solides (quant aux métaux dont

$n \sim 10^{29}$ m^{-3}, leur valeur de L se détermine dans le cadre de la mécanique quantique et se trouve de l'ordre de grandeur des distances atomiques, de sorte que de ce point de vue les contacts métal-métal sont dépourvus d'intérêt pratique).

L'appareil le plus simple utilisant les contacts semi-conducteurs est un *redresseur semi-conducteur.* Soit un cristal présentant des régions à conductibilité par électrons (région n) et par trous (région p). Si l'on applique à la région p une tension négative (par rapport à la région n), cette tension « soutirera » les trous de la région n et les électrons de la région p, ce qui engendrera un courant électrique. Au contraire, si la région p est soumise à une tension positive, le contact p-n sera « bloqué » et aucun courant ne circulera dans le circuit. C'est sur ce principe qu'est basée l'action redresseuse du cristal semi-conducteur.

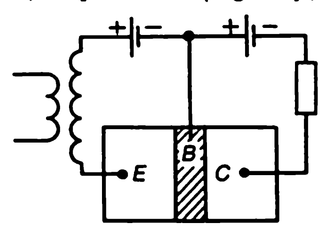


Fig. 9.11. Transistor à jonctions p-n

Un semi-conducteur dopé, à deux contacts p-n, est capable d'amplifier des signaux faibles; on l'appelle *transistor* ou *triode à cristal* (fig. 9.11). Supposons, pour fixer les idées, que la première et la troisième régions du cristal (émetteur E et collecteur C) présentent la conductibilité par trous, et la région médiane (base B) celle par électrons. L'application d'une tension continue (fig. 9.11) provoque le blocage du contact E-B. Un faible signal variable qui assure le « déblocage » du contact fera naître une puissante impulsion de courant dans le circuit de collecteur; le coefficient d'amplification peut atteindre dans ce cas plusieurs centaines d'unités.

§ 9.6. Formule de Drude

Passons maintenant à l'étude de la conductibilité électrique des métaux et des semi-conducteurs. Commençons par lier la densité de courant électrique $\mathbf{j}$ à la fonction de distribution des électrons $f(\mathbf{p})$. De par la définition même de la fonction de distribution, la densité des électrons dont l'impulsion est comprise dans l'intervalle $(\mathbf{p}, \mathbf{p} + d\mathbf{p})$ est égale à $2f(\mathbf{p})\, d^3p/(2\pi\hbar)^3$, où $d^3p = dp_x\, dp_y\, dp_z$ est un élément de volume dans l'espace des impulsions, et le facteur 2 tient compte de deux orientations possibles du spin de l'électron. Si nous multiplions cette quantité par ev, où e est la charge et v la vitesse de l'électron, nous trouverons la charge transportée par ces électrons en 1 seconde. En intégrant l'expression obtenue sur d^3p, nous déterminons la densité du courant:

$$j = 2e \int vf(p) \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Cette formule peut s'écrire également sous la forme

$$j = 2e \int vf(p)\, \nu(\varepsilon)\, d\varepsilon \frac{d\Omega}{4\pi},$$

où $\nu(\varepsilon)\, d\varepsilon d\Omega/(4\pi)$ est le nombre d'états électroniques dans l'intervalle d'énergies $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$ et dans l'intervalle d'angles solides $d\Omega$ de l'impulsion $\mathbf{p}$.

A l'état d'équilibre statistique la distribution des électrons est isotrope, c'est-à-dire que $f(\mathbf{p})$ ne dépend que du module de l'impulsion et est indépendante de sa direction. Cela signifie que dans ce cas $f(\mathbf{p}) = f(-\mathbf{p})$, et comme la vitesse change de signe en même temps que l'impulsion, l'intégrale déterminant la densité du courant s'annule. Une telle situation se présente en l'absence de champ ; si un champ électrique est appliqué au conducteur, il se crée une direction privilégiée ; la fonction de distribution devient asymétrique, c'est-à-dire que $f(\mathbf{p}) \neq f(-\mathbf{p})$ et le vecteur densité de courant est non nul.

Faisons abstraction du fait que les électrons se trouvent dans le réseau cristallin et considérons-les comme un gaz de particules libres. Dans ce cas la vitesse $\mathbf{v}$ d'un électron est proportionnelle à son impulsion, c'est-à-dire que $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m_e$, où m_e est la masse de l'électron, et l'impulsion totale des électrons rapportée au volume unité s'exprime donc par

$$\mathbf{P} = 2 \int \mathbf{p} f(\mathbf{p}) \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = 2m_e \int \mathbf{v} f(\mathbf{p}) \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Le rapprochement entre cette formule et la formule donnant la densité de courant montre que $\mathbf{j} = (e/m_e)\,\mathbf{p}$, c'est-à-dire que la densité de courant est proportionnelle à la densité d'impulsion. Il en découle une conclusion importante concernant un gaz d'électrons isolé. Pour un tel gaz l'impulsion se conserve quelle que soit l'interaction des électrons l'un avec l'autre pourvu qu'ils n'interagissent pas avec le milieu extérieur. Mais dans un tel cas la densité de courant, proportionnelle à la densité d'impulsion, se conserve elle aussi. C'est pourquoi dans les systèmes de référence où l'impulsion est différente de zéro, la densité de courant l'est également bien que le gaz ne soit pas soumis à un champ électrique extérieur. Cela signifie que

un gaz isolé des électrons, en une interaction quelconque les uns avec les autres (mais non avec les corps environnants), ne présente aucune résistance électrique.

Si un tel gaz est placé dans un champ constant extérieur $\mathbf{E}$, l'impulsion totale $\mathbf{P}$ des électrons ne sera plus conservée, elle variera suivant l'équation $\dot{\mathbf{P}} = en\mathbf{E}$, où n est la densité des électrons (en vertu de la loi de l'égalité de l'action et de la réaction, les forces

internes d'interaction entre les électrons n'entrent pas dans cette relation). Il en résulte que

$$\frac{d}{dt}\,\mathbf{j} = \frac{e^2 n}{m_e}\,\mathbf{E}.$$

Cette relation montre que

l'application d'un champ électrique constant, aussi peu intense que l'on veut, à un gaz électrique isolé a pour effet de provoquer une croissance indéfinie du courant dans ce gaz.

Cette conclusion est liée à deux hypothèses adoptées : premièrement, le rapport e/m_e doit être le même pour toutes les particules du gaz et deuxièmement, le gaz doit constituer un système fermé.

Pour illustrer et expliquer le résultat obtenu, envisageons un plasma totalement ionisé (c'est-à-dire un gaz composé d'électrons et d'ions dont la charge résultante est nulle). Comme la masse d'un ion est beaucoup plus grande que celle de l'électron (de 2000 fois au moins), les ions peuvent être considérés comme étant au repos. C'est pourquoi l'impulsion du plasma ne diffère pratiquement pas de l'impulsion des électrons, mais cette dernière ne se conserve pas par suite de l'interaction entre les électrons et les ions. C'est pour cette raison qu'en l'absence de champ extérieur aucun courant d'électrons ne passe dans le plasma. Après l'application d'un champ extérieur l'équation $\dot{\mathbf{P}} = en\mathbf{E}$ cesse d'être vérifiée parce que son second membre doit maintenant faire intervenir encore la force qui s'exerce sur les électrons de la part des ions. L'équation $d\mathbf{j}/dt = (e^2n/m_e)\mathbf{E}$ cesse elle aussi d'être valable.

Toutefois, si l'on part d'une image simplifiée de l'interaction entre les électrons et les ions et si l'on considère que pendant un certain intervalle de temps τ l'électron se déplace comme une particule libre et perd totalement son impulsion en entrant à la fin de son parcours en collision avec un ion, l'équation $d\mathbf{j}/dt = (e^2n/m_e)\,\mathbf{E}$ peut être utilisée pour cet intervalle de temps τ. C'est pourquoi la croissance du courant ne sera pas indéfinie mais déterminée par la formule

$$\mathbf{j} = \frac{e^2 n}{m_e}\,\mathbf{E}\,\langle\tau\rangle,$$

où $\langle\tau\rangle$ est une certaine valeur moyenne de τ. Cette quantité est appelée *temps de libre parcours moyen de l'électron*. (Par la suite il sera noté τ.) Nous obtenons ainsi la loi d'Ohm exprimée par l'intermédiaire de la conductivité électrique

$$\sigma = \frac{e^2 n}{m_e}\,\tau.$$

Cette relation porte le nom de *formule de Drude*.

En multipliant τ par la vitesse moyenne v_{th} de l'agitation thermique des électrons, nous obtenons le *libre parcours moyen de l'électron* : $l = v_{th}\tau$. L'expression de la conductivité électrique peut donc s'écrire aussi sous la forme

$$\sigma = \frac{e^2 n l}{m_e v_{th}}.$$

Plus grand est le libre parcours moyen, plus élevé est σ. Dans le cas concret du plasma

$$l \sim \frac{1}{n}\left(\frac{\varepsilon_0 kT}{e^2}\right)^2,$$

et puisque $v_{th} \sim \sqrt{kT/m_e}$, il vient

$$\sigma \sim \frac{(kT)^{3/2}\,\varepsilon_0}{\sqrt{m_e}\,e^4}.$$

Nous voyons que la conductibilité électrique du plasma croît rapidement, comme $T^{3/2}$, avec la température.

§ 9.7. Equation cinématique des électrons

Revenons maintenant aux conducteurs cristallins. Dans quelle mesure les résultats obtenus pour le gaz d'électrons libres sont applicables à ces conducteurs ? Il semblerait que le métal puisse être considéré comme un plasma composé d'électrons de conduction et d'ions et donc il serait naturel d'utiliser pour la conductivité électrique des métaux la formule $\sigma = (e^2 n/m_e)\tau$. Mais une question se pose alors : que doit-on entendre par τ et comment peut-on déterminer cette quantité ? Il est essentiel que, premièrement, les ions sont disposés dans le cristal dans un ordre bien déterminé et non d'une manière désordonnée comme dans le plasma et, deuxièmement, les électrons dans le métal obéissent à la statistique de Fermi et non à celle de Maxwell-Boltzmann comme dans le plasma. Quant à la première circonstance, elle conduit à une modification de la notion d'impulsion de l'électron en mouvement dans un cristal. A savoir, on montre en mécanique quantique que les états des électrons d'impulsions $\mathbf{p}$ et $\mathbf{p}' = \mathbf{p} + 2\pi\hbar\mathbf{b}$ sont physiquement équivalents. Ici, $\mathbf{b} = m_1\mathbf{b}_1 + m_2\mathbf{b}_2 + m_3\mathbf{b}_3$ est un *vecteur* dit *de réseau réciproque* ($\mathbf{b}_i$ sont les périodes principales du réseau réciproque liées aux périodes principales $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ du réseau cristallin par les relations $\mathbf{b}_i\mathbf{a}_k = \delta_{ik}$, $\delta_{ik} = 1$ pour $i = k$ et $\delta_{ik} = 0$ pour $i \neq k$ et m_i sont des entiers). Ainsi,

dans un réseau périodique le vecteur p ne peut être déterminé qu'à $2\pi\hbar\mathbf{b}$ près.

C'est pour cette raison qu'on donne au vecteur $\mathbf{p}$ le nom de *quasi-impulsion* au lieu d'impulsion.

L'impossibilité d'une fixation exacte de l'impulsion conduit à la non-conservation de la quasi-impulsion dans les processus d'interaction des électrons dans le réseau. Si, par exemple, deux électrons de quasi-impulsions $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}_2$ entrent en collision dans le réseau et si par suite de l'interaction (collision) leurs quasi-impulsions deviennent égales à $\mathbf{p}_1'$ et $\mathbf{p}_2'$, c'est la relation

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' + 2\pi\hbar\mathbf{b}$$

qui est vérifiée et non la loi habituelle de conservation de l'impulsion $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2'$. C'est pourquoi, même si on fait abstraction de l'interaction des électrons de conduction avec les ions du réseau cristallin, l'interaction elle-même des électrons l'un avec l'autre conduit déjà (à la différence du plasma) à une valeur finie de la conductibilité électrique du métal.

La seconde circonstance — la statistique des électrons dans le métal est autre que celle des électrons dans le plasma — est elle aussi essentielle parce que, comme nous l'avons vu, pour déterminer le vecteur densité de courant il est nécessaire de connaître la fonction de distribution f des électrons, et pour trouver cette fonction (en présence de champ électrique elle diffère de la fonction de distribution de Fermi), il faut prendre en compte le principe de Pauli.

Expliquons la méthode permettant de trouver la fonction de distribution des électrons $f(t, \mathbf{p})$ dans un champ électrique $\mathbf{E}$. Considérons le bilan du nombre d'électrons dans un élément d^3p de l'espace $\mathbf{p}$. A un instant t ce nombre est égal à $f(t; \mathbf{p})\, d^3p/(2\pi\hbar)^3$ (la projection du spin de l'électron est supposée donnée et la distribution des électrons est supposée spatialement homogène). Mais, par suite des collisions, certaines particules entrent dans ce volume alors que d'autres en sortent. En outre, les électrons sont accélérés dans le champ $\mathbf{E}$, de sorte que leur impulsion (plus exactement, leur quasi-impulsion) varie. A savoir, si à l'instant t la quasi-impulsion était égale à $\mathbf{p}$, à l'instant $t + dt$ elle sera égale à $\mathbf{p} + e\mathbf{E}dt$.

Désignons par $(\partial f/\partial t)_+^{\text{coll}}$ et $(\partial f/\partial t)_-^{\text{coll}}$ les nombres des électrons entrant et sortant en 1 s, par suite de divers processus de collisions, du volume unité de l'espace $\mathbf{p}$ (au voisinage du point $\mathbf{p}$). Alors, à l'instant $t + dt$ le nombre d'électrons dans l'élément de volume $d^3p = dp_x\, dp_y\, dp_z$ de l'espace $\mathbf{p}$ sera égal à

$$\left\{f(t;\ \mathbf{p}) + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_+^{\text{coll}} - \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_-^{\text{coll}}\right] dt\right\} \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Comme les particules ne peuvent ni naître, ni disparaître, ce nombre est égal à $f(t + dt; \mathbf{p} + e\mathbf{E}dt)$. Mais

$$f(t + dt;\ \mathbf{p} + e\mathbf{E}\,dt) \approx f(t;\ \mathbf{p}) + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} e\mathbf{E}\,dt.$$

En égalant entre elles les deux expressions, nous obtenons

$$\frac{\partial f}{\partial t} + e\mathbf{E}\,\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^{\text{coll}},$$

où $(\partial f/\partial t)^{\text{coll}} = (\partial f/\partial t)^{\text{coll}}_{+} - (\partial f/\partial t)^{\text{coll}}_{-}$. Cette quantité s'appelle *intégrale des collisions*, et la relation obtenue exprime l'équation cinématique.

Nous avons obtenu l'équation cinématique pour une distribution homogène des électrons lorsque la fonction f est indépendante des coordonnées. En outre, nous avons supposé que la force exercée sur les électrons était une force électrostatique $e\mathbf{E}$. Dans le cas plus général d'une distribution inhomogène $f\,(t\,;\ \mathbf{p},\ \mathbf{r})$ et d'une force $\mathbf{F}$ quelconque, le nombre d'électrons à l'instant $t + \mathrm{d}t$ au voisinage du point $\mathbf{r} + \mathrm{d}\mathbf{r}$, dans l'élément de volume d^3p de l'espace $\mathbf{p}$, est égal à

$$f\,(t + \mathrm{d}t\,;\ \mathbf{r} + \mathrm{d}\mathbf{r}\,;\ \mathbf{p} + \mathbf{F}\,\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}^3p \approx$$

$$\approx \left\{f\,(t\,;\ \mathbf{r},\ \mathbf{p}) + \frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}\,\mathbf{F}\,\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}^3p.$$

C'est précisément cette expression que nous devons égaler à la quantité $\{f\,(t\,;\ \mathbf{r},\ \mathbf{p}) + (\partial f/\partial t)^{\text{coll}}\}\mathrm{d}^3p$. En remarquant que $\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t = \mathbf{v}$ est la vitesse de la particule, nous obtenons l'équation cinématique générale

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\,\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}\,\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^{\text{coll}}.$$

L'intégrale des collisions se détermine par des processus d'interaction concrets auxquels participent les électrons. L'intégrale des collisions présente la structure la plus simple dans le cas où elle correspond aux collisions des électrons avec des atomes « étrangers » (par rapport au cristal) ou, comme on dit, avec les *atomes d'impureté*. La masse de l'atome étant beaucoup plus grande que celle de l'électron, les collisions de l'électron avec les atomes d'impureté sont essentiellement des collisions élastiques (sans variation de l'énergie de l'électron). Si $w_{\text{im}}\,(\mathbf{p},\ \mathbf{p}')$ est la probabilité pour que l'électron passe en 1 s de l'état $\mathbf{p}$ à l'état $\mathbf{p}'$ (elle est proportionnelle à la concentration des impuretés), le nombre de transitions électroniques $\mathbf{p} \to \mathbf{p}'$ en 1 s est égal à

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^{\text{coll}}_{-} = \sum_{\mathbf{p}'} w_{\text{im}}\,(\mathbf{p},\ \mathbf{p}')\,f\,(\mathbf{p})\,[1 - f\,(\mathbf{p}')],$$

où le facteur $1 - f\,(\mathbf{p}')$ tient compte du principe de Pauli : le passage n'est possible que si l'état $\mathbf{p}'$ n'est pas occupé. La sommation est effectuée ici sur tous les états $\mathbf{p}'$. D'une manière analogue, le nombre de transitions $\mathbf{p}' \to \mathbf{p}$ est donné par la formule

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^{\text{coll}}_{+} = \sum_{\mathbf{p}'} w_{\text{im}}\,(\mathbf{p}',\ \mathbf{p})\,f\,(\mathbf{p}')\,[1 - f\,(\mathbf{p})].$$

En retranchant $(\partial f/\partial t)^{\text{coll}}_{-}$ de cette expression, nous obtenons l'intégrale des collisions $(\partial f/\partial t)^{\text{coll}}_{\text{im}}$ correspondant aux collisions des électrons avec les atomes

d'impureté. Ce faisant, on doit tenir compte que w (p, p′) = w (p′, p). De ce fait,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^{\text{coll}}_{\text{im}} = \sum_{\mathbf{p}'} w_{\text{im}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\{f(\mathbf{p}')[1-f(\mathbf{p})]-f(\mathbf{p})[1-f(\mathbf{p}')]\} =$$

$$= \sum_{\mathbf{p}'} w_{\text{im}}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')(f(\mathbf{p}')-f(\mathbf{p})).$$

Il importe de signaler une propriété très importante de l'intégrale des collisions : elle s'annule pour des distributions en équilibre de particules, c'est-à-dire dans le cas considéré pour les électrons obéissant à la distribution de Fermi. C'est pourquoi, lorsque les écarts de la fonction de distribution f par rapport à la fonction de Fermi f_0 sont faibles, l'intégrale des collisions est linéaire en $f - f_0$:

$$(\partial f/\partial t)^{\text{coll}}_{\text{im}} = -w_{\text{im}}(f-f_0),$$

où w_{im} est une certaine valeur moyennée de la probabilité w_{im} (p, p′) (cette quantité sera évaluée au paragraphe suivant).

Analysons maintenant la structure de l'intégrale des collisions correspondant à la diffusion des électrons par les électrons. Considérons deux électrons de quasi-impulsions p et p′ qui passent, par suite d'une collision, à l'état de quasi-impulsions p″ et p‴. Désignons par w (p, p′; p″, p‴) la probabilité pour que ce processus se réalise en 1 s. Alors le nombre de transitions p, p′ → → p″, p‴ en 1 s sera égal à

$$w(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \mathbf{p}'', \mathbf{p}''')f(\mathbf{p})f(\mathbf{p}')[1-f(\mathbf{p}'')][1-f(\mathbf{p}''')],$$

où les facteurs de type $1 - f$ tiennent compte du principe de Pauli : les électrons ne peuvent passer aux états p″ et p‴ que si ces états ne sont pas occupés. Les probabilités des processus p, p′ → p″, p‴ et p″, p‴ → p, p′ sont égales. L'intégrale des collisions correspondant à l'interaction des électrons l'un avec l'autre peut donc s'écrire sous la forme

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^{\text{coll}}_{\text{el}} = \sum_{\mathbf{p}', \mathbf{p}'', \mathbf{p}'''} w(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \mathbf{p}'', \mathbf{p}''')\{f(\mathbf{p}'')f(\mathbf{p}''')[1-f(\mathbf{p})][1-f(\mathbf{p}')]-$$

$$-f(\mathbf{p})f(\mathbf{p}')[1-f(\mathbf{p}'')][1-f(\mathbf{p}''')]\}.$$

A l'équilibre, la quantité entre accolades s'annule ; il est aisé de s'en assurer en remplaçant la fonction f par la fonction de Fermi f_0 et en appliquant la loi de conservation de l'énergie $\varepsilon + \varepsilon' = \varepsilon'' + \varepsilon'''$. C'est pourquoi, lorsque les écarts de la fonction f par rapport à f_0 sont faibles, l'intégrale des collisions est linéaire en $f - f_0$:

$$(\partial f/\partial t)^{\text{coll}}_{\text{el}} = -w_{\text{el}}(f-f_0),$$

où w_{el} est une certaine valeur moyennée de w (p, p′; p″, p‴). Puisque dans le cas des métaux les transitions électroniques ne sont possibles, par suite de la dégénérescence du gaz électronique, que dans la région de flou de la distribution de Fermi, et que les électrons interagissants sont au nombre de deux, la quantité w_{el} dans les métaux est proportionnelle au carré de la température.

Nous avons examiné les intégrales des collisions correspondant à l'interaction des électrons avec les impuretés et à la diffusion électron-électron. En principe, il faut tenir compte à la fois tant de ces processus que d'autres processus d'interaction auxquels participent les électrons. Aussi, l'intégrale des

collisions est-elle représentée par une somme

$$(\partial f/\partial t)^{\rm coll} = \sum_i (\partial f/\partial t)_i^{\rm coll},$$

où l'indice i numerote divers processus d'interaction. L'intégrale des collisions a une propriété importante de s'annuler pour la distribution de Fermi $f_0 = \{e^{(\varepsilon-\mu)/(kT)} + 1\}^{-1}$. C'est pourquoi pour $|f - f_0| \ll f_0$ l'intégrale des collisions est linéaire en $f - f_0$:

$$(\partial f/\partial t)_i^{\rm coll} = -w_i (f - f_0),$$

où w_i sont des valeurs moyennées des probabilités des divers processus.

Ainsi, lorsque la fonction de distribution est voisine de la fonction en équilibre,

$$(\partial f/\partial t)^{\rm coll} = -(f - f_0)/\tau, \quad 1/\tau \equiv w = \sum_i w_i.$$

La grandeur w vaut la somme des probabilités moyennées des divers processus de diffusion auxquels participe l'électron, et son inverse, τ, est le temps moyen entre les collisions. On l'appelle *temps de libre parcours moyen*. En introduisant le libre temps moyen $\tau_i = 1/w_i$ par rapport au i-ième processus d'interaction des électrons, on peut écrire

$$1/\tau = \sum_i (1/\tau_i).$$

Les quantités w_i et τ_i peuvent dépendre tant de l'énergie de l'électron que de la température, de la densité des atomes d'impureté, etc.

Reportons-nous maintenant à l'équation cinématique pour les électrons et introduisons dans cette équation l'expression obtenue pour $(\partial f/\partial t)^{\rm coll}$ valable pour $|f - f_0| \ll f_0$, il vient

$$\frac{\partial f}{\partial t} + e\mathbf{E}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{1}{\tau}(f - f_0).$$

Cette équation détermine la fonction f permettant de calculer la densité de courant $\mathbf{j}$. En passant à la résolution de ce problème, supposons d'abord que $\mathbf{E} = 0$. Dans ce cas $\frac{\partial}{\partial t}\delta f = -\frac{1}{\tau}\delta f$, où $\delta f = f - f_0$. Par conséquent, $\delta f = (\delta f_0)\, e^{-t/\tau}$, où (δf_0) est l'écart initial de la fonction de distribution par rapport à la fonction de distribution en équilibre. Nous voyons qu'en l'absence de champ tout écart par rapport à la fonction de distribution en équilibre s'évanouit et devient, au bout d'un temps $t \sim \tau$, très petit, si bien que τ joue le rôle du temps de relaxation vers la distribution en équilibre.

Examinons maintenant une distribution stationnaire des électrons dans le métal en considérant que $E \neq 0$. Dans ce cas, il résulte de

l'équation cinématique que

$$f = f_0 - \tau e \mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}.$$

Puisque nous avons supposé que $|f - f_0| \ll f_0$, dans le terme comprenant **E** la fonction f peut être remplacée par f_0. En tenant compte que

$$\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = \frac{df_0}{d\varepsilon} \mathbf{v},$$

où $\mathbf{v} = \partial\varepsilon/\partial\mathbf{p}$ est la vitesse de l'électron, on peut écrire

$$f = f_0 - \tau e \mathbf{v}\mathbf{E} \frac{df_0}{d\varepsilon}.$$

Nous voyons que l'écart par rapport à la distribution en équilibre, dû au champ, est proportionnel à **vE**. Mais la quantité $df_0/d\varepsilon$ n'est essentiellement différente de zéro que dans la région de flou $\Delta\varepsilon \sim kT$ de la distribution de Fermi au voisinage de l'énergie limite $\varepsilon = \mu$. C'est seulement dans cette région que le champ fait varier de façon substantielle la fonction de distribution des électrons, alors qu'en dehors de cette région la distribution des électrons ne diffère pratiquement pas de la distribution de Fermi. Puisque $(-df_0/d\varepsilon)$ présente un maximum aigu pour $\varepsilon = \mu$, pour calculer les intégrales contenant un produit de $df_0/d\varepsilon$ par une fonction lisse arbitraire $F(\varepsilon)$, on peut se servir de la règle suivante

$$-\int (df_0/d\varepsilon) F(\varepsilon)\, d\varepsilon = F(\mu).$$

L'erreur qui en résulte est proportionnelle à $(kT/\mu)^2$.

Calculons maintenant la densité de courant. En reportant l'expression de f dans la formule générale de **j** et en tenant compte que le terme f_0 n'apporte aucune contribution à la densité de courant, nous obtenons

$$\mathbf{j} = -2e^2 \int \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{E})\tau \frac{df_0}{d\varepsilon} \nu(\varepsilon)\, d\varepsilon \frac{d\Omega}{4\pi}$$

($\nu(\varepsilon)$ étant la densité de niveaux de l'électron). En utilisant le maximum aigu de la fonction $df_0/d\varepsilon$, on peut effectuer ici l'intégration sur l'énergie :

$$\mathbf{j} = 2e^2 v_0^2 \tau_0 \nu(\mu) \int \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{E}) \frac{d\Omega}{4\pi},$$

où $\mathbf{n} = \mathbf{v}/v$ et l'indice 0 signifie que la quantité correspondante se rapporte à la valeur de $\varepsilon = \mu$. L'intégrale par rapport à l'angle solide Ω est égale à $^1/_3\,\mathbf{E}$ si bien que

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}, \quad \sigma = \frac{2}{3} e^2 v_0^2 \tau_0 \nu(\mu).$$

Cette formule générale de la conductivité électrique d'un métal peut être mise sous la forme de la formule de Drude si l'on admet que $\varepsilon = p^2/(2m)$ (en général, la relation entre l'énergie ε de l'électron et sa quasi-impulsion **p** a un caractère plus complexe). Dans ce cas la quantité $d^3p = p^2\,dp\,d\Omega$ peut être mise sous la forme $d^3p = \sqrt{2\varepsilon}\, m_e^{3/2}\, d\varepsilon\, d\Omega$. Puis, en utilisant la relation

$$\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = \nu(\varepsilon)\, d\varepsilon\, \frac{d\Omega}{4\pi},$$

nous en tirons

$$\nu(\varepsilon) = \sqrt{2\varepsilon}\, m_e^{3/2}/(2\pi^2\hbar^3).$$

Enfin tenons compte que $\varepsilon_F \approx \mu$ et

$$2\,\frac{4\pi}{3}\,\frac{p_F^3}{(2\pi\hbar)^3} = n\,; \qquad \frac{p_0^2}{2m_e} = \mu$$

(n étant la densité des électrons). Nous sommes conduits alors à la formule de Drude

$$\sigma = e^2 n \tau_0/m_e$$

qui fait intervenir la valeur du temps de relaxation τ pour $\varepsilon = \mu$. Elle peut se récrire sous la forme

$$\sigma = e^2 nl/(m_e v_0),$$

où $l = \tau_0 v_0$ est le libre parcours moyen de l'électron animé de la vitesse limite v_0. Puisque les inverses des temps de libre parcours s'ajoutent, nous avons

$$1/l = \sum_i (1/l_i),$$

où $l_i = \tau_i v_0$ est le libre parcours moyen de l'électron par rapport au i-ième processus de diffusion.

Indiquons encore la formule donnant la résistivité $\rho = 1/\sigma$:

$$\rho = \sum_i \rho_i\,; \quad \rho_i = m_e v_0/(e^2 n l_i).$$

Ici ρ_i désigne la résistivité due au i-ième processus de diffusion des électrons.

§ 9.8. Conductibilité électrique des métaux

La densité des électrons et leur vitesse limite qui entrent dans la formule de σ sont des constantes caractéristiques de chaque métal, indépendantes des facteurs extérieurs tels que la température. Seule la longueur de libre parcours moyen peut varier en fonction de ces facteurs. Nous passons maintenant à l'étude de cette variation. Commençons par considérer un cristal métallique idéalisé hypothétique possédant un réseau périodique absolument régulier à ions immobiles

(n'effectuant aucune vibration !), ne contenant aucune impureté et dont les électrons n'interagissent pas entre eux. Un tel cristal idéalisé peut être considéré comme une molécule géante et, de même que dans une molécule ordinaire les électrons se déplacent sans entrer en collision, le mouvement des électrons dans notre cristal idéalisé s'effectue, grâce à sa périodicité absolue, sans collisions avec les ions (à la différence du plasma dans lequel les ions sont disposés d'une façon désordonnée). En outre, nous supposons que les électrons ne s'entrechoquent pas. Cela signifie que la longueur de libre parcours de l'électron dans un tel cristal est infinie et donc la conductance d'un tel cristal est elle aussi infinie et sa résistance est nulle.

La valeur finie de la longueur de libre parcours de l'électron est due au caractère non idéal du réseau cristallin et à l'interaction entre les électrons. L'imperfection du réseau est à son tour liée à la présence d'impuretés et de défauts ainsi qu'aux vibrations thermiques du réseau. Ainsi, il faut distinguer

trois mécanismes principaux de diffusion des électrons : la diffusion des électrons par des atomes d'impureté, la diffusion des électrons par des vibrations du réseau et la diffusion des électrons par des électrons.

La plus simple est la diffusion des électrons par des atomes d'impureté. Si Q est la section efficace de diffusion de l'électron par un atome d'impureté ($Q \sim 10^{-18}$ m²), la longueur de libre parcours l_{im} de l'électron par rapport à cette diffusion peut être calculée par la formule obtenue en mécanique des fluides $l_{\text{im}} = 1/(n'Q)$, où n' est la densité d'atomes d'impureté.

Examinons maintenant la diffusion des électrons due aux vibrations thermiques du réseau. Ces vibrations peuvent s'effectuer avec des fréquences différentes ω qui dépendent de la longueur d'onde des vibrations ou du vecteur d'onde $\mathbf{f}$; en outre, la fréquence dépend de la polarisation j de l'onde. Quant aux polarisations, il en existe trois et dans le cas le plus simple, celui d'un corps isotrope, une d'elles correspond à des vibrations longitudinales, et deux autres, à des vibrations transversales. Pour cette raison la fréquence doit s'écrire sous la forme $\omega_j(\mathbf{f})$. Dans le cas des ondes longues, lorsque $fa \ll 1$ (a étant la constante du réseau), la fréquence $\omega_j(\mathbf{f}) = s_j f$ est proportionnelle au nombre d'onde f, s_j étant ici la vitesse du son correspondant à la polarisation j.

Aux vibrations du réseau on peut lier les corpuscules bien déterminés appelés *phonons*

dont l'énergie ε_{fj} et la quasi-impulsion $\mathbf{q}$ se déterminent par les relations

$$\varepsilon_{fj} = \hbar\omega_j(\mathbf{f}); \quad \mathbf{q} = \hbar\mathbf{f}.$$

La diffusion des électrons due aux vibrations du réseau se ramène à deux processus principaux : l'émission et l'absorption d'un phonon

par un électron. Ces processus obéissent aux lois de conservation

$$\varepsilon = \varepsilon' \pm \varepsilon_{fj}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}' \pm \mathbf{q} + 2\pi\hbar\mathbf{b},$$

où ε est l'énergie d'un électron de quasi-impulsion $\mathbf{p}$ avant diffusion, ε', l'énergie d'un électron de quasi-impulsion $\mathbf{p}'$ après diffusion et $\mathbf{b}$, le vecteur du réseau réciproque (rappelons qu'il doit entrer dans l'équation parce que dans le réseau on ne peut déterminer que la quasi-impulsion et non l'impulsion et ceci concerne tant l'électron que le phonon).

L'intégrale des collisions $(\partial f/\partial t)_{\text{ph}}^{\text{coll}}$ des électrons avec le réseau peut être interprétée comme intégrale des collisions des électrons avec les phonons. Ce faisant, on doit avoir en vue que la probabilité d'absorption d'un phonon est proportionnelle au nombre de phonons disponibles N_{fj}, et celle d'émission d'un phonon est proportionnelle au nombre de phonons disponibles plus 1, c'est-à-dire à $N_{fj} + 1$. L'intégrale des collisions a donc la structure suivante:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{ph}}^{\text{coll}} = \sum_{\mathbf{p}',\, \mathbf{f}} w_+ (\mathbf{p}'\,;\ \mathbf{p},\ \mathbf{f}) \{f(\mathbf{p}')\,[1 - f(\mathbf{p})]\,(N_{\mathbf{f}} + 1) - f(\mathbf{p})\,[1 - f(\mathbf{p}')]\,N_{\mathbf{f}}\} +$$
$$+ \sum_{\mathbf{p}'',\, \mathbf{f}} w_- (\mathbf{p}'',\ \mathbf{f}\,;\ \mathbf{p}) \{f(\mathbf{p}')\,[1 - f(\mathbf{p})]\,N_{\mathbf{f}} - f(\mathbf{p})\,[1 - f(\mathbf{p}')]\,(N_{\mathbf{f}} + 1)\}.$$

Ici, la première somme détermine le nombre de transitions électroniques $\mathbf{p}' \to \mathbf{p}$ en 1 s avec émission d'un phonon $\mathbf{f}$ (l'indice j est omis) et le nombre de transitions inverses $\mathbf{p} \to \mathbf{p}'$ avec absorption d'un phonon $\mathbf{f}$ (la probabilité des deux processus rapportée à 1 s est la même et notée $w_+ (\mathbf{p}', \mathbf{p}, \mathbf{f})$). D'une manière analogue, la seconde somme détermine le nombre de transitions $\mathbf{p}'' \to \mathbf{p}$ en 1 s avec absorption d'un phonon $\mathbf{f}$ et le nombre de transitions inverses $\mathbf{p} \to \mathbf{p}''$ avec émission d'un phonon $\mathbf{f}$ (la probabilité rapportée à 1 s des deux processus est la même et notée $w_- (\mathbf{p}'', \mathbf{f}, \mathbf{p})$). La sommation est effectuée sur toutes les valeurs possibles de $\mathbf{p}'$, $\mathbf{p}''$, $\mathbf{f}$ compte tenu de la loi de conservation de l'énergie et de la loi modifiée de conservation de la quasi-impulsion.

A l'état d'équilibre statistique $(\partial f/\partial t)_{\text{ph}}^{\text{coll}} = 0$. Il est aisé de s'assurer, en appliquant la loi de conservation de l'énergie, que la fonction de distribution

$$f_0(\mathbf{p}) = \{e^{(\varepsilon - \mu)/(kT)} + 1\}^{-1}$$

pour les électrons et la fonction de distribution

$$N_0(\mathbf{f}) = \{e^{\hbar\omega/(kT)} - 1\}^{-1}$$

pour les phonons annulent l'intégrale des collisions,

La première de ces fonctions est dite *fonction de distribution de Fermi*, et la seconde, *fonction de distribution de Planck*;

rappelons que

dans le premier cas on dit que les particules obéissent à la *statistique de Fermi-Dirac*, et dans le second cas; qu'elles obéissent à la *statistique de Bose-Einstein*.

Pour trouver la longueur du libre parcours l_{ph} de l'électron due à son interaction avec le réseau, il convient de tenir compte du fait que la fréquence ω du phonon est limitée d'en haut : $\omega \leqslant \omega_0$, où ω_0 est de l'ordre de grandeur de s/a (s étant la vitesse du son et a, la constante de réseau). C'est pourquoi si l'on considère que le réseau est à l'équilibre statistique, il apparaît un paramètre caractéristique $\hbar\omega_0/(kT)$ ou T_D/T, où

$$T_D = \hbar\omega_0/k = \hbar s/(ka)$$

(cette grandeur, appelée *température de Debye*, est de quelques centaines de kelvins), et la longueur de libre parcours devient une fonction de T_D/T.

Le cas le plus simple est celui où $T \gg T_D$. La fonction de Planck se réduit alors à $kT/(\hbar\omega)$ et l'intégrale des collisions $(\partial f/\partial t)_{ph}^{coll}$ devient proportionnelle, et la longueur de libre parcours inversement proportionnelle à la température. Plus exactement, si $T \gg T_D$,

$$l_{ph} \sim \hbar v_0/(kT) \qquad (T \gg T_D).$$

La longueur de libre parcours l_{ph} peut également être évaluée dans le domaine des basses températures : $T \ll T_D$. Dans ce cas elle croît, avec la diminution de la température, plus rapidement que T^{-1}, à savoir comme T^{-5}:

$$l_{ph} \sim \frac{\hbar v_0}{kT}\left(\frac{T_D}{T}\right) \qquad (T \ll T_D).$$

Cela est lié tant à la diminution de l'intensité des vibrations du réseau (pour $T \ll T_D$, le nombre de phonons est proportionnel à $(T/T_D)^3$) qu'à la diminution de l'angle de diffusion effectif de l'électron (il est proportionnel à T/T_D). Dans le domaine des températures intermédiaires, la longueur de parcours l_{ph} varie avec T/T_D suivant une loi complexe que nous n'indiquerons pas ici.

Enfin, considérons le troisième mécanisme de diffusion des électrons dû à leur interaction les uns avec les autres. Les nombres de transitions électroniques $\mathbf{p}, \mathbf{p}' \to \mathbf{p}'', \mathbf{p}'''$ et $\mathbf{p}'', \mathbf{p}''' \to \mathbf{p}, \mathbf{p}'$ sont évidemment proportionnels au produit des largeurs des deux régions de flou pour des électrons aux états $\mathbf{p}, \mathbf{p}'$ (ou $\mathbf{p}'', \mathbf{p}'''$), c'est-à-dire au carré de la température. L'intégrale des collisions correspondant à la diffusion électron-électron est elle aussi proportionnelle à cette quantité. Cela signifie que la longueur de libre parcours l_{el} de l'électron due à l'interaction électron-électron est inversement proportionnelle à T^2. Si l'interaction entre les électrons est considérée comme purement coulombienne,

$$l_{el} \sim \frac{\hbar v_0 \varepsilon_F}{(kT)^2}\left(\frac{\varepsilon_0 \hbar v_0}{e^2}\right)^2 \sim \frac{\hbar v_0 \varepsilon_F}{(kT)^2}.$$

Mais en réalité la longueur de libre parcours des électrons due à leur diffusion les uns sur les autres peut dépasser considérablement cette valeur. Le fait est que l'interaction entre les électrons peut

être beaucoup moins forte que l'interaction purement coulombienne parce que la répulsion coulombienne peut être compensée dans une large mesure par l'attraction due à l'échange de phonons entre les électrons (pour plus de détails sur cet effet v. chap. 13).

Après avoir évalué les longueurs de libre parcours des électrons dans les divers processus d'interaction, nous pouvons maintenant établir comment varie la conductibilité électrique ou la résistivité d'un métal en fonction de la température et de la concentration des impuretés. La résistivité ρ est définie par la formule

$$\rho = \rho_{\text{Im}} + \rho_{\text{ph}} + \rho_{\text{el}},$$

où ρ_{Im}, ρ_{ph}, ρ_{el} sont les contributions apportées à la résistivité dues à la diffusion des électrons par les atomes d'impureté, à la diffusion des électrons par les vibrations du réseau cristallin et à l'interaction des électrons entre eux-mêmes. Elles sont définies par les formules

$$\rho_{\text{Im}} = \frac{m_e v_0}{e^2 n} \frac{1}{l_{\text{Im}}}, \quad \rho_{\text{ph}} = \frac{m_e v_0}{e^2 n} \frac{1}{l_{\text{ph}}}, \quad \rho_{\text{el}} = \frac{m_e v_0}{e^2 n} \frac{1}{l_{\text{el}}}.$$

Pour ce qui est de ρ_{Im}, sa valeur ne dépend pas de la température et se détermine par la concentration $c = n'/n$ des atomes d'impureté :

$$\rho_{\text{Im}} = \frac{p_F}{e^2 Q} c.$$

Comme $Q \sim 10^{-18}$ m^2 et $e^2/(\hbar\varepsilon_0 v_0) \sim 1$, on peut, pour évaluer ρ_{Im}, se servir de la formule $\rho_{\text{Im}} \sim 10^{-14}$ c.

Les valeurs de ρ_{ph} et de ρ_{el} varient de façon notable avec la température et cette variation est différente pour les températures élevées et basses.

Dans le domaine des températures élevées ($T \gg T_D$), $\rho_{\text{ph}} \gg \rho_{\text{el}}$ et en outre

$$\rho_{\text{ph}} \sim \frac{m_e}{\hbar e^2} \frac{kT}{n} \quad (T \gg T_D),$$

c'est-à-dire que ρ_{ph} croît linéairement avec T. Puisque ρ_{Im} est indépendante de la température, un rôle prépondérant pour $T \gg T_D$ est joué par la diffusion des électrons due aux vibrations du réseau cristallin et $\rho \sim T$.

A basses températures ($T \ll T_D$), ρ_{ph} et ρ_{el} dépendent de T (diminuent lorsque T diminue), alors que la résistivité ρ_{Im} est indépendante de la température. C'est pourquoi pour $T \ll T_D$ un rôle primordial est joué par la diffusion des électrons par les atomes d'impureté. La résistivité dont elle est responsable est dite *résiduelle*. Les valeurs de ρ_{ph} et de ρ_{el} pour $T \ll T_D$ peuvent être considérées comme de petits appoints, dus à la température, à la résistivité

résiduelle. Elles sont données par les formules

$$\rho_{ph} \approx \frac{m_e}{\hbar e^2} \frac{kT}{n} \left(\frac{T}{T_D}\right)^4 \quad (T \ll T_D),$$

$$\rho_{el} = \frac{m_e}{\hbar e^2} \frac{(kT)^2}{n\varepsilon_F} \xi \left(\frac{T}{T_D}\right),$$

où $\xi\ (T/T_D)$ est un facteur qui tient compte de la diminution de l'interaction entre les électrons par suite de l'échange de phonons. Si ce facteur était de l'ordre de grandeur de l'unité, l'appoint principal à ρ_{im} pour $T \ll T_D$ serait la résistivité $\rho_{el} \sim T^2$. Mais pour de très nombreux métaux $\xi \ll 1$, de sorte que $\rho_{ph} \gg \rho_{el}$. La courbe de variation typique de ρ en fonction de T est montrée à la figure 9.12. Il est à noter que la résistivité résiduelle, proportionnelle à la concentration des atomes d'impureté, peut servir à juger de la pureté d'un métal : le cas d'un métal pur est représenté sur la figure par la courbe en pointillé.

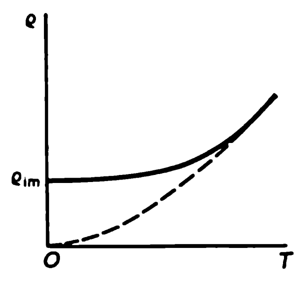


Fig. 9.12. Variation typique de la résistivité d'un métal avec la température

Signalons avant de clore ce paragraphe que les électrons de conduction déterminent non seulement la conductibilité électrique, mais également la conductibilité calorifique des métaux. Mais nous n'étudions pas ici le phénomène de conductibilité calorifique parce qu'il ne se rapporte pas directement aux propriétés électriques et magnétiques de la substance.

§ 9.9. Caractéristiques courant-tension des semi-conducteurs

Le mécanisme de la conductibilité des semi-conducteurs est en principe le même que pour les métaux (dans les deux cas la charge est transportée par les électrons), la cause de la résistance électrique est elle aussi la même : elle est déterminée par les mêmes processus d'interaction des électrons avec le réseau, avec les atomes d'impureté et l'un avec l'autre. Néanmoins, la variation du courant avec la tension, c'est-à-dire la *caractéristique courant-tension* pour les semi-conducteurs, peut différer nettement de la caractéristique analogue pour les métaux (qui est, nous le savons, linéaire et correspond à la loi d'Ohm $I = U/R$).

Cela tient à la différence fondamentale entre les semi-conducteurs et les métaux qui réside en ce que dans les semi-conducteurs la densité de porteurs de charges (électrons et trous) est en général comprise entre 10^{18} et 10^{25} m^{-3} et donc est inférieure de quelques ordres de grandeur à la densité des électrons dans les métaux (dont la valeur caractéristique est de 10^{29} m^{-3}). C'est pourquoi le gaz de porteurs dans

les semi-conducteurs est en règle générale non dégénéré à la différence du gaz électronique dans les métaux qui est dégénéré.

La petitesse de la densité d'électrons dans les semi-conducteurs permet de simplifier pour eux la distribution générale de Fermi $f_0(\mathbf{p}) = (e^{(\varepsilon_p - \mu)/(kT)} + 1)^{-1}$. En effet, dans le cas des semi-conducteurs la fonction de distribution f_0 est petite ($f_0 \ll 1$), ce qui ne peut avoir lieu que si le terme $e^{(\varepsilon_p - \mu)/(kT)}$ est grand par rapport à l'unité. Ainsi, la fonction de distribution en équilibre des porteurs de charges dans les semi-conducteurs est de la forme

$$f_0(\mathbf{p}) \equiv f_M(\mathbf{p}) = e^{(\mu - \varepsilon_p)/(kT)}.$$

Cette formule traduit la *distribution de Maxwell*. Elle peut se récrire sous la forme $f_0(\mathbf{p}) = Ce^{-\varepsilon_p/(kT)}$, où $C \equiv e^{\mu/(kT)}$ est une constante de normalisation qui se détermine (de même que le potentiel chimique μ) à partir de la condition

$$2 \int f_0(\mathbf{p})\, d^3p/(2\pi\hbar)^3 = n_e$$

(n_e étant la densité d'électrons). Si l'énergie d'un électron est proportionnelle au carré de l'impulsion: $\varepsilon_p = p^2/(2m_{eff}) = m_{eff}v^2/2$, où v est la vitesse de l'électron (on dit dans ce cas que *la loi de la diffusion est quadratique* et on appelle *masse effective* la constante m_{eff}), la formule exprimant la distribution de Maxwell est de la même forme que dans la théorie cinétique des gaz:

$$f_0(\mathbf{p}) \backsim e^{-m_{eff}v^2/(2kT)}.$$

Si l'on applique un champ électrique extérieur, la fonction de distribution des électrons sera modifiée. Pour la trouver, il convient d'utiliser l'équation cinématique (v. § 9.7) qui se trouve simplifiée dans le cas des semi-conducteurs: comme $f \ll 1$, les facteurs multiplicatifs de la forme $(1 - f)$ qui tiennent compte du principe de Pauli peuvent être remplacés par l'unité.

En analysant l'équation cinématique pour les électrons dans un métal placé dans un champ constant extérieur $\mathbf{E}$, nous avons considéré que la variation de la fonction de distribution provoquée par le champ était petite et nous avons cherché la fonction de distribution sous la forme de $f = f_0 + \delta f$, où δf est un petit appoint à la fonction en équilibre f_0 variant linéairement avec $\mathbf{E}$. Dans le cas des métaux, une telle manière de procéder est justifiée pratiquement pour tous les champs électriques aussi intenses que l'on veut. Mais dans le cas des semi-conducteurs, une telle approche n'est applicable que pour des champs très faibles parce qu'un champ même modéré déforme notablement la fonction de distribution des électrons. Cela tient tout d'abord à ce qu'en se déplaçant dans un champ électrique l'électron peut acquérir une forte énergie. Cette énergie est de l'ordre de

grandeur de eEl, où l est le libre parcours moyen de l'électron. Une telle expression est valable tant pour les métaux que pour les semi-conducteurs: la seule différence réside dans l'énergie avec laquelle cette quantité doit être comparée.

Dans le cas des métaux elle est à comparer avec l'énergie limite de Fermi ε_F parce que pour la conductibilité n'ont de l'importance que les électrons dont l'énergie est voisine de ε_F. C'est pourquoi le critère de faiblesse du champ dans le cas des métaux est de la forme $eEl \ll \varepsilon_F$ ou $eEl \ll kT_F$, où T_F est la température de dégénérescence. Cette température étant très élevée ($T_F \sim 10^5$ K), les champs inférieurs à $kT_F/(el) \sim 10^9$ V/m (pour fixer les idées nous avons posé $l \sim 10$ nm) doivent être considérés, dans le cas des métaux, comme faibles. Une variation notable subie par la fonction de distribution des électrons dans les métaux soumis à un champ électrique ne doit se produire que pour $E \gtrsim kT_F/(el)$.

Il n'en est plus de même pour les semi-conducteurs. Le gaz électronique n'y est pas dégénéré, et l'énergie eEl acquise par l'électron dans le champ électrique doit être comparée à l'énergie thermique moyenne de l'électron égale à 3/2 kT. Le champ doit être considéré comme faible si $eEl \ll kT$ et comme fort si $eEl > kT$. Le champ faible déforme peu la fonction de distribution alors que le champ intense provoque une grande déformation.

La fonction de distribution des électrons en présence de champ constant **E** affecte la structure suivante:

$$f(\mathbf{p}) = f_0(v) + \frac{\mathbf{v}}{v}\mathbf{f}_1(v),$$

où f_0 et f_1 sont certaines fonctions du module de la vitesse. Dans le cas des champs faibles la fonction $f_0(v)$ coïncide avec la distribution de Maxwell f_M, mais dans le cas des champs intenses, $f_0(v)$ diffère de façon notable de f_M. Cette différence se détermine non seulement par la valeur de l'intensité du champ mais également par le caractère de variation de la longueur de libre parcours en fonction de la vitesse. Lorsque la longueur de parcours est constante, comme lors de la diffusion des électrons par les atomes d'impureté, la fonction f_0 se définit par la formule

$$f_0(v) = Ce^{-[m_{eff}v^2/(2kT_e)]^2},$$

où C est une constante de normalisation et T_e, une température dite électronique et égale à $[m_i/(3m_{eff})]^{1/2}\, eEl$ (m_i étant ici la masse d'un atome d'impureté). Cette quantité détermine l'énergie thermique moyenne de l'électron soumis à l'action du champ électrique extérieur. Dans le cas considéré, elle est beaucoup plus grande que 3/2 kT, où T est la température du réseau cristallin.

Ainsi, dans un champ fort, les électrons peuvent être considérés comme un certain réservoir thermique ayant une température beau-

coup plus élevée que celle du réseau (fig. 9.13, *a*). Une situation analogue peut se produire également pour un gaz soumis à l'action d'un champ électrique ; on obtient dans ce cas des formules tout

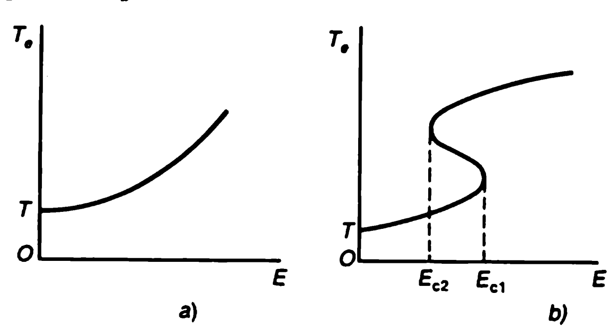


Fig. 9.13. Variation de la température électronique d'un semi-conducteur en fonction de l'intensité de champ appliqué

à fait analogues. La question relative à la température des particules chargées de gaz placé dans un champ électrique sera examinée au § 11.2.

Pour $l = C^{te}$, la fonction vectorielle $\mathbf{f}_1$ est de la forme

$$\mathbf{f}_1 = -\frac{\mathbf{E}}{E}\sqrt{\frac{3m_{eff}}{m_l}}\,\frac{m_{eff}v^2}{kT_e}\,f_0.$$

Elle détermine la densité de courant $\mathbf{j} = 2e\int v\mathbf{f}_1 d^3p/(2\pi\hbar)^3$. Les calculs montrent que

$$j = Cen\frac{eEl}{\sqrt{m_{eff}T_e}},$$

où C est une constante numérique.

Cette formule est très significative. Si nous écrivons la densité de courant sous la forme habituelle $j = \sigma E$, la conductivité électrique aura pour valeur $\sigma = Ce^2nl/\sqrt{m_{eff}T_e}$. Le dénominateur représente ici la vitesse moyenne acquise par l'électron dans le champ électrique. Elle est proportionnelle à $\sqrt{E}$. La conductivité σ varie donc en fonction de l'intensité du champ comme $E^{-1/2}$. Nous voyons que les semi-conducteurs placés dans un champ intense n'obéissent plus à la loi d'Ohm. Lorsque E tend vers l'infini, la conductivité tend vers zéro. Une situation analogue se produit également dans la décharge gazeuse (v. chap. 11). Mais les formules indiquées ne sont pas d'une application universelle : elles ne sont valables que dans l'hypothèse où $l = C^{te}$. Or, en règle générale, la longueur de libre parcours n'est pas constante. C'est pourquoi il n'existe pas de formules universelles pour les fonctions f_0 et $\mathbf{f}_1$: ces fonctions dépendent

notablement de la variation, avec la vitesse, de la longueur de libre parcours de l'électron.

Le problème se complique encore du fait qu'en général la longueur de libre parcours moyen ne suffit pas à elle seule pour décrire la conductibilité électrique des semi-conducteurs et déterminer leurs caractéristiques courant-tension. A proprement parler, cette remarque s'applique aussi à la conductibilité des métaux parce que l'équation cinématique générale des électrons fait intervenir les intégrales des collisions déterminées par les probabilités de divers processus d'interaction des électrons. Lorsque nous avons écrit la formule de Drude, qui comprend le temps moyen de libre parcours de l'électron, nous avons cherché à déterminer avant tout l'aspect qualitatif de la conductibilité électrique. Mais en réalité, si l'on désire préciser la situation, on doit dire que dans la formule de Drude entre la probabilité moyenne de variation en 1 s de la direction de l'impulsion de l'électron qui ne doit en général pas être confondue avec la probabilité moyenne de variation de l'énergie de l'électron.

Si l'on considère des champs faibles, la température du gaz électronique dans un semi-conducteur ne diffère pas de la température du réseau cristallin, si bien que la conductivité est donnée par la formule de Drude $\sigma = e^2 n\tau/m_{eff}$ dans laquelle il faut entendre par τ l'inverse de la probabilité moyenne du processus de variation en 1 s de la direction de l'impulsion de l'électron. Cette quantité est fonction de la température T_e du gaz électronique qui coïncide. dans le cas des champs faibles, avec la température du réseau. C'est pourquoi nous obtenons la loi d'Ohm $j = \sigma E$ dans laquelle la conductivité σ est indépendante de E.

Qu'arrivera-t-il si le champ devient intense ? La température T_e des électrons deviendra fonction de l'intensité E du champ, ce qui signifie que la quantité $\tau \equiv \tau(T_e)$, c'est-à-dire le temps de relaxation des électrons suivant l'impulsion, commencera à dépendre du champ, la conductivité σ deviendra fonction du champ et donc la loi d'Ohm cessera d'être valable. Quant à la formule

$$\sigma \equiv \sigma(T_e) = \frac{e^2 n}{m_{eff}} \tau(T_e),$$

elle restera valable.

La question est maintenant de trouver ce qui détermine la température des électrons. Cette température se détermine par le bilan entre l'énergie reçue par l'électron de la part du champ et l'énergie qu'il cède lors de la diffusion sur les atomes d'impureté ou sur les vibrations du réseau.

L'énergie reçue par l'électron de la part du champ en 1 s a pour expression

$$\mathbf{jE}/n = \sigma E^2/n = e^2 E^2 \tau(T_e)/m_{eff}.$$

L'énergie moyenne de l'électron $\langle\varepsilon\rangle$ est égale à $3/2\ kT_e$. C'est pourquoi l'énergie perdue en 1 s est égale à $3/2\ k\ (T_e - T)/(\tau_\varepsilon\ (T_e))$, où $1/\tau_\varepsilon$ est la probabilité de transfert de l'énergie en 1 s. L'équation du bilan énergétique est de la forme

$$\frac{d}{dt}\langle\varepsilon\rangle = \frac{e^2E^2\tau(T_e)}{m_{eff}} - \frac{3k(T_e-T)}{2\tau_\varepsilon(T_e)}.$$

Dans le cas stationnaire $d\langle\varepsilon\rangle/dt = 0$ et nous obtenons l'équation suivante pour déterminer la température électronique en fonction de l'intensité du champ E:

$$\frac{e^2E^2\tau(T_e)}{m_{eff}} = \frac{3k(T_e-T)}{2\tau_\varepsilon(T_e)}.$$

La détermination de T_e à partir de cette équation exige que l'on connaisse les fonctions $\tau(T_e)$ et $\tau_\varepsilon(T_e)$. Ces fonctions se déterminent

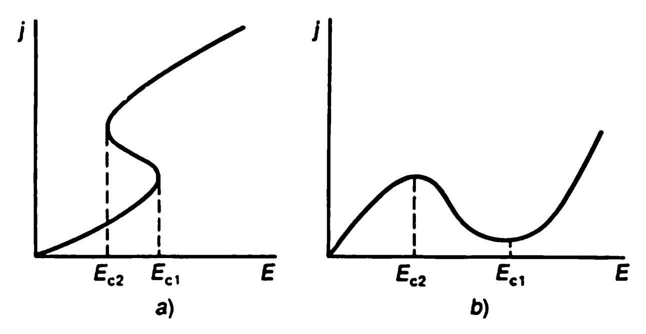


Fig. 9.14. Variation de la densité de courant dans un semi-conducteur en fonction de l'intensité de champ appliqué

par des mécanismes concrets de diffusion des électrons et sont généralement approchées par des fonctions puissances $\tau_\varepsilon \sim T_e^s$, $\tau \sim T_e^q$. Les exposants ont les valeurs suivantes: pour l'interaction avec les vibrations acoustiques dans des cristaux ordinaires $s = q = -1/2$ et dans des cristaux piézoélectriques $s = q = 1/2$; pour la diffusion sur une impureté chargée $q = 3/2$ et sur une impureté neutre $q = 0$ (le transfert de l'énergie lors de la diffusion sur une impureté est proportionnel à m_{eff}/m_i et de ce fait est négligeable).

Fait important: l'équation obtenue pour la détermination de T_e (pour une valeur donnée de E) peut avoir plusieurs solutions, ce qui signifie que la densité de courant est une fonction multivoque de l'intensité du champ. Par exemple, une situation peut se produire lorsque dans un certain intervalle de champs $E_{c2} < E < E_{c1}$ la température T_e devient une fonction trivalente de E. Dans un tel cas la densité de courant est elle aussi une fonction trivalente de l'intensité du champ et nous obtenons une *caractéristique courant-tension* dite *en* S (fig. 9.13, *b*, 9.14, *a*). Pour les faibles valeurs de E,

elle comporte une partie rectiligne correspondant à la loi d'Ohm. Mais elle présente aussi une partie dans laquelle la densité de courant diminue lorsque l'intensité du champ augmente, c'est-à-dire une partie pour laquelle la conductivité différentielle $\sigma_d = \mathrm{d}j/\mathrm{d}E$ est négative.

La formule donnant la conductivité différentielle est facile à obtenir

$$\sigma_d = \frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}E} = \sigma \frac{1-\left(1-\frac{T}{T_e}\right)\frac{\mathrm{d}\ln(\tau_\varepsilon/\tau)}{\mathrm{d}\ln T_e}}{1-\left(1-\frac{T}{T_e}\right)\frac{\mathrm{d}\ln(\tau_\varepsilon\tau)}{\mathrm{d}\ln T_e}}$$

(σ étant la conductivité dans un champ faible). Cette fonction peut prendre, pour une forme appropriée des fonctions $\tau\ (T_e)$ et $\tau_\varepsilon\ (T_e)$ et des champs E_{c1} et E_{c2} suffisamment intenses, une valeur infiniment grande et comporter, dans la région de $E_{c2} < E < E_{c1}$, une branche de $\sigma_d < 0$. C'est dans ce cas que nous obtenons une caractéristique courant-tension en S. La condition de son apparition est de la forme

$$\frac{\mathrm{d}\,(\ln \tau\tau_\varepsilon)}{\mathrm{d}\ln T_e} > \frac{T_e}{T_e-T} > 1.$$

Un tel mécanisme de formation de la caractéristique en S a été observé, par exemple, dans le semi-conducteur InSb de type *n*. L'impulsion des porteurs de courant était transmise principalement à l'impureté chargée ($q = 3/2$), et leur énergie aux vibrations acoustiques ($s = 1/2$ parce que le cristal considéré est un corps piézoélectrique).

Les semi-conducteurs peuvent présenter également une *caractéristique courant-tension en* N (fig. 9.14, *b*). Dans ce cas la conductivité différentielle σ_d change de signe pour $E = E_{c1}$ et $E = E_{c2}$ et s'annule au lieu de devenir infiniment grande. La condition nécessaire à l'apparition d'une caractéristique en N est de la forme

$$\frac{\mathrm{d}\ln(\tau_\varepsilon/\tau)}{\mathrm{d}\ln T_e} > \frac{T_e}{T_e-T} > 1.$$

Il en résulte en particulier que doit être vérifiée l'inégalité $s - q > 1$.

Nous avons examiné un des mécanismes qui conduisent à la non-observation de la loi d'Ohm dans les semi-conducteurs. On l'appelle *mécanisme de surchauffe*. Il existe d'autres mécanismes, par exemple, le *mécanisme de concentration* qui consiste en ce que le champ électrique appliqué modifie la concentration des porteurs de charges. C'est par le mécanisme de concentration qu'on explique en particulier la caractéristique courant-tension en N que possède le germanium dopé au cuivre.

Les semi-conducteurs ayant une caractéristique courant-tension en N sont largement utilisés pour la production d'oscillations de très hautes fréquences (plusieurs dizaines de gigahertz). L'énergie du champ à haute fréquence dans de tels oscillateurs est fournie par le champ électrique constant dont l'intensité doit être comprise dans le domaine de la conductivité différentielle négative : $E_{c2} < E < E_{c1}$ (en général de 10^2 à 10^5 V/m).

Les semi-conducteurs à caractéristique courant-tension en S sont utilisés comme dispositifs de commutation, par exemple, dans les mémoires des calculateurs électroniques. Leur avantage réside dans le très petit temps de passage d'une branche de la caractéristique courant-tension à une autre (près de 10^{-10} s).

FORMULES FONDAMENTALES

Distribution de Fermi-Dirac $$f = \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/(kT)}+1}$$

Distribution de Bose-Einstein (pour les phonons ou les photons) $$N = \frac{1}{e^{\hbar\omega/(kT)}-1}$$

Courant d'émission thermoélectronique (formule de Richardson-Dushmann) $$j_s = CT^2 e^{-\Phi/(kT)}$$

Température de dégénérescence du gaz électronique $$T_F = (3\pi^2)^{2/3}\frac{\hbar^2 n^{2/3}}{2mk}$$

Capacité calorifique du gaz électronique (rapportée à un électron) $$c \sim kT/T_F$$

Equation cinématique pour les électrons $$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^{\text{coll}}$$

Formule de Drude $$\sigma = \frac{e^2 n}{m}\tau, \quad \tau = \frac{l}{v_0}, \quad \frac{1}{l} = \sum_i \frac{1}{l_i}, \quad l_i = v_0\tau_i$$

Longueur de libre parcours de l'électron par rapport à l'interaction avec le réseau $$l_{ph} = \begin{cases} \hbar v_0/(kT) & (T \gg T_D) \\ \dfrac{\hbar v_0}{kT}\left(\dfrac{T_D}{T}\right)^4 & (T \ll T_D) \end{cases}$$

Longueur de libre parcours de l'électron par rapport à l'interaction avec les électrons $$l_{ee} = \frac{\hbar v_0 \varepsilon_F}{(kT)^2}$$

Longueur de libre parcours de l'électron par rapport à la diffusion par les atomes d'impureté	$l_{\text{im}} = \frac{1}{Qn'}$
Température électronique dans un champ électrique	$T_e = \left(\frac{m_l}{3m_e}\right)^{1/2} eEl$
Conductivité électrique dans un champ électrique fort	$\sigma \equiv \sigma(T_e) = \frac{e^2 n}{m} \tau(T_e)$

CHAPITRE 10

ÉLECTROLYTES

§ 10.1. Electrolytes forts et faibles

Si on dissout du sel de cuisine dans l'eau, ses molécules sont dissociées en ions positifs Na^+ et ions négatifs Cl^-. Aussi, en plongeant deux électrodes métalliques dans une telle solution et en les reliant à une source de f.é.m. (fig. 10.1), obtient-on un circuit électrique qui sera parcouru par un courant électrique. Il est clair que les ions négatifs (anions) Cl^- se déplaceront vers l'électrode positive appelée anode et les ions positifs (cations) Na^+ vers l'électrode négative appelée cathode. Cette propriété de conductibilité électrique est caractéristique non seulement de la solution de NaCl mais également des solutions d'autres sels ainsi que des solutions d'acides et de bases. De telles substances sont appelées *électrolytes* et la *conductibilité* qu'elles assurent est dite *électrolytique.*

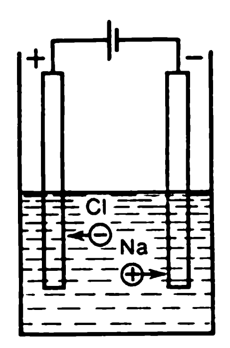


Fig. 10.1. Conductibilité électrolytique

A la différence des métaux qui présentent la conductibilité par électrons,

dans les solutions d'électrolytes le courant est constitué par un mouvement ordonné des ions qui apparaissent par suite de la décomposition ou de la dissociation des molécules d'électrolyte dans la solution.

Le processus de dissociation des molécules est tout à fait naturel parce que le déroulement de toute réaction chimique $A + B \rightarrow C$ s'accompagne toujours d'une réaction inverse $C \rightarrow A + B$. C'est pourquoi, si une molécule se forme par suite de la réunion des ions de signes contraires, on doit toujours avoir à côté des molécules neutres des ions qui les composent.

Fait remarquable, dans certains cas on constate la dissociation de la quasi-totalité des molécules. Il en est ainsi pour les solutions aqueuses de nombreux sels, d'acides et de bases forts (à condition que la solution ne soit pas trop concentrée). De telles substances qui se dissocient très fortement dans une solution sont appelées *électrolytes forts.* Par contre, les acides et les bases faibles, par exemple les amines, les phénols, la plupart des acides organiques, certains

acides et bases inorganiques (par exemple, l'acide cyanhydrique, le hydroxyde d'ammonium) ainsi que certains sels, par exemple, le chlorure mercurique et le cyanure mercureux, ne se dissocient que très faiblement pour des concentrations usuelles. Ces substances portent le nom d'*électrolytes faibles.* Les sels d'acides faibles et de bases fortes ou de bases faibles et d'acides forts ainsi que les sels d'acide faible et de base faible sont en règle générale des électrolytes forts.

Il est clair que la dissolution d'un électrolyte dans l'eau doit favoriser la dissociation de ses molécules. Le fait est que l'eau a une permittivité diélectrique élevée ($\varepsilon \approx 80$), de sorte que la force d'interaction entre les ions de la molécule d'électrolyte se trouvant dans l'eau est affaiblie de 80 fois environ.

Remarquons toutefois que dans certains cas la permittivité du dissolvant ne joue qu'un rôle secondaire. Par exemple, l'hydrogène chloré se dissout dans l'alcool éthylique et constitue un électrolyte fort, alors que la solution du même hydrogène chloré dans le nitrobenzène, dont la permittivité diélectrique est presque la même que celle de l'alcool éthylique, est un électrolyte faible. Une circonstance importante qui intervient ici est que la molécule d'alcool éthylique se réunit facilement avec un ion hydrogène en formant un ion complexe $C_2H_5OH_2^+$ qui constitue précisément la forme d'existence de l'ion hydrogène dans une solution alcoolique. Quant au nitrobenzène, il ne forme pas un tel composé, de sorte que le degré de dissociation est faible et la solution de l'hydrogène chloré dans le nitrobenzène est un électrolyte faible. Comme les molécules d'électrolytes forts sont presque totalement dissociées dans les solutions, ce sont les ions distincts et non les molécules qui participent aux réactions entre les électrolytes forts se déroulant dans des solutions.

A la différence des électrolytes forts dont presque toutes les molécules sont dissociées mêmes dans des solutions de très forte concentration, le degré de dissociation des électrolytes faibles varie dans des proportions considérables en fonction de la concentration de la solution: il augmente lorsque la concentration diminue. Pour mettre en évidence cette variation, appliquons la *loi d'action de masse.* Donnons la formulation de cette loi. Soit une réaction chimique quelconque $\nu_1 A_1 + \nu_2 A_2 + \ldots = \nu_1' A_1' + \nu_2' A_2' + \ldots$, où $A_1, A_2, \ldots$ sont les symboles des substances chimiques réagissantes, $A_1', A_2', \ldots$, les symboles des substances formées et $\nu_1, \nu_2, \ldots; \nu_1', \nu_2', \ldots$, des entiers indiquant le nombre de molécules participant à la réaction. (Par exemple, pour la réaction $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$ on a $\nu_{H_2} = 2$, $\nu_{O_2} = 1$, $\nu'_{H_2O} = 2$.) Si la réaction se produit dans un mélange de gaz parfaits, on a, après l'établissement de l'équilibre, la relation

$$\frac{[A_1]^{\nu_1} [A_2]^{\nu_2} \ldots}{[A_1']^{\nu_1'} [A_2']^{\nu_2'} \ldots} = K(p, T),$$

où $[A_i]$, $[A_i']$ sont les concentrations des substances correspondantes,

$$K(p, T) = p^{-(\nu_1+\nu_2+\ldots-\nu_1'-\nu_2'\ldots)} K(T),$$

p est la pression et $K(T)$, une quantité dépendant uniquement de la température et appelée *constante d'équilibre chimique.* En particulier, pour un gaz à capacité calorifique constante $K(T) = K_0 T^n e^{-w/(kT)}$, où K_0, n et w sont des constantes. La loi d'action de masse est également valable pour des réactions entre

les substances dissoutes si la solution est faible, mais dans ce cas K (p, T) varie avec la pression suivant une loi plus complexe.

Appliquons la loi d'action de masse à la réaction de dissociation $M \to A^+ + B^-$ d'une molécule M en ions A^+ et B^-; nous obtenons $[A^+] [B^-]/[M] = K$. Soit c le nombre total de moles dissoutes dans un litre d'eau; alors $[A^+] = [B^-] = \alpha c$, $[M] = (1 - \alpha) c$, où α s'appelle *degré de dissociation*. Dès lors, $c\alpha^2/(1 - \alpha) = K$, d'où

$$\alpha = 2K (K + \sqrt{K^2 + 4Kc})^{-1}.$$

Nous voyons que le degré de dissociation augmente lorsque la concentration diminue et tend vers l'unité pour $c \to 0$.

§ 10.2. Electrolyse

Examinons maintenant de plus près comment le courant électrique passe par une solution d'électrolyte. Puisque pour permettre le passage du courant on utilise toujours des électrodes métalliques plongées dans une solution d'électrolyte, le circuit électrique comprend non seulement la solution d'électrolyte mais également des conducteurs métalliques, les porteurs de charges dans ces deux portions étant différents: les ions dans la solution et les électrons dans le métal. Cela entraîne des conséquences importantes. En effet, les ions libres contenus dans la solution d'électrolyte ne peuvent pas passer à travers le métal, alors que les électrons du métal ne peuvent pas se déplacer dans l'électrolyte. Mais le courant étant constitué par un mouvement continu de la charge électrique, il doit se produire à la surface frontière entre les conducteurs électronique et ionique une transformation importante, une sorte de « changement d'habits » des ions: sur la surface de l'anode les anions doivent céder leurs électrons en excès à l'anode pour se transformer en atomes (ou groupes d'atomes) neutres, alors que sur la surface de la cathode les cations doivent recevoir des électrons supplémentaires pour se transformer eux aussi en atomes neutres. C'est seulement par suite d'une telle transformation que le courant ionique total dans l'électrolyte sera égal au courant électronique total dans la portion métallique du circuit. Ainsi,

le passage du courant électrique dans un circuit comprenant des conducteurs électroniques et ioniques doit s'accompagner de la décomposition chimique de l'électrolyte.

Ce remarquable phénomène de décomposition chimique par le courant électrique a reçu le nom d'*électrolyse* (il a été découvert par Faraday en 1833).

Il n'est pas difficile de déterminer la quantité des substances déposées sur les électrodes pendant l'électrolyse. A cet effet, il suffit d'appliquer la loi de conservation de la charge. Considérons des ions de charge ze (z étant la valence et e, la charge élémentaire). Il est clair que si le circuit est traversé par une charge Q, le nombre

total d'ions arrivant à chacune des électrodes sera égal à $Q/(ze)$. Prenons maintenant une mole d'ions, elle contient $N_0 = 6{,}02 \times \times 10^{23}$ ions. Cela signifie que sur chacune des électrodes seront déposées $Q/(zeN_0)$ moles d'ions, c'est-à-dire $Q/(zeN_0)$ moles d'atomes de substance neutre. Si A est la masse de l'atome de cette substance, la quantité, en grammes, de substance déposée sur l'électrode par le passage de la charge Q sera $M_A = AQ/(zeN_0)$. La quantité eN_0 entrant dans cette relation est une constante universelle, égale à la charge d'une mole d'électrons (ou d'une mole de protons). Elle est notée F et appelée *constante de Faraday*. Cette charge est égale à $F = eN_0 = 96484$ C/mol. En remarquant que $Q = It$, où I est l'intensité du courant qui parcourt le circuit pendant un temps t, on peut récrire l'expression de M_A sous la forme

$$M_A = \frac{A}{z} \frac{It}{F}.$$

Cette relation est connue sous le nom de *loi de l'électrolyse de Faraday*.

§ 10.3. Conductibilité électrique des solutions

Proposons-nous maintenant d'étudier le mécanisme de la conductibilité électrique des solutions d'électrolytes.

Si une solution est soumise à un champ électrique constant $\mathbf{E}$, un ion d'espèce a, de charge ez_a, subit une force $ez_a\mathbf{E}$. Mais il est évident que la vitesse de l'ion ne peut pas croître indéfiniment parce que le mouvement de l'ion se fait avec frottement. La force de frottement est proportionnelle à la vitesse $\mathbf{v}_a$ de l'ion, c'est-à-dire qu'elle peut être représentée sous la forme $\gamma_a\mathbf{v}_a$, où γ_a est le coefficient de frottement. Par suite de l'action conjuguée de la force électrique et de la force de frottement il s'établit un mouvement stationnaire de l'ion, pour lequel la force résultante est nulle: $ez_a\mathbf{E} - \gamma_a\mathbf{v}_a = 0$. Il en résulte que $\mathbf{v}_a = b_a ez_a\mathbf{E}$, où $b_a = 1/\gamma_a$. Ainsi, les ions se déplacent avec une vitesse constante proportionnelle à la force électrique qui leur est appliquée. Le coefficient de proportionnalité b_a s'appelle *mobilité* de l'ion.

Les vitesses des ions sont en règle générale peu élevées. Par exemple, pour un champ de 0,01 $V \cdot m^{-1}$ et une température de 25 °C, la plupart des ions se déplacent dans l'eau avec une vitesse de l'ordre de $5 \cdot 10^{-6}$ $m \cdot s^{-1}$. Une exception doit être faite pour l'hydrogène dont l'ion se déplace avec une vitesse de $36{,}2 \cdot 10^{-6}$ $m \cdot s^{-1}$.

Si nous multiplions la vitesse $\mathbf{v}_a$ par $ez_a n_a$, où n_a est la concentration des ions d'espèce a, nous trouvons la densité de courant dû à ces ions. La densité totale de courant s'exprime donc par

$$\mathbf{j} = \sum_a ez_a n_a \mathbf{v}_a = \sum_a b_a (ez_a)^2 n_a \mathbf{E}.$$

Nous voyons que *la densité de courant est proportionnelle à l'intensité de champ appliquée*, c'est-à-dire que les solutions d'électrolytes obéissent à la loi d'Ohm et leur conductivité électrique est donnée par la formule

$$\sigma = \sum_{a} b_a (ez_a)^2 n_a,$$

où la sommation est étendue à toutes les espèces d'ions. Dans le cas le plus simple d'un électrolyte dont les molécules se dissocient en deux ions monovalents, cette formule donne $\sigma = e^2 (b_+ n_+ + b_- n_-)$, où $n_+ = n_-$ sont les concentrations des ions de chaque signe et b_+ et b_- leurs mobilités.

Sous cette forme générale la formule est valable tant pour les électrolytes faibles que pour les électrolytes fortes mais elle conduit à des lois différentes de variation de la conductivité en fonction de la concentration de la solution pour les deux types d'électrolytes.

Considérons d'abord les solutions d'électrolytes faibles. Il est évident que pour ces solutions $n_+ = n_- = \alpha c N_0$, où α est le degré de dissociation et c, la concentration molaire, c'est-à-dire le nombre de moles de soluté contenues dans l'unité de volume de la solution. La conductivité électrique d'un électrolyte faible se définit donc par la formule

$$\sigma = e^2 \alpha c N_0 (b_+ + b_-),$$

où le degré de dissociation est, conformément aux résultats du § 10.1, fonction de la concentration

$$\alpha = 2K (K + \sqrt{K^2 + 4Kc})^{-1}.$$

Quant aux mobilités b_+ et b_-, elles peuvent être considérées dans le cas d'une solution faible comme indépendantes de la concentration c. En électrochimie on utilise souvent la notion de *conductivité électrique équivalente* $\sigma' = \sigma/c$. Cette quantité dépend de la concentration de la même façon que le degré de dissociation. Dans le cas d'une dilution infinie ($c \to 0$) le degré de dissociation tend vers l'unité, si bien que $\sigma'_{c\to 0} \to e^2 N_0 (b_+ + b_-)$.

Passons maintenant aux solutions d'électrolytes forts. Pour ces solutions le degré de dissociation est égal à l'unité (jusqu'à des concentrations très fortes), mais les mobilités ne peuvent plus être considérées comme indépendantes de la concentration. En effet, il en serait ainsi si la mobilité n'était déterminée que par la force de frottement exercée sur les ions de la part des molécules du solvant. Mais dans le cas des solutions d'électrolytes forts, lorsqu'il y a beaucoup d'ions, il devient nécessaire de tenir compte de l'interaction entre les ions qui conduit à un frottement supplémentaire des ions. Le mécanisme de ce frottement est lié au fait que chacun des ions de l'électrolyte est entouré de l'atmosphère constituée par les ions de signe contraire qu'il « entraîne » lors de son mouvement. Mais le champ électrique exerce sur cette atmosphère une force dirigée en sens opposé à la force agissant sur l'ion central d'où il résulte une force de frottement additionnelle de l'ion que l'on appelle *force électrophorétique*.

Pour calculer cette force, il faut déterminer les dimensions de l'atmosphère ionique qui entoure un ion donné. En supposant que les ions dans l'électrolyte sont en équilibre thermique, nous devons admettre que 1 m³ de volume contient suivant la distribution de

Boltzmann

$$n_i(\mathbf{r}) = n_{i0} e^{-q_i \varphi(\mathbf{r})/(kT)}$$

ions d'espèce i (ici, $\varphi(\mathbf{r})$ est le potentiel électrostatique, q_i, la charge de l'ion et n_{i0}, une constante). L'énergie électrique d'un ion est petite par rapport à son énergie thermique: $q\varphi \sim q^2/(4\pi\varepsilon_0 \langle \mathbf{r} \rangle) \ll \ll kT$ ($\langle \mathbf{r} \rangle \sim n^{-1/3}$ est la distance moyenne entre les ions). Cela permet de développer l'exponentielle de Boltzmann en série

$$n_i(\mathbf{r}) = n_{i0}\left[1 - q_i \varphi(\mathbf{r})/(kT)\right].$$

Cherchons maintenant la densité volumique de charge $\rho = = \sum_i q_i n_i$. En tenant compte que la solution est dans son ensemble électriquement neutre, c'est-à-dire que $\sum_i q_i n_{i0} = 0$, nous obtenons $\rho = -\varphi/(kT) \sum_i q_i^2 n_{i0}$. En introduisant cette expression dans l'équation de Poisson $\varepsilon_0 \Delta\varphi = -\rho$, nous obtenons

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r_D^2}\varphi; \quad r_D^2 = \frac{\varepsilon_0 kT}{\sum_i q_i^2 n_{i0}}.$$

La quantité r_D s'appelle *rayon* ou *longueur de Debye*. La condition de petitesse de l'énergie électrique que nous avons utilisée prend en termes de r_D la forme $\langle r \rangle \ll r_D$; une sphère de rayon de Debye doit contenir un grand nombre d'ions.

Résolvons l'équation ainsi obtenue par rapport à φ. A cet effet, tenons compte du fait que la distribution des ions dans l'atmosphère présente une symétrie sphérique, il vient

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\varphi}{dr}\right).$$

Il en résulte que $\varphi = C^{te} \cdot \frac{1}{r} e^{-r/r_D}$. Mais au voisinage de l'ion ($r \to 0$) le potentiel ne peut pas être différent du potentiel coulombien, si bien que $C^{te} = q_i$, où q_i est la charge de l'ion considéré. Ainsi l'ion produit un potentiel

$$\varphi = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r} e^{-r/r_D}.$$

On l'appelle *potentiel sous écran* puisqu'il n'est notablement différent de zéro qu'à des distances non supérieures à r_D (pour cette raison la longueur de Debye elle-même est parfois appelée *longueur d'écran*).

Nous voyons que les dimensions de l'atmosphère ionique sont de l'ordre de grandeur de r_D. En considérant cette atmosphère comme une bille de rayon r_D se déplaçant dans un milieu de viscosité η, on peut trouver à l'aide de la

formule de Stokes la vitesse u de cette bille : $u = q_i E / (6\pi\eta r_D)$, où $q_i E$ est la force agissant sur l'ion. En multipliant cette vitesse par le coefficient de frottement γ dû à un solvant pur, nous obtenons la force électrophorétique :

$$f = \frac{-\gamma}{6\pi\eta r_D} q_i E.$$

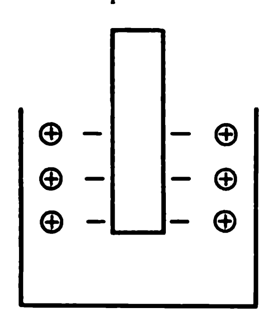
L'action de la force électrophorétique a pour effet de réduire la mobilité de l'ion et cette réduction se trouve proportionnelle à r_D^{-1}, c'est-à-dire à la racine carrée de la concentration. La diminution de la mobilité conduit à son tour à une diminution de la conductivité effective de la solution d'un électrolyte fort qui peut être représentée sous la forme suivante :

$$\sigma' = \sigma_0' \left(1 - \sqrt{\frac{c}{c_0}}\right),$$

où σ_0' est la conductivité effective en cas d'une dilution infinie ($c \to 0$) de la solution et c_0, une certaine constante que nous ne définissons pas ici.

§ 10.4. Piles hydro-électriques

Nous avons montré au chapitre 9 qu'entre deux métaux ou deux semi-conducteurs mis en contact il apparaît toujours une différence de potentiel bien déterminée (différence de potentiel de contact). Il est facile de voir qu'une différence de potentiel de contact doit apparaître également sur la surface frontière entre un métal et une solution d'électrolyte ainsi que sur la frontière entre deux solutions d'électrolytes. En effet, si le métal est plongé dans l'eau (ou une solution d'électrolyte), le réseau de la partie superficielle du métal, en contact avec l'eau, se dissocie si bien que les ions chargés positivement s'en vont au solvant alors que le métal lui-même se charge négativement parce qu'il s'y forme un excès d'électrons. Ce processus de dissociation ne conduit pourtant pas à une dissolution complète du métal parce que ses ions positifs, se trouvant dans la solution, produisent en combinaison avec le métal chargé négativement un champ électrique qui est dirigé vers l'intérieur du métal et donc s'oppose au passage des ions dans la solution. On peut dire que sur la surface du métal il apparaît un dipôle électrique ou, plus exactement, une couche double d'électricité (fig. 10.2) dont le champ contrarie le départ des ions du métal. Il s'établit finalement un état d'équilibre caractérisé par une certaine densité des ions dans la solution, à laquelle correspond une différence de potentiel bien déterminée entre le métal et la solution aqueuse de ses ions (ou entre le métal et la solution d'électrolyte dans laquelle est plongé le métal) ; cette différence de potentiel (on l'appelle *potentiel d'électrode*) est analogue à la différence de potentiel de contact qui apparaît sur la surface de séparation de deux métaux. On explique de même la différence de potentiel qui apparaît sur la surface de séparation de deux solutions d'électrolytes en contact. Les potentiels d'électrode sont en général variables d'un métal à un autre. C'est pourquoi, si l'on plonge dans une solution d'électrolyte quelconque deux métaux différents, leurs potentiels seront différents et un champ électrique prendra naissance entre ces métaux.


Fig. 10.2. Couche électronique bipolaire sur la surface d'un métal plongé dans une solution d'électrolyte

Nous avons vu au chapitre 9 que dans un circuit fermé constitué par des métaux différents portés à une même température, la somme de toutes les dif-

férences de potentiel de contact est nulle. Mais si un circuit fermé comprend des métaux et des solutions d'électrolytes, la somme de toutes les différences de potentiel de contact est différente de zéro même dans le cas où toutes les portions du circuit sont à la même température. En effet, la somme de toutes les différences de potentiel de contact, c'est-à-dire des f.é.m. agissant dans le circuit, représente le travail des forces du champ électrique (qui apparaît entre les conducteurs en contact) dans le déplacement d'une charge unité le long du circuit fermé. Si un électron se déplace le long d'un circuit fermé constitué uniquement par des métaux ayant la même température, aucune transformation interne ne se produit dans le circuit, c'est-à-dire que l'énergie ne varie pas et donc le travail total des forces du champ électrique est nul. Par contre, le déplacement de la charge dans un circuit comprenant tant des métaux que des solutions d'électrolytes s'accompagne, comme nous l'avons vu lors de l'étude de l'électrolyse, d'une réaction chimique. Dans ce cas l'énergie du système subit une variation et par conséquent le travail des forces du champ peut être différent de zéro.

L'existence d'une f.é.m. non nulle signifie que

les circuits fermés comprenant des conducteurs métalliques et électrolytiques peuvent être parcourus spontanément, c'est-à-dire sans l'intermédiaire d'aucun dispositif additionnel extérieur, par des courants électriques.

De tels circuits sont désignés sous le terme commun de *piles hydro-électriques*. La pile la plus simple est celle de Volta (on dit aussi élément Volta) dont les électrodes, l'une en zinc et l'autre en cuivre, sont plongées dans l'acide sulfurique dilué, ce qui s'écrit sous la forme $Zn^- | H_2SO_4 | Cu^+$. Lorsque les électrodes sont reliées entre elles, le circuit est parcouru par un courant électrique circulant dans le sens de l'électrode de cuivre (anode) vers l'électrode de zinc (cathode).

FORMULES FONDAMENTALES

Loi de l'électrolyse	$M_A = \frac{A}{z}\frac{It}{F}$, $F = 96\,484$ C/mol
Conductivité électrique d'une solution	$\sigma = \sum_a b_a (ez_a)^2 n_a$
Conductivité électrique d'un électrolyte faible	$\sigma = e^2\alpha c N_0 (b_+ + b_-)$, $\alpha = \frac{2K}{K+\sqrt{K^2+4Kc}}$
Potentiel produit par un ion dans une solution (ou dans un plasma)	$\varphi = \frac{ez_a}{4\pi\varepsilon_0 r} e^{-r/r_D}$
Rayon de Debye	$r_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 kT}{\sum_a e^2 z_a^2 n_{a0}}}$

CHAPITRE 11

DÉCHARGE ÉLECTRIQUE DANS LES GAZ

§ 11.1. Courant anodique

Les gaz purs sont des isolants parfaits. Si on leur applique un champ électrique continu, ils ne seront parcourus par aucun courant électrique parce que les molécules neutres constituant le gaz ne subiront qu'une légère déformation ou rotation mais ne seront pas animées d'un mouvement de translation.

La situation change si l'on introduit dans le gaz des particules chargées étrangères: elles commencent à se déplacer sous l'effet du champ électrique appliqué au gaz, si bien qu'un courant électrique prend naissance dans le gaz. Si le champ appliqué est suffisamment intense, les particules chargées étrangères, introduites dans le gaz, gagnent dans ce champ assez d'énergie pour pouvoir ioniser les molécules neutres de gaz, c'est-à-dire pour leur arracher un ou plusieurs électrons. Il en résulte qu'en plus des porteurs de charges introduits, le gaz devient le siège des porteurs de charges propres, des électrons et des ions positifs. En se déplaçant dans le champ électrique, ces derniers peuvent à leur tour ioniser les molécules de gaz, c'est-à-dire produire des électrons et des ions secondaires; les particules secondaires peuvent produire des particules tertiaires, etc. Ainsi, la croissance du nombre de porteurs de charges intrinsèques peut en principe prendre l'allure d'une avalanche, par conséquent, le courant dans le gaz croît lui aussi en avalanche.

Le passage du courant dans un gaz s'appelle *décharge électrique* ou *décharge gazeuse*. Si la décharge n'est liée qu'à des porteurs de charges extérieurs, elle est dite *non autonome*. Si, par suite de la croissance en avalanche du nombre de porteurs de charges, la décharge peut s'amorcer quelque petite que soit la charge germe extérieure, elle est dite *autonome* ou *entretenue*.

Commençons par déterminer l'intensité de courant lors du mouvement d'une charge individuelle à travers l'intervalle de gaz ou de vide d'un circuit électrique. Il semble à première vue que le courant instantané dans le circuit est nul pendant toute la durée de mouvement de la particule entre les électrodes et qu'une impulsion de courant n'apparaît que lorsque la particule atteint l'électrode et lui cède sa charge. Or, en réalité il n'en est pas ainsi: l'induction

électrostatique fait apparaître sur les électrodes des charges induites qui se déplacent dans la portion extérieure du circuit lorsque la particule se déplace dans l'intervalle de décharge.

Cherchons l'intensité de courant I. A cet effet, égalons le travail $\mathcal{E}I$ effectué en 1 s par la source extérieure de f.é.m. $\mathcal{E}$ à la variation, pendant le même temps, de l'énergie $e\mathbf{E}\mathbf{v}$ de la charge en mouvement, il vient $I = e\mathbf{E}\mathbf{v}/\mathcal{E}$ (e étant la charge de la particule et $\mathbf{v}$, sa vitesse). En particulier, pour des électrodes planes parallèles $E = \mathcal{E}/d$ (d étant la distance entre les électrodes), de sorte que si la charge se déplace perpendiculairement aux électrodes, $I = ev/d$. Dans le cas le plus général d'une charge isolée se déplaçant entre les électrodes dans le vide, le problème qui se pose est celui du mouvement de la particule dans un champ extérieur $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ qui se détermine uniquement par la géométrie des électrodes et par la tension qui leur est appliquée. Dans ces conditions, le champ étant irrotationnel, se conserve l'énergie totale $W = \frac{mv^2}{2} + e\varphi = C^{te}$, si bien que la vitesse $v(\mathbf{r})$ de la particule en un point de coordonnées $\mathbf{r}$ est $v(\mathbf{r}) = \sqrt{2(W - \varphi(r))/m}$ (m étant la masse de la particule).

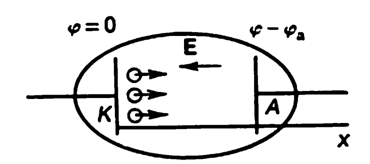


Fig. 11.1. Diode à vide

Si, au lieu d'une seule, de nombreuses particules chargées se déplacent dans le vide, le champ ne peut plus être considéré comme donné: il subit une influence considérable de la part de la charge d'espace produite par les particules. Considérons, par exemple, une diode à vide (fig. 11.1), c'est-à-dire deux électrodes planes parallèles entre lesquelles est maintenue une certaine différence de potentiel φ_a et l'une des électrodes, à savoir la cathode, émet continuellement des électrons (à cet effet la cathode est portée à une température élevée). Sous l'action du champ électrique dirigé de l'anode A vers la cathode K les électrons se déplacent vers l'anode. Une question se pose: comment la charge d'espace créée par les électrons influe-t-elle sur le champ régnant entre les électrodes et donc sur le mouvement lui-même des électrons? Il est clair que l'existence d'une charge d'espace négative entre les électrodes a pour effet qu'une partie de lignes de force partant de l'anode A se terminent sur les charges négatives, dans l'espace entre K et A, sans atteindre la cathode K. Cela signifie que le champ près de la cathode K est moins intense qu'au voisinage de l'anode A. Plus grand est le nombre d'électrons émis par la cathode, plus grand est le nombre d'électrons en cours de route vers l'anode, plus grand est le nombre de lignes de force qui partent de l'anode sans atteindre la cathode et, par conséquent, plus faible est le champ près de la cathode. Finalement, le champ au voisinage de la cathode peut décroître jusqu'à zéro et dans ce cas le courant

d'électrons collecté par l'anode atteint sa valeur maximale possible (pour un potentiel d'anode φ_a donné). Si le nombre d'électrons émis par la cathode en 1 s augmente encore, le champ près de la cathode deviendra retardateur au lieu de l'accélérateur et le courant sera inférieur au courant maximal possible correspondant au champ nul près de la cathode.

Toutes les grandeurs qui décrivent le champ ne dépendent évidemment que d'une seule coordonnée x (l'axe des x est dirigé suivant la normale aux électrodes). Dans ces conditions l'équation de Poisson prend la forme

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = en/\varepsilon_0$$

(e étant la charge de l'électron et n, la densité d'électrons). La cathode émet les électrons uniformément dans le temps, de sorte que la densité d'électrons est indépendante du temps ; en considérant le mouvement en régime établi, nous supposerons que toutes les autres grandeurs sont elles aussi indépendantes du temps. Dans ce cas, en vertu de la loi de conservation de la charge, la densité de courant j est en général une constante, c'est-à-dire ne dépend pas de x:

$$j = env = C^{te}.$$

Appliquons maintenant la loi de conservation de l'énergie $mv^2/2 = e\varphi$ (nous supposons que sur la cathode $v = 0$ et prenons pour $\varphi = 0$ le potentiel de la cathode). Nous obtenons $v = \sqrt{2e\varphi/m}$ et donc

$$en = \frac{j}{v} = j\sqrt{\frac{m}{2e}}\,\varphi^{-1/2}.$$

Enfin, en introduisant cette expression dans l'équation de Poisson, nous obtenons

$$\varepsilon_0 \frac{d^2\varphi}{dx^2} = j\sqrt{\frac{m}{2e}}\,\varphi^{-1/2}.$$

Cette équation permet de déterminer le potentiel en fonction de la coordonnée x. A cet effet, en la multipliant par $d\varphi/dx$, mettons l'équation obtenue sous la forme suivante

$$\varepsilon_0\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = 4j\sqrt{\frac{m}{2e}}\,\varphi^{1/2} + \varepsilon_0 E_0^2,$$

où E_0^2 est la valeur de $(d\varphi/dx)^2$ au point où $\varphi = 0$, c'est-à-dire le carré de l'intensité de champ près de la cathode.

Supposons d'abord que $E_0 = 0$. Alors $d\varphi/dx = \alpha j^{1/2}\varphi^{1/4}$, où $\alpha = (8m/e)^{1/4}\varepsilon_0^{-1/2}$, d'où il vient

$$\varphi(x) = \left(\frac{3\alpha}{4}\right)^{4/3} j^{2/3} x^{4/3}.$$

Nous voyons que par suite de la présence de la charge d'espace le potentiel entre la cathode et l'anode lors du mouvement des électrons en régime établi varie en fonction de la distance proportionnellement à $x^{4/3}$ et non à x comme dans le cas du vide. Par conséquent, l'intensité de champ varie comme $x^{1/3}$ et ne reste pas constant comme dans le cas du vide:

$$E = \left|\frac{d\varphi}{dx}\right| = \frac{4}{3}\left(\frac{3\alpha}{4}\right)^{4/3} j^{2/3}x^{1/3}.$$

Ainsi, le champ est non uniforme, il augmente dans le sens de la cathode vers l'anode.

Indiquons les expressions donnant la vitesse des électrons et leur charge d'espace en fonction de la distance à la cathode:

$$v(x) = \sqrt{\frac{2e}{m_e}}\,\varphi^{1/2} = \sqrt{\frac{2e}{m_e}}\left(\frac{3\alpha}{4}\right)^{2/3} j^{1/3}x^{2/3};$$

$$en(x) = \frac{j}{v} = \sqrt{\frac{m_e}{2e}}\left(\frac{4}{3\alpha}\right)^{2/3} j^{2/3}x^{-2/3}.$$

On remarquera que sur la cathode la densité volumique de charge devient égale à l'infini. Certes, en réalité il n'en est pas ainsi: la densité de charge a une valeur finie en tous les points et le résultat obtenu s'explique tout simplement par l'hypothèse simplificatrice grossièrement approchée que nous avons faite sur la valeur nulle de la vitesse des électrons émis par une cathode chaude. Si nous tenons compte du fait que cette vitesse a une valeur non nulle, nous obtiendrons une valeur finie pour la densité des électrons. Les courbes de variation du potentiel φ, de l'intensité du champ E et de la densité de charge ρ pour une diode à électrodes planes, dont l'anode est portée à un potentiel $\varphi_a = 100$ V et la distance entre les électrodes $d = 1$ cm, sont montrées sur la figure 11.2.

Revenons à la formule qui détermine φ en fonction de x et posons $x = d$. Nous trouverons alors le potentiel d'anode φ_a en fonction de la densité du courant j et donc du courant anodique total $I_a = jS$ (S étant la surface de l'anode). En résolvant l'équation ainsi obtenue par rapport à j, nous serons conduits à une loi dite « loi de la puissance 3/2 »:

$$\frac{I_a}{S} = j = \frac{4\varepsilon_0}{9}\sqrt{\frac{2e}{m_e}}\,\frac{\varphi_a^{3/2}}{d^2}.$$

Ainsi, l'intensité du courant anodique est proportionnelle à la puissance 3/2 du potentiel d'anode et non à la première puissance comme dans les conducteurs ordinaires où l'intensité de courant obéit à la loi d'Ohm. La non-observation de la loi d'Ohm est liée dans ce cas à la présence d'une charge d'espace (qui est compensée

totalement tant dans les métaux et les semi-conducteurs que dans les électrolytes, v. § 9.9).

La formule obtenue pour la densité de courant correspond au cas où l'intensité de champ sur la cathode $E_0 = 0$, mais le courant peut également être calculé dans le cas où $E_0 \neq 0$. Il se trouve que l'intensité de courant est dans ce cas inférieure à celle qu'on observe

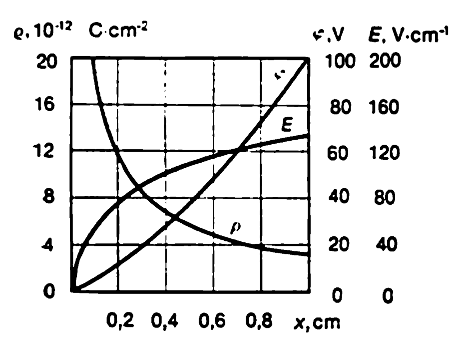


Fig. 11.2. Distribution du potentiel de champ et de la densité de charge dans une diode à électrodes planes distantes de 1 cm et une tension anodique de 100 V

Fig. 11.3. Variation du courant en fonction de la tension anodique compte tenu de la saturation

lorsque le champ sur la cathode est nul. C'est pourquoi le courant trouvé est le courant limite pour un potentiel d'anode donné. Il est clair que quel que soit le potentiel d'anode, la densité de courant anodique ne peut pas être supérieure à la densité j_s de courant d'émission thermoélectronique. Ceci détermine la limite supérieure du potentiel d'anode pour lequel est encore valable la « loi de la puissance 3/2 ». La figure 11.3 montre les courbes de variation de $j = j(\varphi_a)$ compte tenu de la limitation $j \leqslant j_s$ (le courant j_s s'appelle *courant de saturation*). La courbe *2*, caractérisée par un courant de saturation plus intense que dans le cas de la courbe *1*, correspond à une température plus élevée de la cathode (de telles courbes sont appelées courbes caractéristiques courant-tension).

§ 11.2. Température des particules chargées

Au paragraphe précédent nous avons supposé que les particules chargées se déplaçaient dans le vide. Considérons maintenant comment se déplacent les particules sous l'action d'un champ électrique à travers un gaz de molécules neutres en équilibre thermique. Si les particules n'étaient soumises à aucun champ, elles entreraient en collision avec les molécules neutres en échangeant d'énergie avec ces molécules, si bien que finalement serait établi un état d'équilibre pour lequel les valeurs moyennes des énergies cinétiques du mouve-

ment de translation des molécules neutres et des particules chargées seraient égales. A savoir, indépendamment de la masse et de l'espèce des molécules et des particules chargées, l'énergie cinétique moyenne deviendra égale à $\frac{1}{2} m \langle v \rangle^2 = \frac{3}{2} kT$, où m et v sont la masse et la vitesse de la particule ou de la molécule et T est la température du gaz de molécules neutres et de particules chargées. Autrement dit, en l'absence de champ extérieur, la charge de la particule ne se ferait pas sentir.

Il n'en sera pas ainsi si on applique un champ électrique extérieur. Dans ce cas les particules chargées reçoivent continuellement de l'énergie de la part du champ. Néanmoins, l'énergie de la particule n'augmente pas indéfiniment. En effet, les particules entrent en collision avec les molécules et leur cèdent une partie de leur énergie. Il en résulte finalement un certain état stationnaire, mais les valeurs moyennes des énergies cinétiques des particules et des molécules ne sont plus les mêmes. En d'autres termes, les températures du gaz de molécules neutres et du gaz de particules chargées sont différentes, et cette différence est d'autant plus grande que le champ électrique appliqué est plus intense.

Montrons comment on peut évaluer la température T_e des particules chargées (pour fixer les idées, nous allons considérer les électrons). La vitesse thermique moyenne de l'électron étant toujours supérieure à la vitesse thermique moyenne des molécules de gaz (à une température donnée), on peut considérer que les molécules sont au repos. Par suite de la collision avec un électron la molécule acquiert une certaine énergie ε_m proportionnelle à l'énergie cinétique ε de l'électron ($\varepsilon_m = \xi\varepsilon$, où ξ est la part de l'énergie transmise par l'électron). Cette quantité dépend fortement du caractère de la collision. Si la collision de l'électron avec une molécule est élastique, alors, comme il résulte des lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion, $\xi_{max} = 4\,(m_e/M)$, où m_e est la masse de l'électron et M, la masse de la molécule ($m_e \ll M$). La valeur minimale de ξ est évidemment nulle, si bien que la valeur moyenne de la partie de l'énergie ξ transmise par l'électron dans une collision élastique avec une molécule est $\langle \xi \rangle = 2\,(m_e/M)$. Cette quantité est très petite et vaut $2{,}8 \cdot 10^{-4}$ pour He et $5{,}5 \cdot 10^{-6}$ pour Hg. Pourtant une faible perte d'énergie n'est caractéristique que des électrons relativement lents, se déplaçant dans des gaz monoatomiques. Lorsque l'énergie des électrons augmente et surtout dans le cas où les électrons se déplacent dans des gaz polyatomiques, la part de l'énergie perdue par l'électron croît sensiblement parce que ses collisions avec les molécules deviennent essentiellement inélastiques, c'est-à-dire s'accompagnent de changement de structure de la molécule et de variation de son énergie interne.

En divisant $\langle \xi \rangle \langle \varepsilon \rangle$, où $\langle \varepsilon \rangle$ est la valeur moyenne de l'énergie

cinétique de l'électron, par le temps moyen τ de libre parcours de l'électron, nous trouverons l'énergie moyenne $\delta\varepsilon_-$ perdue par l'électron en 1 s: $\delta\varepsilon_- = \langle\xi\rangle\langle\varepsilon\rangle/\tau$. A l'état d'équilibre, elle doit être égale à l'énergie moyenne reçue par l'électron de la part du champ électrique. L'énergie moyenne que l'électron reçoit en 1 s du champ électrique $\delta\varepsilon_+ = eEu$, où $u = beE$ est la vitesse de mouvement coordonnée de l'électron sous l'influence du champ et $b = \tau/m$ la mobilité de l'électron. En posant $\delta\varepsilon_+ = \delta\varepsilon_-$ et en introduisant la longueur de libre parcours moyen $l = \tau\langle v\rangle \sim \tau\sqrt{\langle\varepsilon\rangle/m_e}$, nous obtenons

$$\langle\varepsilon\rangle \equiv \frac{3}{2} kT_e \sim eEl\langle\xi\rangle^{-1/2}.$$

La longueur de libre parcours moyen ne dépend pas de l'énergie de l'électron, elle est égale à $l \sim 1/(nQ)$, où n est la densité de molécules et Q, la section efficace de diffusion de l'électron par la molécule ; la température T_e des électrons est donc proportionnelle à l'intensité de champ électrique. (Cette conclusion est valable si les champs ne sont pas trop faibles lorsque $T_e \gg T$.) Pour la mobilité des électrons nous obtenons $b \sim [l/(m_e eE)]^{1/2}\langle\xi\rangle^{1/4}$.

§ 11.3. Décharge autonome

En entrant en collision avec un atome ou une molécule, un électron rapide peut leur arracher un ou plusieurs électrons. Il en résulte l'apparition, en plus de l'électron de départ, de plusieurs nouvelles particules chargées, des électrons et des ions chargés positivement. Ce phénomène s'appelle *ionisation*. Cependant, il faut se garder de penser que toute collision de l'électron avec un atome doit produire obligatoirement l'ionisation de l'atome. La condition nécessaire (mais non suffisante!) est que l'énergie de l'électron soit supérieure à une certaine énergie minimale égale à l'énergie de liaison de l'électron dans l'atome (ou dans la molécule). Cette énergie minimale est appelée *énergie d'ionisation*. C'est ainsi que pour produire un ion Ar^+ l'énergie de l'électron choquant doit être supérieure à 15 eV et pour obtenir un ion Ar^{++} elle doit dépasser 45,0 eV. Même dans le cas où l'énergie de l'électron excède l'énergie d'ionisation de l'atome, la collision de l'électron avec l'atome ne conduit nécessairement pas à l'ionisation de l'atome. Le fait est que les plus fréquentes sont des collisions élastiques, dans lesquelles la structure interne de l'atome n'est pas modifiée, et que c'est seulement dans des cas relativement peu nombreux que la collision s'accompagne soit d'un changement de la structure interne de l'atome, soit de l'arrachement d'un seul ou de plusieurs électrons à l'atome. Le changement de la structure de l'atome est généralement lié à une augmentation de son énergie interne, ce qui explique l'appellation d'*excitation de l'atome*

utilisée dans ce cas. Pourtant l'atome ayant passé, par suite de la collision avec un électron, à un état excité, n'y séjourne pas longtemps mais revient au bout d'un temps très court (de l'ordre de 10^{-8} à 10^{-10} s) à l'état fondamental. Ce passage s'accompagne d'une émission lumineuse (de « désexcitation » de l'atome).

Lorsque l'intensité de champ électrique augmente, l'énergie acquise par les particules chargées se déplaçant dans le gaz augmente elle aussi. Finalement elle peut atteindre la valeur de l'énergie d'ionisation et la dépasser, si bien que dans ce cas les particules chargées elles-mêmes, et non seulement l'agent extérieur ionisant, produiront l'ionisation des molécules de gaz. Nous passons maintenant à l'étude de cette ionisation autonome du gaz.

L'intensité de l'ionisation d'un gaz dans un champ électrique peut être caractérisée par le nombre de paires d'ions de charges opposées produits par les particules chargées (électrons et ions positifs) sur l'unité de longueur de leur parcours le long du champ. Ce nombre est appelé *coefficient d'ionisation* et désigné généralement par α dans le cas des électrons et par β dans le cas des ions. Montrons comment ces coefficients peuvent être liés à l'intensité de champ. Pour fixer les idées, raisonnons sur les électrons. Soit l le libre parcours moyen de l'électron dans le gaz. Alors la probabilité pour que l'électron parcoure, sans subir de collisions, une distance comprise dans l'intervalle $(x, x + dx)$ est

$$w(x)\,dx = e^{-x/l}\,\frac{dx}{l}.$$

Après avoir parcouru une distance x dans le sens du champ, l'électron acquiert une énergie eEx et si cette énergie est égale ou supérieure à l'énergie d'ionisation ε_i, l'électron peut en principe provoquer l'ionisation de la molécule de gaz. Ainsi, la distance parcourue par l'électron, sans subir de collisions, dans le sens du champ ne doit pas être inférieure à $\varepsilon_i/(eE)$. La probabilité correspondante sera égale à

$$w\,dx = e^{-\varepsilon_i/(eEl)}\,\frac{dx}{l}.$$

En multipliant cette quantité par la probabilité w_i de l'ionisation du gaz par l'électron (d'énergie donnée), on peut trouver le nombre de paires d'ions produits par l'électron sur son parcours dx. Nous obtenons

$$\alpha = \frac{w_i}{l}\,e^{-\varepsilon_i/(eEl)}.$$

La longueur de parcours l est inversement proportionnelle à la pression p. La formule donnant α peut donc se récrire sous la forme

$$\alpha/p = Ae^{-pB/E},$$

où A et B sont des constantes caractéristiques du gaz.

Par définition, sur le parcours dx l'électron fait naître αdx paires de particules chargées, c'est-à-dire αdx ions positifs et autant d'électrons. En se déplaçant dans le champ électrique, ces électrons donnent naissance à leur tour à de nouveaux électrons, de sorte que le nombre d'électrons dans le gaz croît en avalanche. Si $N_e(x)$ est le nombre d'électrons à une distance x de l'électrode (cathode), l'accroissement de leur nombre sur un élément de parcours dx est $dN_e(x) = N_e(x)\,\alpha dx$, d'où

$$N_e(x) = N_0 e^{\alpha x}$$

où N_0 est le nombre d'électrons sur la cathode (pour $x = 0$). C'est cette formule qui exprime la loi de la croissance en avalanche du nombre d'électrons dans le gaz due aux processus d'ionisation successifs.

Si l'anode se situe à une distance d de la cathode, le nombre d'électrons sur l'anode sera égal à $N_0 e^{\alpha d}$. Il en résulte que si I_0 est le courant électronique sortant de la cathode (prenant naissance par suite de l'illumination ou du chauffage de la cathode, par exemple), le courant d'électrons recueilli par l'anode sera

$$I_a = I_0 e^{\alpha d}.$$

Ainsi, chaque électron libéré sur la cathode fait naître, dans l'intervalle de décharge d'épaisseur d entre la cathode et l'anode, au total $e^{\alpha d}$ électrons ; quant au nombre d'ions positifs produits, il est évidemment égal à $e^{\alpha d} - 1$. Ces ions se déplacent dans le sens opposé au mouvement des électrons, c'est-à-dire vers la cathode. Sur leur parcours ils provoquent l'ionisation des molécules de gaz et, en venant frapper la cathode, ils lui arrachent des électrons.

Regardons comment les électrons libérés de la cathode par les chocs d'ions influent sur l'avalanche d'électrons. Supposons qu'un ion venant frapper la cathode lui arrache en moyenne η électrons. Chaque électron atteignant l'anode produit $e^{\alpha d}$ électrons et $e^{\alpha d} - 1$ ions. En tombant sur la cathode, ces derniers libèrent $\eta\,(e^{\alpha d} - 1)$ électrons. Ces électrons produisent à leur tour $\eta\,(e^{\alpha d} - 1)\, e^{\alpha d}$ électrons, et ainsi de suite. Un seul électron émis initialement par la cathode donne naissance au total à

$$z = e^{\alpha d} + (e^{\alpha d} - 1)\,\eta e^{\alpha d} + (e^{\alpha d} - 1)^2\,\eta^2 e^{\alpha d} + \ldots$$

électrons atteignant l'anode. Si $\eta\,(e^{\alpha d} - 1) < 1$, cette série converge et donne $z = e^{\alpha d}\,[1 - \eta\,(e^{\alpha d} - 1)]^{-1}$. Si le courant initial émis par la cathode est I_0, le courant anodique sera égal à

$$I_a = I_0 \frac{e^{\alpha d}}{1 - \eta\,(e^{\alpha d} - 1)}.$$

Cette formule permet de comprendre comment une décharge non autonome se transforme en une décharge autonome, c'est-à-dire la décharge qui s'entretient en l'absence de sources d'ionisation extérieures. Il est clair que pour obtenir une valeur finie du courant anodique I_a pour une valeur infiniment petite du courant initial I_0, il faut annuler le dénominateur de l'expression de I_a, c'est-à-dire poser

$$1 - \eta\,(e^{\alpha d} - 1) = 0.$$

C'est cette relation qui exprime la *condition d'entretien d'une décharge autonome* lorsque la décharge produit elle-même les particules chargées nécessaires à son entretien. Ces particules sont produites par suite de l'ionisation des molécules de gaz par les électrons et de l'arrachement des électrons de la cathode par les ions. En récrivant la condition écrite plus haut sous la forme $\alpha d = \ln\,(1 + 1/\eta)$ et en y introduisant l'expression de α obtenue plus haut, nous obtenons

$$Ap\, d e^{-pB/E} = \ln\,(1 + 1/\eta).$$

On peut en déduire la valeur critique de l'intensité de champ pour laquelle apparaît une décharge autonome. En remarquant que $E = \varphi_a/d$, où φ_a est le potentiel d'anode par rapport à la cathode, nous obtenons pour le potentiel d'anode critique, dit *potentiel d'amorçage* ou *d'allumage*, l'expression suivante :

$$\varphi_a^{(c)} = B \frac{pd}{\ln(pd) + \delta}, \quad \delta = \ln \frac{A}{\ln(1 + 1/\eta)}.$$

Fait remarquable, le potentiel d'amorçage présente un minimum pour une certaine valeur du produit de la pression par la distance entre les électrodes (il est atteint pour $pd \approx 2{,}7 \ln (1 + 1/\eta)/A$).

Bien entendu, le courant dans la décharge autonome ne devient pas infiniment grand : si l'on tient compte de diverses pertes de particules chargées, il a toujours une valeur finie. De plus, la charge autonome peut être stationnaire, caractérisée par une relation bien déterminée entre l'intensité de courant et la différence de potentiel appliquée à l'intervalle de décharge. Cette relation porte le nom de *caractéristique courant-tension de la décharge*. Une telle caractéristique typique est illustrée à la figure 11.4. Si un certain point G de

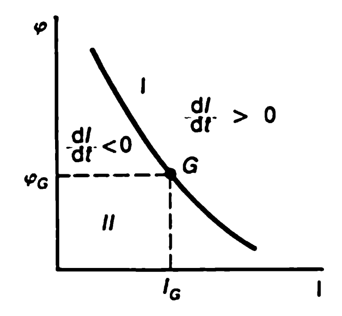


Fig. 11.4. Caractéristique courant-tension d'une décharge gazeuse

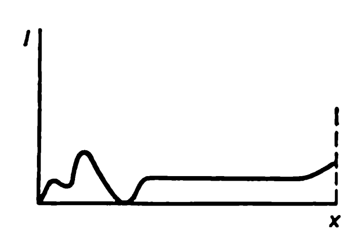


Fig. 11.5. Variation de l'intensité de luminescence en fonction de la distance à la cathode

la caractéristique correspond à la décharge, cela signifie que les processus de création de nouvelles particules et d'annihilation de particules se compensent, si bien que le courant I_a correspondant à la tension φ_a ne varie pas avec le temps. Autrement dit, le plan (φ, I), qu'on peut appeler plan de régimes de la décharge, est divisé par la caractéristique courant-tension en deux parties, I et II, auxquelles correspondent des régimes hors d'équilibre et telles qu'à la région I correspond la croissance, et à la région II, la décroissance du courant de décharge. La caractéristique courant-tension qui délimite ces deux régions correspond aux régimes de décharge en équilibre.

Le caractère de la décharge dans un gaz dépend fortement de l'intensité de courant. Pour les très faibles courants ($I \leqslant 10^{-4}$ A) la décharge se produit pratiquement sans émission lumineuse, ce qui explique le nom de décharge *sombre* qu'on lui donne. Pour des courants plus forts, la décharge s'accompagne de phénomènes lumineux et de ce fait s'appelle décharge *luminescente*. Les processus physiques y sont les mêmes que dans la décharge sombre, c'est-à-dire l'ionisation volumétrique par les électrons et l'arrachement des électrons de la cathode par les ions. La décharge luminescente se caractérise par la présence d'une zone luminescente à une certaine

distance de la cathode (on l'appelle *gaine cathodique* ou *lueur cathodique*). Devant la gaine cathodique se situe une zone sombre (dite *espace sombre d'Aston*) et immédiatement derrière la gaine cathodique se trouve une autre zone sombre (*espace sombre cathodique* ou *de Crookes*). L'existence de ces zones est susceptible d'une interprétation bien simple. En effet, les électrons émis par la cathode (sous l'effet d'un bombardement ionique) ont à la sortie de la cathode une vitesse très faible, de sorte qu'ils ne sont capables ni d'ioniser tout de suite, ni d'exciter les atomes de gaz. C'est pourquoi dans l'espace sombre d'Aston il n'y a pas de luminescence. Mais dans cet espace les électrons se déplaçant sous l'action du champ électrique acquièrent une énergie suffisante, si bien que dans la gaine cathodique ils provoquent une excitation intense des atomes s'accompagnant d'une émission lumineuse. Le maximum de probabilité d'excitation se situe dans la gaine cathodique de sorte que derrière cette gaine, où l'énergie des électrons est encore plus élevée, la luminescence devient nettement moins intense que dans la gaine cathodique. (La variation de l'intensité de la luminescence le long de la décharge luminescente est montrée à la figure 11.5.)

La décharge dans les gaz trouve des applications innombrables tant purement physiques qu'industrielles. Ce sont, par exemple, la chambre d'ionisation, les cellules photo-électriques à remplissage gazeux, les compteurs à point servant à la mesure des radiations; divers redresseurs (à mercure et à fer) destinés à la conversion du courant électrique ; les très nombreuses sources lumineuses utilisant la décharge gazeuse ; les arcs à souder ; enfin, les décharges gazeuses sont utilisées comme coupe-circuit et interrupteurs.

FORMULES FONDAMENTALES

Densité de courant anodique (« loi de la puissance 3/2 »)

$$j = \frac{4\varepsilon_0}{9}\sqrt{\frac{2e}{m_e}}\,\frac{\varphi_a^{3/2}}{d^2}$$

Température des électrons dans la décharge gazeuse

$$T_e \sim \frac{2eEl}{3k\sqrt{\langle\xi\rangle}}$$

Courant anodique exprimé par les coefficients d'ionisation

$$I_a = I_0\,\frac{e^{\alpha d}}{1-\eta\,(e^{\alpha d}-1)}$$

CHAPITRE 12

SUBSTANCES MAGNÉTIQUES

§ 12.1. Substance magnétique dans un champ extérieur

L'intensité d'aimentation **J** (v. chap. 6) dépend du champ magnétique dans la substance, c'est-à-dire de l'induction magnétique **B**. Cela signifie que l'induction magnétique et l'intensité de champ magnétique $\mathbf{H} = \mu_0^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{J}$ ne sont pas des grandeurs indépendantes, elles sont liées par une relation bien déterminée $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$ caractéristique de chaque substance. Pour la plupart des substances l'induction magnétique est une fonction linéaire de l'intensité de champ jusqu'à des valeurs très élevées de cette dernière et c'est seulement pour des substances dites ferromagnétiques que cette dépendance linéaire est valable pour une faible intensité de champ et peut être très vite remplacée par une dépendance non linéaire complexe. Si l'on considère les gaz, les liquides et les polycristaux de diverses substances, sauf les ferromagnétiques, on constate que l'induction magnétique **B** est proportionnelle à l'intensité de champ magnétique **H**, c'est-à-dire que

$$\mathbf{B} = \mu_0\mu\mathbf{H},$$

où μ est une certaine constante caractéristique de la substance considérée. On l'appelle *perméabilité magnétique relative* ou tout simplement *perméabilité magnétique*. Pour des monocristaux, les vecteurs **B** et **H** ne sont pas parallèles bien qu'ils soient toujours liés l'un à l'autre par une relation linéaire. Dans ce cas les composantes cartésiennes B_i, H_i ($i = x; y; z$) des vecteurs **B** et **H** sont liées entre elles par les relations linéaires

$$B_i = \mu_0 \sum_j \mu_{ij} H_j,$$

qui font intervenir neuf coefficients de proportionnalité μ_{ij}. On les appelle *tenseur de perméabilité magnétique*. Ce tenseur est symétrique, c'est-à-dire que $\mu_{ij} = \mu_{ji}$. C'est pourquoi le nombre de composantes indépendantes de ce tenseur est égal à six, mais suivant la symétrie du cristal, le nombre de composantes du tenseur de perméabilité magnétique peut être inférieur à six.

En posant $\mathbf{B} = \mu_0\mu\mathbf{H}$ dans l'expression $\mu_0^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{H} + \mathbf{J}$, on peut exprimer l'aimantation **J** par l'intermédiaire de l'intensité de

champ **H**:

$$\mathbf{J} = \chi\mathbf{H}, \quad \chi = (\mu - 1).$$

La quantité χ s'appelle *susceptibilité magnétique* de la substance.

Si l'on considère une analogie qui existe entre les grandeurs magnétiques **B** et **H** d'une part et les grandeurs électriques **D** et **E** d'autre part:

$$\mathbf{B} \to \mathbf{D}, \quad \mathbf{H} \to \mathbf{E},$$

la perméabilité magnétique μ est analogue à la permittivité du vide ε_0 ou à la permittivité absolue ε, et la susceptibilité magnétique χ, à la susceptibilité diélectrique α. Cette analogie se manifeste dans les conditions aux limites sur la surface de séparation de deux milieux:

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad D_{1n} = D_{2n}; \quad \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_{2t}, \quad \mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t}.$$

Malgré une certaine analogie entre la perméabilité magnétique et la permittivité du vide, il existe entre ces grandeurs une différence de principe. Le fait est que la susceptibilité diélectrique est toujours positive et donc $\varepsilon > 1$, alors que la susceptibilité magnétique χ peut être positive ou négative, par conséquent, la perméabilité magnétique peut être supérieure ou inférieure à l'unité. La substance est dite *paramagnétique* dans le premier cas et *diamagnétique* dans le second cas.

Pour pouvoir nous convaincre par expérience de l'existence de deux types différents de substances — paramagnétiques et diamagnétiques — étudions comment interagissent l'un avec l'autre deux courants continus se trouvant, non pas dans le vide mais dans un milieu de perméabilité magnétique μ. Dans le cas statique, l'intensité de champ magnétique **H** dans la substance se détermine, comme nous le savons, par l'équation rot **H** = **j** qui ne fait pas intervenir la perméabilité magnétique. C'est pourquoi l'intensité du champ magnétique créé par un courant qui parcourt la substance se détermine également par la loi de Biot et Savart

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \oint \frac{[\mathrm{d}\mathbf{l}\mathbf{r}]}{r^3},$$

de même que dans le vide (ici $\mathrm{d}\mathbf{l}$ est l'élément de longueur du conducteur parcouru par le courant I et $\mathbf{r}$, le rayon vecteur joignant l'élément $\mathrm{d}\mathbf{l}$ au point en lequel on détermine le champ **H**). Quant au vecteur induction magnétique **B**, il vaut $\mu_0\mu$ fois le vecteur **H**, c'est-à-dire que

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0\mu I}{4\pi} \oint \frac{[\mathrm{d}\mathbf{l}\mathbf{r}]}{r^3}.$$

Supposons maintenant que dans le milieu considéré est placé un deuxième conducteur parcouru par un courant I'. Quelle est la force

que ce conducteur subit de la part du conducteur parcouru par le courant I ? Si l'on considère une charge isolée q se déplaçant dans le milieu avec une vitesse **v**, cette charge est soumise à la force de Lorentz $\mathbf{f} = q\,[\mathbf{vB}]$. Cette formule ne diffère en rien de la formule qui donne la force agissant sur une charge de la part d'un champ magnétique dans le vide: les deux formules font intervenir le vecteur **B**. Le fait que la formule exprimant la force dans le cas du mouvement de la particule dans le milieu doit comprendre précisément le vecteur induction magnétique **B** et non le vecteur intensité de champ **H** découle du sens lui-même de l'induction magnétique: cette grandeur représente l'intensité moyennée du champ magnétique microscopique régnant dans le milieu (multipliée par μ_0).

Il résulte de l'expression de la force de Lorentz appliquée à une charge isolée que l'élément $d\mathbf{l}'$ du conducteur parcouru par le courant I' est soumis à la force

$$d\mathbf{F}' = I'\,[d\mathbf{l}'\mathbf{B}].$$

En y substituant à **B** l'induction magnétique produite par le courant I, nous obtenons

$$d\mathbf{F}' = \mu_0\mu\,\frac{II'}{4\pi}\left[d\mathbf{l}'\oint\frac{[d\,\mathbf{l}\mathbf{r}]}{r^3}\right],$$

où **r** est le rayon vecteur joignant $d\mathbf{l}$ à $d\mathbf{l}'$ et l'intégration s'effectue suivant le contour parcouru par le courant I. Cette formule montre que la force d'interaction entre les courants dans le milieu ne diffère du cas du vide que par le facteur multiplicateur μ. Aussi, la force d'interaction des courants dans un milieu paramagnétique est plus grande et dans un milieu diamagnétique plus petite que dans le vide.

Comme nous venons de voir, l'induction magnétique produite par un certain courant dans un milieu vaut μ fois celle dans le cas où le conducteur parcouru par le même courant se trouve dans le vide. En particulier, si un conducteur rectiligne de forte longueur parcouru par le courant I est placé dans un milieu de perméabilité magnétique μ, l'intensité de champ H et l'induction magnétique B à l'extérieur du conducteur, à une distance r de son axe, sont déterminées par les formules

$$H = \frac{I}{2\pi r}, \quad B = \frac{\mu_0\mu I}{2\pi r} \quad (r \geqslant a),$$

et, à l'intérieur du conducteur, par les formules

$$H = \frac{I}{2\pi a}\,\frac{r}{a}, \quad B = \frac{I\mu'\mu_0 r}{2\pi a a} \quad (r \leqslant a),$$

où a est le rayon de la section et μ', la perméabilité magnétique du conducteur.

L'intensité de champ et l'induction magnétique dans le cas d'un solénoïde long et mince ont pour expressions

$$H = In, \quad B = \mu_0\mu In,$$

où μ est la perméabilité magnétique de la substance dont est fait le noyau du solénoïde et n, le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde. Le flux magnétique à travers la surface S de la section du solénoïde a donc pour valeur

$$\Phi = BS = \mu_0 \mu I n S.$$

En y remplaçant n par N/l, où N est le nombre total de spires et l, la longueur du solénoïde, on peut représenter Φ sous la forme $\Phi = \mathcal{E}_m / R_m$, où $\mathcal{E}_m = \mu_0 I N$, $R_m = l/(\mu S)$.

Le flux magnétique peut être comparé au courant électrique, et le solénoïde peut être considéré comme un circuit magnétique traversé par un flux magnétique. Cette analogie est liée à ce qu'en l'absence de charges la densité $\mathbf{j}$ de courant satisfait à l'équation $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ et exactement la même équation est vérifiée par l'induction magnétique $\mathbf{B}$ qui représente la densité de flux magnétique: $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. C'est pourquoi l'équation de Φ peut s'interpréter comme la *loi d'Ohm pour le circuit magnétique*, la grandeur $\mathcal{E}_m$ jouant le rôle de la force magnétomotrice, et la grandeur R_m, celui de la résistance magnétique que l'on appelle *réluctance*. La force magnétomotrice est proportionnelle au nombre d'ampères-tours IN, alors que la réluctance est liée à la longueur et à la section du circuit magnétique de la même façon que la résistance électrique ordinaire est liée à la longueur et à la section d'un conducteur électrique à cette différence près qu'au lieu de la résistivité électrique l'expression de R_m fait intervenir la perméabilité magnétique. Le flux magnétique est d'autant plus intense que la perméabilité magnétique est plus élevée. C'est pourquoi, en pratique, pour obtenir des flux élevés (pour un nombre d'ampères-tours donné) on utilise des matériaux à forte μ. C'est ainsi par exemple que pour la réalisation des transformateurs et des machines électriques on utilise diverses nuances du fer et des alliages du type de permalloy (20 % Fe, 80 % Ni) dont la perméabilité magnétique atteint des valeurs de l'ordre de 10 000.

La loi d'Ohm pour le circuit magnétique permet de calculer le flux magnétique non seulement dans le cas le plus simple d'un solénoïde fermé, rempli d'un matériau magnétique homogène, mais également pour les circuits magnétiques plus complexes. Si, par exemple, le noyau d'un solénoïde est constitué par deux parties en série de perméabilités différentes μ_1 et μ_2, le flux magnétique se définit par la formule précédente, mais par réluctance R_m il convient d'entendre la somme des réluctances $R_m^{(1)}$ et $R_m^{(2)}$ des deux portions du solénoïde:

$$R_m = R_m^{(1)} + R_m^{(2)}; \quad R_m^{(1)} = l_1/(\mu_1 s_1); \quad R_m^{(2)} = l_2/(\mu_2 s_2)$$

(l_1 et l_2 étant les longueurs et s_1 et s_2, les sections des deux portions du solénoïde). Le circuit magnétique peut également comporter des

dérivations; dans le cas de leur montage en parallèle ce sont les inverses des réluctances qui s'ajoutent:

$$\frac{1}{R_m}=\frac{1}{R_m^{(1)}}+\frac{1}{R_m^{(2)}}.$$

Un corps magnétique placé dans un champ magnétique subit de la part de ce champ l'action d'une certaine force. Pour comprendre l'origine de cette force, rappelons qu'un cadre parcouru par un courant tend à tourner de façon à se placer perpendiculairement au champ et à se déplacer dans des endroits où le champ est plus intense. Or, dans un corps magnétique il y a circulation des courants moléculaires (courants ampériens) dont l'interaction avec le champ magnétique donne lieu à des forces qui s'exercent sur le corps magnétique. Cette manière de raisonner permet de déterminer facilement les forces exercées sur un corps magnétique dans un champ magnétique. Utilisons l'expression $U = -\mu_0 \mathbf{m} \mathbf{H}_0$ de l'énergie d'interaction entre le moment magnétique $\mathbf{m}$ d'une molécule et un champ extérieur $\mathbf{H}_0$. Nous arriverons à la conclusion que le moment $\mathbf{m}$ est soumis à l'action du moment de forces

$$\mathbf{N}_m = \mu_0 [\mathbf{m}\mathbf{H}_0].$$

Dans le cas où le champ $\mathbf{H}_0$ dépend des coordonnées, il s'exerce encore une force

$$\mathbf{f} = -\operatorname{grad} U = \mu_0 \{(\mathbf{m} \operatorname{grad}) \mathbf{H}_0 + [\mathbf{m} \operatorname{rot} \mathbf{H}_0]\}.$$

Le dernier terme de cette expression est évidemment absent si le volume occupé par le corps magnétique n'est pas parcouru par des courants extérieurs. Dans ce cas

$$\mathbf{f} = \mu_0 (\mathbf{m} \operatorname{grad}) \mathbf{H}_0.$$

En sommant les expressions de $\mathbf{f}$ et de $\mathbf{N}_m$ sur tous les moments magnétiques $\mathbf{m}$, on obtient la force résultante $\mathbf{F}$ et le moment $\mathbf{N}$ résultant des forces qui s'exercent sur le corps magnétique. Rapportées à l'unité de volume du magnétique, ces grandeurs ont pour valeurs

$$\mathbf{F} = \mu_0 (\mathbf{J} \operatorname{grad}) \mathbf{H}_0, \qquad \mathbf{N} = \mu_0 [\mathbf{J}\mathbf{H}_0],$$

où $\mathbf{J}$ est l'aimantation du corps magnétique. Dans ces expressions, $\mathbf{H}_0$ désigne un champ magnétique extérieur, mais si la perméabilité du corps magnétique diffère peu de l'unité, le champ $\mathbf{H}_0$ diffère peu du champ $\mathbf{H}$ à l'intérieur du corps. En tenant compte que $\mathbf{J} = \chi \mathbf{H}$, nous obtenons

$$\mu_0^{-1}\mathbf{F} = \chi (\mathbf{H} \operatorname{grad}) \mathbf{H} = \frac{\chi}{2} \operatorname{grad} H^2.$$

Cette formule est valable tant pour les paramagnétiques ($\chi > 0$) que pour les diamagnétiques ($\chi < 0$). Ainsi,

les paramagnétiques tendent à se déplacer vers les endroits où le champ est plus intense, alors que les diamagnétiques tendent à quitter ces endroits.

Si un corps magnétique est introduit dans un champ magnétique extérieur, celui-ci subit une variation. En effet, supposons que dans le vide il existe, avant l'introduction du magnétique, un champ statique $\mu_0 \mathbf{H}^{(e)} = \mathbf{B}^{(e)}$. Il est défini par les équations

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^{(e)} = \mathbf{j}\,; \qquad \operatorname{div} \mathbf{H}^{(e)} = 0,$$

où $\mathbf{j}$ est la densité du courant de conduction créateur du champ. Après l'introduction du magnétique, la première de ces équations reste valable également pour le nouveau champ que nous désignerons par $\mathbf{H}$, c'est-à-dire que $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}$. Quant à la seconde équation, elle sera remplacée par l'équation $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ dont il découle que $\operatorname{div} \mathbf{H} = - \operatorname{div} \mathbf{J}$. En comparant cette équation à l'équation de l'électrostatique $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$, on peut dire que le champ $\mathbf{H}$ comporte des sources avec une densité volumique de charge (de « charge magnétique ») $\rho_m = - \operatorname{div} \mathbf{J}$. En outre, sur la surface de séparation entre le corps magnétique et le vide, il apparaît une charge superficielle de densité $\sigma_m = J_n$, où J_n est la composante normale de $\mathbf{J}$ sur la frontière du magnétique (sous-entendu : normale extérieure). Cela signifie que le champ $\mathbf{H}$ comporte deux composantes : le champ $\mathbf{H}^{(e)}$ qui existait avant l'introduction du magnétique et le champ $\mathbf{H}'$ produit par les sources ρ_m et σ_m. Ce dernier champ peut se définir par la formule de l'électrostatique $\mathbf{H}' = - \operatorname{grad} \varphi_m$, où φ_m est le potentiel statique (« magnétostatique ») produit par des charges « magnétiques » :

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_V \frac{\rho_m}{r}\, dV + \int_\Sigma \frac{\sigma_m}{r}\, ds \right\}$$

(V étant le volume et Σ, la surface du corps magnétique ; r désignant la distance de dV ou de ds au point où on cherche φ_m).

Ainsi, $\mathbf{H}$ est différent de $\mathbf{H}^{(e)}$. En particulier, si avant l'introduction du magnétique le champ était uniforme, il cesse de l'être après l'introduction du magnétique. Pourtant, si le champ $\mathbf{H}^{(e)}$ est uniforme et le magnétique qui y est introduit a une forme bien déterminée, à savoir celle d'un ellipsoïde quelconque, l'aimantation de cet ellipsoïde sera uniforme, c'est-à-dire que le vecteur $\mathbf{J}$ à l'intérieur de l'ellipsoïde aura partout même valeur et même direction. Dans ce cas $\rho_m = 0$ et le champ $\mathbf{H}'$ à l'intérieur de l'ellipsoïde (mais non à son extérieur!) est uniforme, par conséquent, le champ résultant $\mathbf{H}^{(i)}$ est uniforme à l'intérieur de l'ellipsoïde mais non à son extérieur. Le champ $\mathbf{H}^{(i)}$ à l'intérieur de l'ellipsoïde est lié au champ unifor-

me $\mathbf{H}^{(e)}$ qui existait avant l'introduction de l'ellipsoïde par la relation

$$\mathbf{H}^{(i)} = \mathbf{H}^{(e)} - \hat{N}\mathbf{J},$$

où $\hat{N}$ est un certain tenseur qui ne dépend pas du champ et se détermine uniquement par la forme de l'ellipsoïde et sa position par rapport à $\mathbf{H}^{(e)}$. Il porte le nom de *tenseur de coefficients démagnétisants.* Rappelons qu'une même formule exprime la relation entre un champ électrostatique uniforme extérieur $\mathbf{E}^{(e)}$ et un champ $\mathbf{E}^{(i)}$ à l'intérieur d'un ellipsoïde diélectrique introduit dans le champ $\mathbf{E}^{(e)}$:

$$\mathbf{E}^{(i)} = \mathbf{E}^{(e)} - \varepsilon_0^{-1}\hat{N}\mathbf{P},$$

où $\mathbf{P}$ est le vecteur polarisation à l'intérieur de l'ellipsoïde. La structure identique de ces formules tient à ce que les conditions aux limites sur les vecteurs $\mathbf{D}$ et $\mathbf{E}$ sont les mêmes que sur les vecteurs $\mathbf{B}$ et $\mathbf{H}$.

Le vecteur $\mathbf{J}$ entrant dans la formule de $\mathbf{H}^{(i)}$ est évidemment égal à $\mathbf{J} = \mu_0^{-1}\mathbf{B}^{(i)} - \mathbf{H}^{(i)}$, où $\mathbf{B}^{(i)}$ est l'induction magnétique dans l'ellipsoïde. Si $\mathbf{B}^{(i)} = \mu_0\mu\mathbf{H}^{(i)}$, alors $\mathbf{J} = \chi\mathbf{H}^{(i)}$, où $\chi = \mu - 1$, et la formule donnant $\mathbf{H}^{(i)}$ prend la forme

$$\mathbf{H}^{(i)} = \mathbf{H}^{(e)} - \chi\hat{N}\mathbf{H}^{(i)}.$$

Dans un système de coordonnées dont les axes se confondent avec les axes principaux de l'ellipsoïde, le tenseur $\hat{N}$ ne possède que des éléments diagonaux N_1, N_2, N_3 tels que $N_1 + N_2 + N_3 = 1$. Si le champ $\mathbf{H}^{(e)}$ est dirigé parallèlement à un des axes principaux de l'ellipsoïde, par exemple, à l'axe k, l'équation qui relie entre eux les champs $\mathbf{H}^{(i)}$ et $\mathbf{H}^{(e)}$ prend la forme $\mathbf{H}^{(i)} = \mathbf{H}^{(e)} - \chi N_3\mathbf{H}^{(i)}$, d'où

$$\mathbf{H}^{(i)} = \frac{\mathbf{H}^{(e)}}{1+\chi N_3}.$$

Indiquons les valeurs de N_1, N_2, N_3 dans certains cas concrets. Dans le cas d'une sphère

$$N_1 = N_2 = N_3 = 1/3.$$

Si le magnétique a la forme d'un cylindre dont l'axe se confond avec l'axe x_1,

$$N_1 = 0, \quad N_2 = N_3 = 1/2.$$

Pour un ellipsoïde de révolution aplati ($a > c$) défini par $(x_1^2 + x_2^2)/a^2 + x_3^2/c^2 = 1$, on a

$$N_1 = N_2 = \frac{1}{2}(1 - N_3), \quad N_3 = \frac{1+e^2}{e^3}(e - \operatorname{arctg} e), \quad e = \sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2 - 1}.$$

Pour un ellipsoïde de révolution allongé $(a>b)$ défini par x_1^2/a^2+ $+(x_2^2+x_3^2)/b^2=1$, on a

$$N_1=\frac{1-e^2}{2e^3}\left(\ln\frac{1+e}{1-e}-2e\right),\quad N_2=N_3=\frac{1}{2}(1-N_1),$$

$$e=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

§ 12.2. Susceptibilité magnétique d'un gaz paramagnétique

Jusqu'ici, nous avons divisé, de façon formelle, toutes les substances en deux groupes: les paramagnétiques $(\mu>1)$ et les diamagnétiques $(\mu<1)$. Nous allons montrer maintenant que la différence entre ces groupes est liée à la possibilité pour les atomes de posséder un *moment magnétique intrinsèque* ou *spontané*, c'est-à-dire un moment magnétique non nul en l'absence de champ magnétique extérieur. Si un tel moment existe, la substance est paramagnétique, dans le cas contraire elle est diamagnétique.

Le moment magnétique intrinsèque de l'atome peut avoir un double origine: premièrement, il apparaît par suite du mouvement des électrons atomiques et deuxièmement, l'électron possède son moment magnétique propre (dit *moment magnétique de spin*).

Le moment magnétique lié au mouvement des électrons est appelé moment magnétique *orbital*. Son apparition est facile à comprendre. En effet, considérons un électron animé d'un mouvement uniforme avec une vitesse v, sur une circonférence de rayon r. Il est évident que l'intensité de courant lié à ce mouvement est $i=e/T$, où T est la période de révolution de l'électron sur la circonférence. En multipliant i par $\mathbf{s}_m$, où $\mathbf{s}_m$ est l'aire d'une surface orientée balayée par le courant (la direction de $\mathbf{s}_m$ est liée au sens du courant par la règle de la vis normale), nous obtenons le moment magnétique orbital de l'électron $\mathbf{m}_L=i\mathbf{s}_m$. En tenant compte que $\mathbf{s}_m=\frac{1}{2}[\mathbf{rv}]\,T$, on peut récrire l'expression de $\mathbf{m}_L$ sous la forme

$$\mathbf{m}_L=\frac{1}{2}\,e\,[\mathbf{rv}].$$

D'un autre côté, le moment orbital de l'impulsion de l'électron est $\mathbf{K}=m_e\,[\mathbf{rv}]$, où m_e est la masse de l'électron ; on peut donc écrire

$$\mathbf{m}_L=\frac{e}{2m_e}\,\mathbf{K}.$$

Nous avons obtenu cette formule en partant de la définition du moment de l'impulsion adoptée en mécanique classique. Mais

une même formule est également valable en mécanique quantique à cette différence près que K est un vecteur « quantique » et non ordinaire. Cela signifie que sa projection sur un axe choisi (direction du champ magnétique extérieur) ne

peut prendre que des valeurs discrètes bien déterminées égales à $m\hbar$, où $\hbar = 10^{-34}$ J·s est la constante quantique et m, un nombre entier positif ou négatif compris entre certaines limites $-l \leqslant m \leqslant l$ (l étant un nombre entier positif). Dans ces conditions, le carré du moment orbital de l'impulsion de l'électron $K^2 = \hbar^2 l (l + 1)$.

Nous en arrivons ainsi à cette conclusion que la projection du moment magnétique orbital $\mathbf{m}_L$ de l'électron sur la direction du champ (axe z) ne peut prendre que les valeurs suivantes:

$$(\mathbf{m}_L)_z = -\mu_B m, \quad -l \leqslant m \leqslant l,$$

où $\mu_B = e\hbar/(2\, m_e) = 9{,}2732 \cdot 10^{-24}$ J·T^{-1} est le *magnéton de Bohr.*
Cette quantité représente la « portion » minimale du moment magnétique ou un quantum de moment magnétique.

Les mêmes formules sont également valables pour un atome tout entier à condition d'entendre par **K** le moment orbital résultant des impulsions de tous les électrons de l'atome. Comme il s'exprime en unités de $\hbar$, on l'écrit sous la forme $\hbar\mathbf{L}$, où **L** est un vecteur quantique sans dimensions, c'est-à-dire un vecteur à valeurs entières des projections $-l$, $(-l + 1)$, . . ., 0, 1, 2, . . ., l sur la direction du champ. Le moment magnétique orbital de l'atome peut donc s'écrire sous la forme

$$\mathbf{m}_L = \frac{e\hbar}{2m_e}\,\mathbf{L}.$$

(Puisque $e < 0$, le vecteur $\mathbf{m}_L$ est opposé au vecteur **L**.)

Un électron au repos possède lui aussi un moment magnétique. Il est proportionnel au moment interne de la quantité de mouvement de l'électron que l'on appelle *spin* de l'électron.

Le spin de l'électron est un vecteur quantique dont la projection sur une direction choisie — direction du champ magnétique — ne peut prendre que deux valeurs discrètes: $-\hbar/2$ et $+\hbar/2$. L'électron est toujours doué de ce moment, c'est-à-dire indépendamment qu'il soit au repos ou en mouvement. Au spin est lié le moment magnétique de l'électron égal au magnéton de Bohr.

Si l'on désigne le moment magnétique de spin par $\mathbf{m}_s$, on a pour l'électron

$$\mathbf{m}_s = \frac{e\hbar}{m_e}\,\mathbf{s},$$

où $\hbar\mathbf{s}$ est le moment de spin de la quantité de mouvement et **s**, un vecteur quantique sans dimensions possédant deux projections possibles $\pm$ 1/2 sur la direction du champ magnétique. Le vecteur $\mathbf{m}_s$ peut être orienté soit dans le sens du champ magnétique, soit dans le sens opposé, ses projections étant égales à $\pm\,\mu_B$. D'autres orientations du moment magnétique de spin de l'électron sont impossibles.

Une formule de même type définit également le moment magnétique de spin de l'ensemble d'un atome: il faut seulement remplacer **s** par la somme des moments de spin des impulsions de tous les

électrons de l'atome: $\mathbf{S} = \Sigma \mathbf{s}$. Ainsi, le moment magnétique de spin de l'atome a pour valeur

$$\mathbf{m}_S = \frac{e\hbar}{m_e} \mathbf{S}.$$

En additionnant $\mathbf{m}_L$ et $\mathbf{m}_s$, nous obtenons le *moment magnétique résultant* **m** de l'atome:

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_L + \mathbf{m}_S = \frac{e\hbar}{2m_e} (\mathbf{L} + 2\mathbf{S}).$$

La somme du moment orbital et du moment de spin des impulsions donne le moment total de l'impulsion $\hbar \mathbf{J}_a$ de l'atome:

$$\mathbf{J}_a = \mathbf{L} + \mathbf{S}.$$

Nous voyons que le moment magnétique résultant **m** de l'atome n'est pas parallèle au moment résultant de l'impulsion de l'atome bien que les deux composantes: le moment orbital et le moment de spin, soient parallèles. Si $\mathbf{L} = \mathbf{S} = 0$, le moment magnétique intrinsèque de l'atome est nul.

Regardons maintenant comment se comportera dans un champ magnétique extérieur un gaz dont les atomes possèdent un moment magnétique propre. En additionnant les moments magnétiques **m** des atomes contenus dans l'unité de volume du gaz, nous trouverons l'aimantation du gaz: $\mathbf{J} = \Sigma \mathbf{m}$. En l'absence de champ, une telle somme s'annule parce que les moments des différents atomes sont orientés d'une façon absolument désordonnée. Pour $\mathbf{H} \neq 0$ il apparaît une direction privilégiée, celle de **H**, et la projection de **J** sur cette direction devient différente de zéro. Calculons cette projection en supposant que le gaz est à l'état d'équilibre statistique. Dans ce cas, la probabilité w des différentes orientations du moment **m** par rapport au champ **H** est donnée par la formule de Boltzmann $w \backsim \exp[-U/(kT)]$, où T est la température du gaz et $U = -\mu_0 \mathbf{mH}$, l'énergie potentielle du moment magnétique **m** dans le champ **H**.

Supposons d'abord que le moment magnétique de l'atome est d'origine orbitale. Dans ce cas $U = \mu_0 \mu_B mH$ $(-l \leqslant m \leqslant l)$ et la probabilité pour que la projection de $\mathbf{m}_L$ sur **H** soit égale à $m\mu_B$ s'exprime par la formule

$$w_m = C \exp[-m\mu_0\mu_B H/(kT)],$$

où $C = 1/Z$ est une constante de normalisation et

$$Z \equiv Z[\mu_0\mu_B H/(kT)] = \sum_{m=-l}^{l} \exp[-m\mu_0\mu_B H/(kT)].$$

La valeur moyenne de m a pour expression

$$\langle m\rangle = \sum_{-l}^{l} m w_m = \sum_{-l}^{l} m e^{-m\xi} \Big/ \sum_{-l}^{l} e^{-m\xi},$$

où $\xi = \mu_0 \mu_B H/(kT)$. Cette grandeur peut également se mettre sous la forme suivante:

$$\langle m\rangle = -\frac{d}{d\xi} \ln Z(\xi).$$

La valeur de $\langle m\rangle$ est facile à calculer dans le cas des champs peu intenses et des températures élevées lorsque $\xi \ll 1$. Dans ce cas

$$Z(\xi) = \sum_{m=-l}^{l} \left(1 + \frac{1}{2} m^2\xi^2\right) = (2l+1)\left[1 + \frac{1}{6} l(l+1)\xi^2\right].$$

Il en résulte que si $\xi \ll 1$,

$$\langle m\rangle = \frac{Z'(\xi)}{Z(\xi)} = \frac{1}{3} l(l+1)\xi.$$

En multipliant $\langle m\rangle$ par μ_B et par n (concentration des atomes), nous obtiendrons la projection $J_\parallel$ du vecteur aimantation **J** sur la direction du champ:

$$J_\parallel = \frac{\mu_0 \mu_B^2}{3kT} \frac{1}{3} l(l+1)\, nH.$$

La projection de **J** perpendiculaire à **H** est nulle si bien que $J_\parallel = J$. En nous rappelant la définition de la susceptibilité magnétique $\mathbf{J} = \chi \mathbf{H}$, nous voyons que la susceptibilité du gaz considéré a pour valeur

$$\chi = \mu_0 \frac{\mu_B^2 n}{3kT} l(l+1).$$

Elle est positive, c'est-à-dire qu'un gaz dont les atomes sont doués d'un moment magnétique propre non nul est un paramagnétique.

La formule obtenue pour χ est valable lorsque $\mu_0 \mu_B H \ll kT$. Dans ces conditions, la susceptibilité varie en raison inverse de la température (cette assertion est connue sous le nom de *loi de Curie*). Comme $\mathbf{m}_L = \mu_B \mathbf{L}$ et $\mathbf{L}^2 = l(l+1)$, la formule donnant χ peut s'écrire sous la forme

$$\chi = \frac{\mu_0 m_L^2 n}{3kT}.$$

Cette formule est analogue à la formule $\alpha = d_0^2 n/(3\varepsilon_0 kT)$ traduisant la susceptibilité diélectrique du gaz de molécules polaires (v. chap. 8). Elle peut être obtenue (de même que la formule de α) si $\mathbf{m}_L$ est considéré comme un vecteur classique et la distribution spatiale des

vecteurs $\mathbf{m}_L$ se définit par la formule

$$dn = C \exp\left[-U/(kT)\right] d\Omega,$$

où $U = -\mu_0 \mathbf{m}_L \mathbf{H} = -\mu_0 m_L H \cos \nu$ et $d\Omega = 2\pi \sin \vartheta \, d\vartheta$ (ϑ étant l'angle formé par les vecteurs $\mathbf{m}_L$ et $\mathbf{H}$). La valeur moyenne de $\cos \vartheta$ dans cette expression est donnée par la formule

$$\langle \cos \vartheta \rangle = \int \cos \vartheta \exp\left(\mu_0 \frac{m_L H}{kT} \cos \vartheta\right) d\Omega \Big/ \int \exp\left(\mu_0 \frac{m_L H}{kT} \cos \vartheta\right) d\Omega,$$

et l'aimantation, par la formule $J = nm \langle \cos \vartheta \rangle$.

Tant qu'on ne considère que des températures élevées ($\mu_0 \mu_B H \ll \ll kT$), la distinction entre les deux approches ($\mathbf{m}_L$ étant un vecteur « quantique » et $\mathbf{m}_L$ un vecteur « classique ») ne se manifeste pas. Toutefois, si l'on passe à des températures basses $\mu_0 \mu_B H \gtrsim kT$, cette différence devient considérable. De plus, la formule obtenue pour J dans l'hypothèse où l'angle ϑ que font entre eux les vecteurs $\mathbf{m}_L$ et $\mathbf{H}$ peut prendre des valeurs quelconques, c'est-à-dire la *formule de Langevin*

$$J = nm_L L\left(\frac{\mu_0 m_L H}{kT}\right), \quad L(\xi) = \operatorname{cth} \xi - \frac{1}{\xi}$$

($L(\xi)$ étant appelé *fonction de Langevin*) est en toute rigueur fausse. Le fait est que d'après cette formule l'entropie du gaz tend vers l'infini quand $T \to 0$, alors que suivant le théorème de Nernst elle doit tendre vers zéro. Dans le cadre de la théorie quantique cette contradiction avec le théorème de Nernst n'existe pas.

En calculant χ, nous avons supposé que le moment magnétique propre de l'atome était d'origine orbitale. Supposons maintenant qu'il est dû au spin, c'est-à-dire que $\mathbf{m} = \mathbf{m}_s = (e\hbar/m_e)\,\mathbf{S}$. Dans ce cas les projections possibles de $\mathbf{m}_s$ sur $\mathbf{H}$ sont égales à $2\mu_B m'$, où $m' = -S, -S+1, \ldots, S$ et S est la valeur maximale de la projection du spin sur la direction de $\mathbf{H}$ (pour un électron unique $s = 1/2$). Quant à l'énergie potentielle du moment dans le champ, elle se détermine comme précédemment par la formule $U = -\mu_0 \mathbf{m}_s \mathbf{H} = 2\mu_0 \mu_B H m'$, et la probabilité de la valeur donnée de m' par la formule

$$w_{m'} = e^{-2\mu_0 \mu_B H m'/(kT)} / Z\left[2\mu_0 \mu_B H/(kT)\right]; \quad Z(\xi) = \sum_{m'=-S}^{S} e^{-\xi m'}.$$

La valeur moyenne de m' a donc pour expression

$$\langle m' \rangle = \frac{\sum m' e^{-m'\xi}}{\sum e^{-m'\xi}} = -\frac{d}{d\xi} Z(\xi); \quad \xi = \frac{2\mu_0 \mu_B H}{kT}.$$

Cette expression permet de trouver l'aimantation : $J = 2\mu_B n \langle m' \rangle$. Admettons, pour simplifier, que $s = 1/2$. Alors,

$$\langle m' \rangle = \frac{1}{2} \frac{e^{\xi/2} - e^{-\xi/2}}{e^{\xi/2} + e^{-\xi/2}} = \frac{1}{2} \text{th} \left(\mu_0 \frac{\mu_B H}{kT} \right)$$

et donc

$$J = \mu_B n \text{ th} \left(\mu_0 \frac{\mu_B H}{kT} \right).$$

Comme il s'ensuit de ce qui précède, cette formule est différente de la formule de Langevin. Si $\xi \ll 1$, alors $\text{th}\xi \approx \xi$; aussi, lorsque $\mu_0 \mu_B H \ll kT$,

$$J = \frac{\mu_0 n \mu_B^2}{kT} H.$$

Ainsi, le gaz d'atomes doués de moment magnétique de spin est paramagnétique et sa susceptibilité paramagnétique obéit à la loi de Curie.

Nous avons supposé que $S = 1/2$. Pour une valeur quelconque de S la formule donnant χ prend la forme

$$\chi = \frac{n \mu_0 \mu_B^2}{3kT} 4S (S+1).$$

Si les moments $\mathbf{m}_L$ et $\mathbf{m}_S$ sont non nuls et si le champ **H** est faible, la susceptibilité magnétique du gaz se définit par la formule

$$\chi = \frac{n \mu_0 \mu_B^2 g_L^2 j (j+1)}{3kT},$$

où j est la valeur maximale de la projection du moment total de l'impulsion de l'atome $\mathbf{J}_a = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ sur la direction de l'intensité du champ **H** et

$$g_L = \{1 + [j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)]\}/2j(j+1)$$

(cette quantité s'appelle *facteur de Landé*). Ainsi,

dans tous les cas où l'atome est doué d'un moment magnétique propre non nul le gaz d'atomes est paramagnétique et sa susceptibilité paramagnétique varie avec la température, en diminuant lorsque la température s'élève.

Puisque la perméabilité magnétique $\mu = 1 + \chi$ dépend de la température, la grandeur

$$f_M = \mathbf{B}H/2 = \mu_0 \mu H^2/2$$

doit être considérée, pour $T = C^{te}$, comme une énergie libre du champ magnétique d'un volume unité du gaz, mais elle comprend tant l'énergie du champ magnétique propre que l'énergie libre du gaz liée au champ magnétique.

§ 12.3. Paramagnétisme d'un gaz électronique dégénéré

Au paragraphe précédent nous avons étudié la susceptibilité paramagnétique d'un gaz classique, c'est-à-dire non dégénéré. Nous allons maintenant considérer un gaz électronique dégénéré soumis à un champ magnétique et déterminer sa susceptibilité magnétique. Un tel gaz est constitué, par exemple, par des électrons de conduction dans les métaux.

Du fait que l'électron possède un moment magnétique de spin propre μ_B, il acquiert dans le champ **H** une énergie supplémentaire $\pm\ \mu_0\mu_B H$ (les signes « + » et « — » correspondent aux orientations du spin dans le sens du champ et dans le sens opposé). En l'absence de champ, la fonction de distribution du gaz électronique dégénéré, que nous supposons en état d'équilibre, était de la forme $f(\varepsilon) = \{\exp[(\varepsilon - \varepsilon_0)/(kT)] + 1\}^{-1}$, où ε est l'énergie de l'électron et ε_0, le potentiel chimique. En présence de champ magnétique nous aurons deux fonctions de distribution $f_\uparrow(\varepsilon)$ et $f_\downarrow(\varepsilon)$, pour l'orientation du spin suivant le champ et dans le sens opposé :

$$f_\uparrow(\varepsilon) = \{\exp[(\varepsilon + \mu_0\mu_B H - \varepsilon_0)/(kT)] + 1\}^{-1};$$
$$f_\downarrow(\varepsilon) = \{\exp[(\varepsilon - \mu_0\mu_B H - \varepsilon_0)/(kT)] + 1\}^{-1}.$$

Il est maintenant facile de trouver l'aimantation J du gaz : puisque la projection du momentmagnéti que de spin de l'électron sur **H** est égale à $-\ \mu_B$ pour l'orientation du spin le long du champ et àμ_B pour l'orientation opposée, nous avons

$$J = \mu_B \int [f_\downarrow(\varepsilon) - f_\uparrow(\varepsilon)]\, d^3p/(2\pi\hbar)^3 =$$
$$= \mu_B \int \{[\exp((\varepsilon - \mu_0\mu_B H - \varepsilon_0)/(kT)) + 1]^{-1} -$$
$$- [\exp((\varepsilon + \mu_0\mu_B H - \varepsilon_0)/(kT)) + 1]^{-1}\}\, \nu(\varepsilon)\, d\varepsilon \frac{d\Omega}{4\pi},$$

où $\nu(\varepsilon)\, d\varepsilon\, d\Omega/(4\pi)$ est le nombre d'états de l'électron dans l'intervalle d'énergie $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$ et dans l'intervalle d'angles solides $d\Omega$ de l'impulsion (plus exactement de la quasi-impulsion) **p**. Dans le cas des faibles champs la différence de distributions de Fermi figurant dans cette intégrale peut être remplacée par $-\ 2\mu_0\mu_B H df/d\varepsilon$, et comme la dérivée $df/d\varepsilon$ présente un maximum aigu pour $\varepsilon = \varepsilon_0$, on peut écrire

$$-2\mu_0\mu_B H \frac{df}{d\varepsilon} \approx 2\mu_0\mu_B H \delta(\varepsilon - \varepsilon_0).$$

L'intégration peut donc s'effectuer immédiatement : $J=2\mu_0\mu_B^2 H\nu(\varepsilon_0)$. Ainsi,

un gaz électronique dégénéré est paramagnétique et sa susceptibilité paramagnétique a pour valeur

$$\chi_p = 2\mu_0\mu_B^2\nu\ (\varepsilon_0).$$

A la différence de la susceptibilité d'un gaz non dégénéré, celle d'un gaz dégénéré ne dépend pas de la température et ne se détermine en fait que par la valeur de la densité de niveaux d'énergie de l'électron sur la frontière de la distribution de Fermi. Le paramagnétisme d'un gaz dégénéré porte le nom de *paramagnétisme de Pauli.*

Si l'on considère que $\varepsilon = p^2/(2m_e)$ (dans les métaux une telle dépendance de l'énergie ε de l'électron vis-à-vis de sa quasi-impulsion p ne s'observe en général pas), alors $\nu\ (\varepsilon) = \sqrt{2\varepsilon}\, m_e^{3/2}/(2\pi^2\hbar^3)$. En tenant compte que

$$2\ (4\pi/3)p_F^3/(2\pi\hbar)^3 = n,\quad p_F^2/(2m_e) = \varepsilon_0$$

(p_F étant l'impulsion limite, et n, la densité d'électrons), nous obtenons

$$\chi_p = \frac{\mu_0}{\mu}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3}\frac{\mu_B^2 n^{1/3} m_e}{\hbar^3}\ .$$

D'après l'ordre de grandeur $\chi_p \sim \mu_0 n\mu_B^2/(kT_0)$, où T_0 est la *température de dégénérescence* (cette formule diffère de la formule donnant la susceptibilité paramagnétique d'un gaz ordinaire par la substitution de T_0 à T). En posant $n \simeq 10^{29}$ m^{-3}, $T_0 \simeq 10^5$ K, nous obtiendrons $\chi_p \simeq 10^{-6}$.

En calculant la susceptibilité magnétique d'un gaz électronique, nous avons admis que l'influence du champ magnétique ne se ramenait qu'à une variation de l'énergie de l'électron. Autrement dit, nous avons considéré que l'application du champ ne modifiait pas la dépendence de ε vis-à-vis de **p** et que le rôle du champ se réduisait à l'adjonction de $\pm\ \mu_0\mu_B H$ à ε (**p**). Or, le champ fait varier aussi le caractère du mouvement de l'électron. En effet, nous savons qu'un champ magnétique incurve la trajectoire d'une particule (dans un plan perpendiculaire à **H** l'électron se déplace sur une circonférence). La prise en compte de cet effet conduit au diamagnétisme des électrons, de sorte que la susceptibilité paramagnétique d'un gaz électronique libre diminue de 1/3 de sa valeur (*diamagnétisme de Landau*). Ce phénomène joue un rôle important dans le magnétisme des métaux.

§ 12.4. Susceptibilité d'un gaz diamagnétique

Nous avons maintenant à démontrer que si les atomes d'une substance ne possèdent pas de moment magnétique propre (moment en l'absence de champ magnétique extérieur), cette substance est

diamagnétique, c'est-à-dire que sa susceptibilité magnétique est négative. A cet effet, établissons comment le champ magnétique extérieur influe sur le movement des électrons dans l'atome.

Si un atome se trouve dans un champ magnétique d'induction $\mathbf{B}$, chacun de ses électrons est soumis à la force de Lorentz $e\,[\mathbf{vB}]$ ($\mathbf{v}$ étant la vitesse de l'électron dans un référentiel d'inertie). C'est pourquoi, si l'électron est soumis à la force $\mathbf{f}$ qui s'exerce de la part du noyau et des autres électrons, la force résultante appliquée à l'électron sera $\mathbf{F} = \mathbf{f} + e\,[\mathbf{vB}]$. Supposons que la force $\mathbf{f}$ soit de caractère central, c'est-à-dire qu'elle ne dépende que de la distance r entre l'électron et le noyau, et passons à un référentiel tournant avec une vitesse angulaire constante $\boldsymbol{\omega}$ par rapport au référentiel d'inertie initial. Dans ce référentiel non inertiel l'électron sera soumis à deux forces supplémentaires: la force de Coriolis $2m_e\,[\mathbf{v}'\boldsymbol{\omega}]$ et la force centrifuge $m_e\,[\boldsymbol{\omega}\,[\mathbf{r}\boldsymbol{\omega}]]$, où $\mathbf{r}$ est le rayon vecteur déterminant la position de la particule, et $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$, la vitesse de la particule dans le référentiel non inertiel. La force résultante qui s'exerce sur l'électron dans un référentiel non inertiel est donc égale à

$$\mathbf{F}' = \mathbf{f}' + e\,[\mathbf{v}'\mathbf{B}] + 2m_e\,[\mathbf{v}'\boldsymbol{\omega}] + m_e\,[\boldsymbol{\omega}\,[\mathbf{r}\boldsymbol{\omega}]],$$

où $\mathbf{f}'$ est la force correspondant à $\mathbf{f}$ dans le référentiel non inertiel. Puisque nous avons supposé que la force $\mathbf{f}$ dépend uniquement de la distance r et cette dernière reste inchangée lors du passage au référentiel non inertiel, il est évident que $\mathbf{f}' = \mathbf{f}$. Supposons maintenant que la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ soit choisie égale à

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_L \equiv -\,e\mathbf{B}/(2m_e).$$

Dans ce cas la force de Lorentz sera compensée par la force de Coriolis. Si l'on considère maintenant que le champ $\mathbf{H}$ est suffisamment faible, dans l'expression donnant la force $\mathbf{F}'$ dans le référentiel non inertiel on peut négliger la force centrifuge, qui est proportionnelle à ω^2, ce qui donnera $\mathbf{F}' = \mathbf{f}' = \mathbf{f}$.

On voit que si la vitesse angulaire du référentiel non inertiel est égale à $\boldsymbol{\omega}_L$, la force exercée sur les électrons dans ce référentiel est égale, à des termes quadratiques en ω_L près, à la force appliquée aux électrons dans le référentiel d'inertie en l'absence de champ magnétique extérieur. On peut donc affirmer que dans un champ magnétique uniforme et constant de faible intensité les électrons de l'atome se déplacent de la même façon qu'en l'absence de champ mais dans un référentiel tournant dont la vitesse angulaire est égale à $\boldsymbol{\omega}_L$. Cette même assertion peut être encore énoncée ainsi:

dans un faible champ magnétique l'atome, considéré comme un tout, précessionne à une vitesse angulaire ω_L autour de la direction de ce champ.

Cette proposition porte le nom de *théorème de Larmor* et la grandeur $\boldsymbol{\omega}_L$ s'appelle *fréquence de Larmor* (signalons que la fréquence

de Larmor est deux fois plus petite que la fréquence cyclotronique de l'électron se déplaçant sur une orbite circulaire dans un champ magnétique **H**).

Soulignons que le théorème de Larmor n'est valable que dans le cas d'un champ magnétique suffisamment faible, à savoir il est nécessaire que la force centrifuge soit beaucoup plus petite que la force de Coriolis, c'est-à-dire que soit vérifiée l'inégalité $v_a \gg \omega_L a$, où a est une longueur de l'ordre de grandeur des dimensions de l'atome et v_a, une vitesse de l'ordre de grandeur de la vitesse des électrons dans l'atome. Il est également clair que la validité du théorème de Larmor est étroitement liée au fait que le rapport e/m est le même pour toutes les particules mobiles de l'atome (c'est-à-dire les électrons). Si l'atome était constitué de particules mobiles de différentes espèces, pour lesquelles le rapport de la charge à la masse n'était pas le même, le théorème de Larmor ne serait plus valable.

On peut s'assurer de la validité du théorème de Larmor encore par le raisonnement suivant. Nous avons vu plus haut que si un atome possède un moment orbital **K** de l'impulsion, il possède également un moment magnétique $\mathbf{m}_L = [e/(2m_e)]\,\mathbf{K}$. D'un autre côté, le moment magnétique $\mathbf{m}_L$ acquiert dans le champ magnétique une énergie potentielle $U = -\mathbf{m}_L\mu_0\mathbf{H} = -m_L B\cos\vartheta$ (ϑ étant l'angle formé entre $\mathbf{m}_L$ et **H**). Le moment magnétique est donc soumis à un couple de forces de moment $N = -\mathrm{d}U/\mathrm{d}\vartheta = m_L B \sin\vartheta$ ou, sous forme vectorielle,

$$\mathbf{N} = [\mathbf{m}_L\mathbf{B}].$$

La dérivée par rapport au temps du moment de l'impulsion **K** doit être égale au moment de forces : $\dot{\mathbf{K}} = [\mathbf{m}_L\mathbf{B}]$. En nous rappelant la relation entre $\mathbf{m}_L$ et **K**, nous en tirons

$$\dot{\mathbf{K}} = \frac{e}{2m_e}[\mathbf{KB}].$$

Cette formule présente un sens physique bien simple : en tenant compte que la vitesse des points d'un corps solide en rotation se détermine par la formule $\mathbf{v} \equiv \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$, où $\boldsymbol{\omega}$ est le vecteur vitesse angulaire, **r**, le rayon vecteur du point et **v**, la vitesse du point, il est aisé de conclure que le vecteur **K** effectue un mouvement de précession autour de la direction du champ magnétique à une vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}_L = -e\mathbf{B}/(2m_e)$. Cette quantité n'est rien d'autre que la fréquence de Larmor. En même temps que le vecteur **K** l'atome tout entier participe à la précession de Larmor.

Mais d'un autre côté ceci nous conduit à un certain paradoxe. En effet, lors de la précession du vecteur **K** autour de la direction du champ **H** ni le module de ce vecteur, ni son inclinaison par rapport à **H** ne varient. Le moment magnétique $\mathbf{m}_L$ de l'atome (c'est un moment propre !) est proportionnel au moment de l'impulsion de l'atome **K**. C'est pourquoi le vecteur $\mathbf{m}_L$ effectue lui aussi une

précession uniforme autour de la direction du champ H, au cours de laquelle le module de $\mathbf{m}_L$ et l'angle d'inclinaison de $\mathbf{m}_L$ par rapport à H restent inchangés. Si l'on considère maintenant un gaz parfait d'atomes dont les moments magnétiques $\mathbf{m}_L$ sont orientés différemment, on verra que ces moments précessionnent indépendamment autour de H en conservant inchangée leur inclinaison sur le champ; cela signifie que le gaz considéré ne pourra jamais s'aimanter. On échappe à ce paradoxe en tenant compte du fait que le gaz n'est pas rigoureusement parfait : il est toujours le siège des collisions entre les atomes et c'est précisément ces collisions (ou d'autres processus d'interaction des atomes avec des objets n'entrant pas dans la composition du gaz) qui conduisent à l'aimantation du gaz, c'est-à-dire à la variation de l'orientation des moments magnétiques de ses atomes par rapport au champ. Il est clair que la durée du processus d'aimantation est d'autant plus longue que les collisions sont plus rares, si bien qu'on peut parler du *temps de relaxation de l'aimantation*.

Maintenant nous pouvons démontrer que si les atomes ne possèdent pas de moment magnétique propre, le gaz de tels atomes est diamagnétique. Partons de la formule donnant le moment magnétique orbital de l'atome

$$\mathbf{m}_L = \sum_a \frac{e}{2} [\mathbf{r}_a \mathbf{v}_a],$$

où $\mathbf{r}_a$ et $\mathbf{v}_a$ sont respectivement le rayon vecteur et la vitesse de l'a-ième électron dans l'atome et la sommation est étendue à tous les électrons entrant dans la composition de l'atome. Le vecteur vitesse de l'électron peut s'écrire d'après le théorème de Larmor sous la forme $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_a^0 + [\boldsymbol{\omega}_L \mathbf{r}_a]$, où $\mathbf{v}_a^0$ est la vitesse en l'absence de champ magnétique et $\boldsymbol{\omega}_L$, la fréquence de Larmor. En introduisant cette expression dans la formule de $\mathbf{m}_L$, nous obtenons

$$\mathbf{m}_L = \sum_a \frac{e}{2} [\mathbf{r}_a \mathbf{v}_a^0] + \sum_a \frac{e}{2} [\mathbf{r}_a [\boldsymbol{\omega}_L \mathbf{r}_a]].$$

Le premier terme de cette expression traduit le moment magnétique propre de l'atome, que nous désignerons par $\mathbf{m}_L^0$, et le second terme exprime le moment magnétique dû à la précession de Larmor. Nous le désignerons par $\mathbf{m}_d$ et écrirons sous la forme suivante :

$$\mathbf{m}_d = \sum_a \frac{e}{2} [\mathbf{r}_a [\boldsymbol{\omega}_L \mathbf{r}_a]] = \sum_a \frac{e}{2} \{\boldsymbol{\omega}_L r_a^2 - \mathbf{r}_a (\boldsymbol{\omega}_L \mathbf{r}_a)\}.$$

Supposons que l'atome présente une symétrie sphérique. Alors

$$\sum_a x_a y_a = \sum_a y_a z_a = \sum_a z_a x_a = 0;$$

$$\sum_a x_a^2 = \sum_a y_a^2 = \sum_a z_a^2 = \frac{1}{3} \sum_a r_a^2$$

et donc $\mathbf{m}_d = \frac{e}{3}\omega_L \sum_a r_a^2$. En portant $\omega_L = -e\mathbf{B}/(2m_e)$ dans cette expression et en notant $\sum_a r_a^2 = Z \langle r^2 \rangle$, où Z est le nombre d'électrons dans l'atome et $\langle r^2 \rangle$ la valeur moyenne du carré de la distance de l'électron au noyau, nous obtenons

$$\mathbf{m}_d = -\frac{e^2\mu_0}{6m_e} Z \langle r^2 \rangle \mathbf{H}.$$

Nous voyons que le moment magnétique de l'atome dû à la précession de Larmor est opposé au champ magnétique (cette conclusion ne dépend pas du signe de la charge de l'électron!).

Le moment magnétique global de l'atome est

$$\mathbf{m}_L = \mathbf{m}_L^0 - \frac{e^2\mu_0}{6m_e^2} Z \langle r^2 \rangle \mathbf{H}.$$

Il en résulte que l'aimantation du gaz se détermine par la formule

$$J = nm_L^0 \langle \cos\vartheta \rangle - \frac{e^2\mu_0}{6m_e} Z \langle r^2 \rangle nH,$$

où $\langle \cos\vartheta \rangle$ est la valeur moyenne du cosinus de l'angle que font entre eux les vecteurs $\mathbf{m}_L^0$ et $\mathbf{H}$. Le premier terme conduit à la susceptibilité paramagnétique, et le second, à la susceptibilité diamagnétique. Le plus souvent le premier terme est très supérieur au second, si bien que pour $m_L^0 \neq 0$ le second terme peut être négligé. Mais si $m_L^0 = 0$, seul le second terme subsiste et le gaz est dans ce cas diamagnétique dont la susceptibilité diamagnétique a pour expression

$$\chi_d = -\frac{e^2\mu_0}{6m_e} Z \langle r^2 \rangle n.$$

A la différence de la susceptibilité paramagnétique χ_p des gaz ordinaires, qui dépend de la température, la susceptibilité diamagnétique est indépendante de la température. La quantité χ_d est très petite. Par exemple, $\chi_d = -0{,}2\cdot 10^{-6}$ pour l'hélium et $\chi_d = -14{,}5\cdot 10^{-6}$ pour le bismuth. Pour les gaz, χ_p est beaucoup plus grand que $|\chi_d|$. L'ordre de grandeur du rapport est

$$|\chi_d|/\chi_p = \frac{e^2}{m_e}\frac{\langle r^2 \rangle}{\mu_B^2} kT,$$

et comme $\mu_B = e\hbar/(2m_e)$ et $\hbar^2/(m_e \langle r^2 \rangle)$ déterminent l'ordre de grandeur de l'énergie E_a de l'atome, nous pouvons écrire

$$|\chi_d|/\chi_p \sim kT/E_a.$$

En tenant compte que $E_a \sim 1$ eV $\sim 10\,000$ K, nous voyons que pour des gaz non dégénérés le rapport $|\chi_d|/|\chi_p|$ est très petit.

La susceptibilité diamagnétique est proportionnelle au carré de la dimension de l'atome (ou de la molécule). C'est pourquoi $|\chi_d|$ a une valeur relativement plus grande pour des substances constituées par de grosses molécules (le benzène, par exemple).

§ 12.5. Phénomènes galvanomagnétiques dans les métaux

L'influence du champ magnétique sur le mouvement des électrons de conduction dans les métaux conduit à une série de phénomènes désignés sous le terme commun de phénomènes *galvanomagnétiques*. Premièrement, c'est la résistivité des conducteurs qui varie sous l'effet d'un champ magnétique. Deuxièmement, si en l'absence de champ magnétique l'intensité de champ électrique **E** et la densité de courant ont même sens (le métal étant considéré comme isotrope), l'application du champ magnétique fait naître un champ électrique supplémentaire perpendiculaire à **B** et à **j**. Ce champ est dit *de Hall*, et le phénomène lui-même est appelé *effet Hall*. Donc, si pour $\mathbf{B} = 0$ l'intensité de champ électrique et la densité de courant sont liées, suivant la loi d'Ohm, par la relation $\mathbf{E} = \rho_0\mathbf{j}$, pour $\mathbf{B} \neq 0$, elles sont liées par la relation

$$\mathbf{E} = \rho\mathbf{j} + R\,[\mathbf{Bj}],$$

où ρ_0 et ρ sont les résistivités du conducteur respectivement pour $\mathbf{B} = 0$ et $\mathbf{B} \neq 0$ et R est une certaine constante (appelée *constante de Hall*).

Pour comprendre comment prennent naissance les champs de Hall, imaginons que la résistivité soit nulle, c'est-à-dire que les électrons ne subissent pas de collisions. Dans ce cas les électrons ne sont soumis qu'à la force $\mathbf{F} = e\,(\mathbf{E} + [\mathbf{vB}])$. Lors d'un mouvement stationnaire cette force doit s'annuler. Il est facile de s'assurer qu'avant le mouvement stationnaire la vitesse des électrons doit être égale à une *vitesse de dérive* $\mathbf{v}_d = [\mathbf{EB}]\,B^{-2}$. En multipliant $\mathbf{v}_d$ par en (n étant la densité d'électrons), nous trouvons la densité de courant :

$$\mathbf{j} = en\mathbf{v}_d = \frac{en}{B^2}\,[\mathbf{EB}].$$

Si $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$, on a

$$\mathbf{E} = R\,[\mathbf{Bj}], \quad R = 1/(en).$$

C'est ce champ qui est dit de Hall. Nous voyons que la constante de Hall est inversement proportionnelle à la densité d'électrons.

On doit ajouter à ce champ le champ lié aux collisions des électrons. Pour trouver ce dernier il est nécessaire de déterminer la densité de courant en présence des champs **E** et **B** et en tenant compte des collisions.

Ce problème doit se résoudre à l'aide de l'équation cinématique pour la fonction f (**p**) de distribution des électrons en présence de champs **E** et **B**. L'équation cinématique pour **B** = 0 a été établie au chapitre 9. Si **B** ≠ 0 et si la fonction de distribution f diffère peu de la distribution de Fermi f_0 en équilibre, l'équation cinématique prend la forme

$$e(\mathbf{E}+[\mathbf{vB}])\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}=-\frac{f-f_0}{\tau},$$

où $\mathbf{v} = d\varepsilon/d\mathbf{p}$ est la vitesse de l'électron et τ, le temps moyen entre deux collisions consécutives. Cette équation ne diffère de l'équation du chapitre 9 que par la force de Lorentz $e(\mathbf{E} + [\mathbf{vB}])$ intervenant au lieu de la force électrique $e\mathbf{E}$.

En introduisant l'écart de la fonction de distribution par rapport à la fonction de distribution en équilibre $f - f_0 = \varphi$ (tel que $|\varphi| \ll f_0$) et en tenant compte que

$$[\mathbf{vB}]\frac{df_0}{d\mathbf{p}}=[\mathbf{vB}]\frac{df_0}{d\varepsilon}\mathbf{v}=0,$$

nous obtiendrons à partir de l'équation cinématique une équation suivante pour la détermination de la fonction $\varphi(\mathbf{p})$ inconnue:

$$\frac{1}{\tau}\varphi(\mathbf{p})+e[\mathbf{vB}]\frac{\partial\varphi(\mathbf{p})}{\partial\mathbf{p}}=-e\mathbf{E}\mathbf{v}\frac{df_0}{d\varepsilon}.$$

Le champ électrique étant considéré faible, le terme en $e\mathbf{E}\partial\varphi/\partial\mathbf{p}$ est ici négligé.

Considérons le cas où $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$. En dirigeant **B** le long de l'axe z, récrivons l'équation de φ sous la forme

$$\frac{1}{\tau}\varphi+eB\left(v_y\frac{\partial}{\partial p_x}-v_x\frac{\partial}{\partial p_y}\right)\varphi=-e(E_xv_x+E_yv_y)\frac{df_0}{d\varepsilon}.$$

Supposons d'abord que l'énergie ε de l'électron de conduction est liée à son impulsion (plus exactement, à sa quasi-impulsion) **p** par la même relation $\varepsilon = p^2/(2m_e)$ que dans le cas d'un électron libre. Alors on devra chercher une fonction φ sous la forme

$$\varphi(\mathbf{p}) = \Phi_1(\varepsilon)\,v_x + \Phi_2(\varepsilon)\,v_y,$$

où Φ_1 et Φ_2 sont certaines fonctions de ε. En reportant cette expression dans l'équation de φ, nous obtenons

$$\frac{1}{\tau}\Phi_1-\omega_c\Phi_2=-eE_x\frac{df_0}{d\varepsilon};\qquad \frac{1}{\tau}\Phi_2+\omega_c\Phi_1=-eE_y\frac{df_0}{d\varepsilon},$$

d'où

$$\Phi_1=\frac{-e\tau(E_x+\omega_c\tau E_y)}{1+\omega_c^2\tau^2}\frac{df_0}{d\varepsilon};\qquad \Phi_2=\frac{-e\tau(E_y-\omega_c\tau E_x)}{1+\omega_c^2\tau^2}\frac{df_0}{d\varepsilon},$$

où $\omega_c = eB/m_e$ est la fréquence cyclotronique. Cherchons la densité de courant:

$$\mathbf{j}=2e\int \mathbf{v}f\nu(\varepsilon)\,d\varepsilon\frac{d\Omega}{4\pi},$$

où $\nu(\varepsilon)$ est la densité de niveaux énergétiques de l'électron. En tenant compte que $df_0/d\varepsilon = -\delta(\varepsilon - \varepsilon_0)$, nous obtenons

$$j_x=\sigma_0\frac{E_x+\omega_c\tau_0E_y}{1+\omega_c^2\tau_0^2};\qquad j_y=\sigma_0\frac{E_y-\omega_c\tau_0E_x}{1+\omega_c^2\tau_0^2},$$

où $\tau_0 = \tau(\varepsilon_0)$ et $\sigma_0 = e^2 n\tau_0/m_e$ est la conductivité électrique pour $H = 0$. Supposons que le courant passe le long de l'axe x. Dans ce cas $j_y = 0$ et donc $E_y = \omega_c\tau_0 E_x$. En introduisant cette expression dans la formule de j_x, nous obtenons $j_x = \sigma_0 E_x$. Ainsi, nous sommes arrivés à l'ancienne formule de la densité de courant faisant intervenir la conductivité σ_0 indépendante de **B**. L'effet du champ **B** ne se manifeste que par l'apparition d'un champ électrique transversal (champ de Hall)

$$E_y = \omega_c\tau_0 E_x = \frac{\omega_c\tau_0}{\sigma_0} j_x = RBj_x,$$

où $R = 1/(en)$ est la constante de Hall.

Une telle conclusion est liée à notre hypothèse sur le caractère de la dépendance de l'énergie de l'électron vis-à-vis de l'impulsion (quasi-impulsion); à savoir: nous avons supposé que $\varepsilon = p^2/(2m_e)$ et dans ce cas la valeur de la vitesse sur la frontière de la distribution de Fermi $\varepsilon = \varepsilon_0$ est la même pour tous les électrons, si bien que l'action du champ électrique transversal E_y compense la force transversale produite par le champ magnétique. Cela signifie que les électrons ne sont soumis qu'à l'action du champ longitudinal E_x et des collisions. Si les valeurs de la vitesse pour $\varepsilon = \varepsilon_0$ sont différentes pour divers électrons, la situation se modifie nettement. Expliquons ceci sur l'exemple de deux groupes d'électrons de conduction se trouvant dans deux bandes d'énergie. Nous supposerons que dans chacune de ces bandes l'énergie de l'électron est proportionnelle au carré de la quasi-impulsion, mais les masses des électrons sont différentes pour les deux bandes. Les temps de libre parcours moyen sont eux aussi différents et les signes des porteurs de charge dans les deux bandes peuvent être contraires. Dans ces conditions, les densités de courant $\mathbf{j}^{(1)}$ et $\mathbf{j}^{(2)}$ se déterminent pour chacune des bandes par les formules précédentes

$$j_x^{(\alpha)} = \frac{\sigma_\alpha E_x + R_\alpha B\sigma_\alpha^2 E_y}{1 + R_\alpha^2 B^2 \sigma_\alpha^2}, \qquad j_y^{(\alpha)} = \frac{\sigma_\alpha E_y - R_\alpha B\sigma_\alpha^2 E_x}{1 + R_\alpha^2 B^2\sigma_\alpha^2},$$

où l'indice $\alpha = 1, 2$ désigne le numéro de la bande. Les projections du courant résultant sont $j_x = j_x^{(1)} + j_x^{(2)}$; $j_y = j_y^{(1)} + j_y^{(2)}$.

En posant, comme précédemment, $j_y = 0$, nous trouverons le champ de Hall:

$$E_y = \frac{R_1\sigma_1^2 + R_2\sigma_2^2 + R_1R_2\sigma_1^2\sigma_2^2 B^2 (R_1 + R_2)}{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_1\sigma_2 (R_1^2\sigma_1 + R_2^2\sigma_2) B^2} BE_x.$$

En introduisant cette expression dans les formules donnant $j_x^{(\alpha)}$, on peut lier j_x et E_x, à savoir $j_x = \rho^{-1}E_x$, où ρ est la résistivité en présence de champ magnétique. En écrivant ρ sous la forme $\rho = \rho_0 + \Delta\rho$, où ρ_0 est la résistivité en l'absence de champ, nous obtiendrons

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{\sigma_1\sigma_2 (\sigma_1 R_1 - \sigma_2 R_2)^2 B^2}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + B^2\sigma_1^2\sigma_2^2 (R_1 + R_2)^2}.$$

Cette quantité est différente de zéro si $\sigma_1 R_1 \neq \sigma_2 R_2$, c'est-à-dire si $\tau_1/(m_1 e_1) \neq \tau_2/(m_2 e_2)$. Nous voyons qu'il suffit de supposer seulement que $m_1 \neq m_2$ pour que $\Delta\rho$ devienne non nul même pour $\tau_1 = \tau_2$ et $e_1 = e_2$. En outre, nous voyons que dans les faibles champs $\Delta\rho \sim B^2$.

En introduisant dans la formule de E_y le champ $E_x = \rho j_x$, nous trouvons la constante de Hall $R = E_y/(Bj_x)$. De même que la résistivité ρ, elle dépend de B et des temps de libre parcours $\tau_{1,2}$. Pour de *faibles champs*

$$R = \frac{R_1\sigma_1^2 + R_2\sigma_2^2}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2}.$$

On remarquera que cette quantité dépend non seulement des densités d'électrons mais également des temps de leurs libres parcours.

Regardons maintenant comment se comportent la résistivité magnétique (la réluctivité) ρ et la constante de Hall R dans le domaine des champs magnétiques forts. Il est aisé de se convaincre que dans ce cas $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$, d'où

$$R = \frac{1}{e_1 n_1 + e_2 n_2}.$$

Nous avons écrit ici spécialement les différentes charges pour les porteurs dans les deux bandes parce que dans une bande presque entièrement remplie les électrons se comportent comme des particules de charge contraire, c'est-à-dire comme des trous. C'est pourquoi si les deux bandes présentent la conduction par électrons, $R = e\,(n_1 + n_2)^{-1}$. Mais si la première bande présente la conduction par électrons, et la seconde par trous, $R = e\,(n_1 - n_2)^{-1}$.

Le comportement de la résistivité magnétique dans le domaine de fortes valeurs de B est différent suivant que la somme des constantes de Hall pour les deux bandes est nulle ou non nulle. Si $R_1 + R_2 \neq 0$, la résistivité dans le domaine des champs très intenses atteint sa valeur de saturation :

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2}\left(\frac{\sigma_1 R_1 - \sigma_2 R_2}{R_1 + R_2}\right)^2.$$

Au contraire, si le nombre d'électrons est égal à celui de trous, c'est-à-dire si $R_1 + R_2 = 0$, $\Delta\rho = \rho - \rho_0$ est toujours proportionnel à B^2 :

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{\sigma_1\sigma_2\,(\sigma_1 R_1 - \sigma_2 R_2)^2}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2}\,B^2.$$

Nous avons établi comment se comporte $\Delta\rho$ pour un modèle de deux bandes d'énergie que nous avons supposées isotropes. Les résultats obtenus sont également valables dans le cas anisotrope général où l'énergie de l'électron varie en fonction de sa quasi-impulsion suivant une loi complexe. La dépendance de la résistivité vis-à-vis de **B** tient alors à ce que la masse effective de l'électron dépend de la direction de son mouvement. Dans le cas anisotrope général, dans le domaine des champs magnétiques faibles, $\Delta\rho$ est comme précédemment proportionnel à B^2. Dans des champs forts, $\Delta\rho$ ne dépend pas en règle générale de B. Une exception est faite pour le cas où le nombre d'électrons est égal à celui de trous, lorsque $\Delta\rho$ reste proportionnel à B^2 pour des champs si intenses soient-ils.

Les phénomènes galvanomagnétiques que nous venons de considérer peuvent être dits *transversaux* parce que nous avons supposé que le champ magnétique était perpendiculaire au champ électrique et à la direction du courant électrique. Il semble à première vue que pour une autre configuration des champs aucun effet ne puisse intervenir, la force de Lorentz n'étant différente de zéro que dans le cas où le champ magnétique n'est pas parallèle au courant électrique. Or, il existe encore un *effet galvanomagnétique longitudinal* : la résistivité du métal varie dans un camp magnétique dont le sens est le même que celui de la densité de courant. Cet effet est d'origine quantique.

§ 12.6. Particularités caractéristiques des ferromagnétiques

Dans les conditions ordinaires, la susceptibilité magnétique de la plupart des substances paramagnétiques est faible, de sorte que leur aimantation J (même dans des champs forts) est petite par rapport à la valeur limite $J_\infty = nm$ correspondant à la valeur infinie de la quantité $\mu_0 mH/(kT)$ (m étant le moment magnétique de l'atome et n, la densité d'atomes). Or, il existe quelques paramagnétiques solides, en premier lieu de fer, dont l'aimantation atteint dans les conditions ordinaires des valeurs comparables à J_∞ même avec des champs infimes. (Pour des monocristaux de fer purs cela

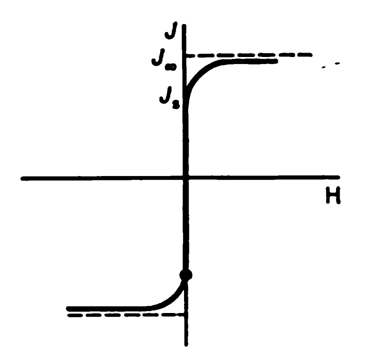


Fig. 12.1. Courbe d'aimantation idéalisée d'un ferromagnétique

Fig. 12.2. Variation de l'aimantation spontanée avec la température

s'observe dans des champs $H \sim 1$ A/m.) Ce sont des substances dites *ferromagnétiques*. Le groupe de ferromagnétiques réunit, en plus du fer, le cobalt, le nickel, le gadolinium, le disprosium, de nombreux composés et alliages contenant ces métaux (par exemple, le permalloy contenant 20 % Fe et 80 % Ni ou l'alliage de Geisler contenant 25 % Ni, 60 % Cu, 15 % Al).

Une courbe idéalisée d'aimantation d'un ferromagnétique est représentée schématiquement sur la figure 12.1 ; on y a souligné cette circonstance que pour $H \to 0$ le ferromagnétique possède une aimantation finie J_s. On l'appelle *aimantation spontanée*. C'est précisément l'existence de cette aimantation spontanée qui diffère les ferromagnétiques des autres cristaux (paramagnétiques et diamagnétiques). Il n'est pas obligatoire que l'aimantation spontanée soit comparable à la valeur limite de l'aimantation J_∞; il existe toute une série de ferromagnétiques (dits *faibles*, par exemple, le composé $ZrZn_2$), dont l'aimantation spontanée est petite devant J_∞. L'aimantation spontanée J_s dépend de la température : elle décroît lorsque la température s'élève. Le caractère de cette dépendance est

illustré par la figure 12.2. A une certaine température T_C, appelée *point* ou *température de Curie*, J_s s'annule. La température de Curie est de 1043 K pour le fer, 631 K pour le nickel, 1388 K pour le cobalt, 289 K pour le gadolinium et 600 K pour le Cu_2AlMn. Aux basses températures $T \ll T_C$ l'aimantation J_s diffère peu de sa valeur pour $T = 0$; à savoir : *la différence entre ces valeurs doit être théoriquement proportionnelle à $T^{3/2}$ (loi de Bloch en $T^{3/2}$).* En particulier, pour des ferromagnétiques dont l'aimantation atteint sa valeur limite possible J_∞ à zéro absolu (ce sont, par exemple, tous les diélectriques ferromagnétiques) on a $1 - J_s/J_\infty \sim (T/T_C)^{3/2}$.

Aux températures au-dessus du point de Curie, les propriétés spécifiques ferromagnétiques disparaissent, les substances devenant alors des paramagnétiques ordinaires dont la susceptibilité magnétique se définit par la formule

$$\chi = C/(T - T_C),$$

où C est une certaine constante. Cette variation de χ avec la température traduit la *loi de Curie-Weiss.* Au point de Curie, le passage de l'état ferromagnétique à l'état paramagnétique ordinaire s'accompagne d'une variation par saut de la capacité calorifique de la substance.

Sur la figure 12.1 schématique la courbe d'aimantation monte verticalement au point de $H = 0$, ce qui correspond au cas idéalisé de $(dJ/dH)_{H=0} = \infty$, c'est-à-dire à une valeur infiniment grande de la susceptibilité magnétique et donc à une valeur infiniment grande de la perméabilité magnétique μ. En réalité la valeur de dJ/dH est finie, de ce fait la perméabilité magnétique est elle aussi finie bien qu'elle puisse prendre des valeurs très grandes. Par exemple, pour le fer elle peut atteindre plusieurs milliers, et pour le permalloy, quelques centaines de milliers et même un million.

Cependant, la susceptibilité magnétique ne peut pas servir à caractériser l'état magnétique d'un ferromagnétique. Le fait est qu'à la différence des paramagnétiques et diamagnétiques ordinaires qui peuvent être appelés substances faiblement magnétiques et qui se caractérisent dans le domaine des faibles champs magnétiques par une susceptibilité magnétique bien déterminée, dépendant uniquement des paramètres internes inhérents à la substance (tels que le moment magnétique de l'atome et la densité d'atomes) ainsi que de la température, pour les ferromagnétiques il n'existe pas de susceptibilité univoque déterminée. Dans les cas où on peut l'introduire, elle se trouve dépendante du module et du sens de l'intensité du champ magnétique, du processus d'aimantation, du procédé de traitement du ferromagnétique et des impuretés qu'il contient. La situation correspondante est explicitée par la figure 12.3.

L'aimantation spontanée J_s du ferromagnétique est atteinte dans le champ H_A. Pour inverser l'aimantation de l'échantillon, il faut

se déplacer dans le plan (H, J) le long de la branche $(A, -H_c, A')$ représentée sur la figure par une courbe fermée (cette courbe s'appelle *boucle* ou *cycle d'hystérésis*, et le phénomène lui-même s'appelle *hystérésis*). Pour revenir à l'état précédent, nous suivons la branche (A', H_c, A). Si l'échantillon était initialement désaimanté, à son aimantation correspond une courbe quelconque (par exemple, OA) située à l'intérieur du cycle d'hystérésis. L'aimantation J_r est dite *rémanente*, et le champ H_c s'appelle *champ coercitif* ou *force coercitive*. La force coercitive dépend fortement du procédé de traitement de l'échantillon ferromagnétique ; elle est de $\sim 0,3$ A/m pour des nuances spéciales du fer pour transformateurs et de $\sim 1,6 \cdot 10^6$ A/m pour des aimants permanents spéciaux à haute stabilité. Quant à J_s, elle ne dépend pas du mode de traitement de l'échantillon, mais se détermine par le type de ferromagnétique et ne varie qu'avec la température.

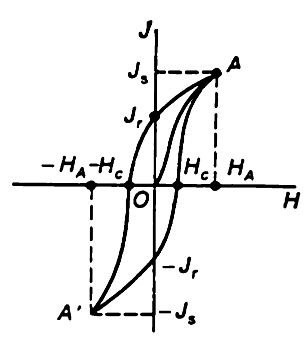


Fig. 12.3. Cycle d'hystérésis

La valeur de l'intensité du champ pour laquelle est atteinte l'aimantation J_s dépend notamment de l'orientation du champ **H** par rapport aux axes cristallographiques. Les directions pour lesquelles ce champ est minimal sont appelées *directions de facile aimantation* ou *directions d'aimantation privilégiées*. Dans le cas du fer par exemple elles coïncident avec les directions des arêtes du réseau cubique de ce métal.

Remarquons que quand on dit que la susceptibilité magnétique des ferromagnétiques est grande, on a en vue la forte valeur de la dérivée dJ/dH sur des parties fortement ascendantes du cycle d'hystérésis, mais il importe de souligner que la pente de la courbe d'aimantation dépend de H et donc la perméabilité μ ne peut servir à caractériser l'état magnétique d'un ferromagnétique.

§ 12.7. Nature du ferromagnétisme

Passons à l'étude de la nature du ferromagnétisme. Comme nous avons vu au § 12.2, une substance est paramagnétique si ses atomes sont doués d'un moment magnétique propre, soit orbital, soit de spin. Dans le cas des ferromagnétiques un rôle prépondérant est joué par les moments magnétiques de spin que possèdent des groupes déterminés d'électrons atomiques. La nature de spin du ferromagnétisme a été mise en évidence dans une *expérience* dite *d'Einstein-de Haas*. L'idée de cette expérience est basée sur le fait que le moment magnétique orbital $\mathbf{m}_L$ de l'atome est proportionnel au moment orbital de l'impulsion $\hbar\mathbf{L}$, alors que le moment de spin $\mathbf{m}_S$, au mo-

ment de spin de l'impulsion $\hbar S$ mais avec un double coefficient de proportionnalité. Aussi, lorsqu'un corps (n'importe quel paramagnétique!) s'aimante, le moment de l'impulsion de ses électrons doit subir une variation. Si la projection de **J** le long d'un axe z quelconque varie de ΔJ_z, la projection du moment de l'impulsion des électrons sur ce même axe variera elle aussi. Pour un volume unité, cette quantité que nous désignerons par ΔK_z sera proportionnelle à ΔJ_z: $\Delta K_z/\Delta J_z = 1/g$, où $g = \mu_B/\hbar = e/(2m_e)$ si le moment magnétique est d'origine orbitale et $g = 2\mu_B/\hbar = e/m_e$ si le moment magnétique est d'origine de spin (si les contributions au moment magnétique de l'atome sont apportées tant par le moment orbital que par le moment de spin, cette relation doit encore contenir le facteur de Landé).

Tenons maintenant compte que lors de son aimantation le corps n'est soumis à aucune force mécanique extérieure. De ce fait, le moment de l'impulsion du corps se conserve lors de l'aimantation, et comme la variation de l'aimantation est liée à la variation du moment de l'impulsion des électrons, c'est le moment de l'impulsion de l'ossature du corps, c'est-à-dire de son réseau cristallin, qui doit varier. Cela signifie qu'une variation de l'aimantation d'un échantillon suspendu doit provoquer la rotation de l'échantillon autour de l'axe le long duquel varie l'aimantation, et inversement, la rotation d'une barre ferromagnétique doit conduire à son aimantation. C'est précisément ce dernier effet qui a été observé dans les expériences précises de Garnett qui a montré que pour une barre de fer $g = e/m_e$. Par là même la nature de spin du ferromagnétisme a été démontrée expérimentalement.

Ainsi, nous en arrivons à cette conclusion que dans un ferromagnétique les spins des électrons dans un champ très minime sont orientés, en majorité écrasante, dans le sens du champ, et cette orientation n'est pas contrariée par l'agitation thermique si la température est inférieure à celle du point de Curie (plus exactement, il s'agit des spins d'un groupe déterminé d'*électrons* dits *magnétiques*: les électrons d dans les métaux du groupe de fer et leurs composés et les électrons f dans les terres rares et leurs composés). Aux températures plus élevées, l'orientation privilégiée disparaît, la substance devenant alors un paramagnétique ordinaire. Dans ce dernier cas, les différents moments magnétiques sont répartis, en l'absence de champ extérieur, de façon désordonnée, l'établissement de l'ordre dans le système de moments magnétiques étant empêché par l'agitation thermique. L'influence de cette dernière est telle que pour $H \sim 1$ A/m un seul sur 10^9 à 10^{10} moments est orienté dans le sens du champ, alors dans un ferromagnétique pour $T < T_C$ un tel champ produit une aimantation de saturation de l'ordre de 10^5 à 10^6 A/m. On peut dire que le ferromagnétique se caractérise par un état ordonné des moments magnétiques atomiques ou par une forte corrélation

entre les directions des moments magnétiques des différents porteurs de magnétisme (dans le fer, des électrons *d*). Une telle corrélation doit résulter d'une interaction déterminée entre les moments magnétiques, mais il est clair a priori que cette interaction ne peut pas être magnétique parce que l'interaction magnétique de deux moments magnétiques est très faible et se manifeste d'ailleurs dans tous les paramagnétiques qui sont loin d'être tous ferromagnétiques.

Puisque le ferromagnétisme est dû à l'existence des spins, les spins d'un groupe déterminé d'électrons présentent dans les ferromagnétiques de préférence une même orientation pour $T \leqslant T_C$. Cet effet n'est pas un effet classique mais purement quantique et est lié à ce que l'énergie d'un système d'électrons dépend considérablement des propriétés de symétrie de la fonction d'onde de ce système.

La fonction d'onde peut présenter des symétries spatiales différentes auxquelles correspondent des valeurs différentes de l'énergie du système d'électrons. Par exemple, si l'on prend la molécule d'hydrogène qui contient dans sa composition deux électrons, la fonction d'onde électronique peut soit rester inchangée, soit changer de signe lorsque les électrons sont permutés. Dans le premier cas — la fonction d'onde étant spatialement symétrique — l'énergie de la molécule est plus faible que dans le second cas où la fonction d'onde est spatialement antisymétrique. Mais les électrons obéissent au principe de Pauli qui indique que la fonction d'onde des électrons, compte tenu de leurs spins, change toujours en signe si les électrons sont échangés, en même temps que leurs spins. C'est pourquoi, dans le cas de la molécule d'hydrogène ayant une fonction d'onde spatialement symétrique les orientations des spins des électrons sont différentes, de sorte que le spin résultant de la molécule est nul. Au contraire, dans le cas d'une fonction d'onde spatialement antisymétrique les spins des deux électrons ont même orientation, si bien que leur spin résultant est égal à l'unité. Ainsi, par suite de l'indiscernabilité des électrons et de l'action du principe de Pauli, il apparaît une situation où l'énergie de la molécule d'hydrogène se trouve dépendante de la valeur du spin total des électrons. Cet effet est dit *d'échange*.

L'effet d'échange est à la base de la liaison chimique homopolaire : dans le système de deux atomes d'hydrogène, l'énergie $E_{\uparrow\downarrow}$ des atomes pour une orientation antiparallèle des spins des deux électrons est moindre que l'énergie $E_{\uparrow\uparrow}$ correspondant à l'orientation parallèle des spins, et la variation de $E_{\uparrow\downarrow}$ en fonction de la distance entre les atomes (c'est-à-dire entre leurs noyaux) présente un minimum auquel correspond précisément l'état stable de la molécule H_2 (fig. 12.4).

L'effet d'échange est également à la base du ferromagnétisme. Un cristal ferromagnétique peut être considéré comme une molécule géante, au minimum d'énergie de laquelle correspond l'orientation

parallèle des spins de tous ses électrons (plus exactement, des électrons magnétiques) et non pas antiparallèle comme dans le cas de la molécule d'hydrogène. L'état d'énergie minimale est atteint pour 0 K, ce minimum correspondant à la valeur maximale du spin total des électrons, c'est-à-dire à l'aimantation maximale possible du cristal. A des températures suffisamment basses $T < T_C$, l'aimantation est encore très grande. (Cette explication de la nature du ferromagnétisme a été proposée par Heisenberg et Frenkel et indépendamment d'eux par Dorfmann.)

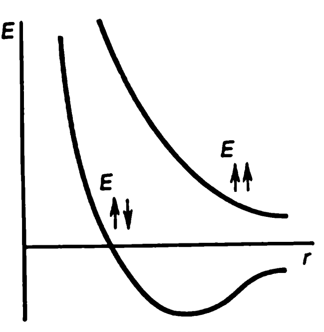


Fig. 12.4. Explication de l'effet d'échange

Si le spin pouvait se décrire par un vecteur classique, une partie de l'énergie de deux électrons, dépendant de leurs spins, contenait un produit scalaire des spins $\mathbf{s}_1$ et $\mathbf{s}_2$ des deux électrons, c'est-à-dire serait de la forme $E_s = -I\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2$, où I est une certaine fonction de la distance entre les électrons (on l'appelle *intégrale d'échange*). Tout dépend du signe de cette fonction. Si $I > 0$, l'énergie correspondant à l'orientation parallèle des spins est moindre que celle correspondant à l'orientation antiparallèle; au contraire, si $I < 0$, c'est à l'orientation antiparallèle que correspond une énergie plus faible. Le second cas est réalisé dans la molécule d'hydrogène, et le premier, dans un cristal ferromagnétique. C'est pourquoi l'état dans lequel les spins de tous les électrons du ferromagnétique sont parallèles l'un à l'autre possède une énergie minimale. C'est cet état qui est réalisé pour 0 K. La valeur de $I = \xi e^2/(4\pi\varepsilon_0 a)$ se détermine par l'énergie électrostatique d'interaction des électrons de deux atomes voisins, a est ici la distance entre les atomes et ξ, un coefficient numérique nettement inférieur à l'unité. Ainsi,

la corrélation de spins est un effet quantique lié à la variation de l'énergie d'un système d'électrons en fonction de leur spin total et l'ordonnancement magnétique des ferromagnétiques est une conséquence de la corrélation de spins.

Quant à la dépendance de l'énergie d'un système d'électrons vis-à-vis du spin total, on dit qu'elle est due à l'interaction d'échange et on appelle *énergie d'échange* la partie de l'énergie $E_s = -I\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2$ des électrons.

Cependant, il faut se garder de penser que la corrélation de spins et l'état ordonné des moments magnétiques atomiques qui lui est lié ont toujours le même caractère que dans les ferromagnétiques, c'est-à-dire que dans les cristaux magnétiquement ordonnés au minimum d'énergie correspond toujours une même orientation des spins et donc une même orientation des moments magnétiques des élec-

trons. Des cas plus complexes des états ordonnés des moments magnétiques atomiques peuvent se présenter en pratique. Par exemple, les cristaux de nombreux sels des métaux du type de fer sont constitués par l'ensemble de deux sous-réseaux, emboîtés l'un dans l'autre et ayant chacun une aimantation différente de zéro, alors que l'aimantation totale du cristal est nulle. De tels cristaux sont appelés *antiferromagnétiques*. De même que dans les ferromagnétiques, l'état ordonné magnétique des antiferromagnétiques est limité par le domaine des basses températures, à savoir, la température ne doit pas excéder une certaine température déterminée appelée *température de Néel*. Enfin, il existe encore des cristaux magnétiquement ordonnés, dits *ferrites*, qui se composent de plusieurs sous-réseaux magnétiques ayant chacun son aimantation propre, mais à la différence des antiferromagnétiques la somme vectorielle de toutes leurs aimantations ne s'annule pas en l'absence de champ magnétique extérieur. Par exemple, les sels $MnO \cdot Fe_2O_3$ et $3Y_2O_3 \cdot 5Fe_2O_3$ sont des ferrites.

L'interaction d'échange des électrons dans le ferromagnétique conduit à l'orientation parallèle de leurs spins et donc à celle de leurs moments magnétiques. Or, le même effet est produit par un champ magnétique extérieur. On peut donc tenir compte de l'interaction d'échange de façon phénoménologique, en ajoutant au champ magnétique extérieur $\mathbf{H}^{(e)}$ un certain champ efficace $\mathbf{H}_W$. Ce champ efficace (qui est fictif!) porte le nom de *champ moléculaire de Weiss*. Puisque nous n'avons à notre disposition qu'un seul vecteur, l'aimantation $\mathbf{J}$, il est naturel de supposer que $\mathbf{H}_W = \nu\mathbf{J}$, où ν est une certaine constante sans dimensions. Ainsi, nous supposerons que l'interaction d'échange jointe au champ magnétique extérieur sont équivalents d'après leur action à un champ résultant $\mathbf{H}^* = \mathbf{H}^{(e)} + \nu\mathbf{J}$.

Rappelons-nous maintenant que l'aimantation d'un gaz paramagnétique dont le paramagnétisme est d'origine de spin, se définit par la formule

$$J = n\mu_B \operatorname{th} \frac{\mu_0\mu_B H^{(e)}}{kT}.$$

Comme le ferromagnétisme est lui aussi d'origine de spin, il est naturel de lui appliquer la même formule à condition de substituer H^* à $H^{(e)}$, il vient

$$J = n\mu_B \operatorname{th} \frac{\mu_0\mu_B (H^{(e)} + \nu J)}{kT}.$$

Cette formule représente une équation transcendante de l'aimantation $J = J(H^{(e)}, T)$ qui la définit en fonction de $H^{(e)}$ et T.

En introduisant des variables sans dimensions

$$y = \frac{J}{n\mu_B}, \quad x = \frac{\mu_0\mu_B H^*}{kT}, \quad x_0 = \frac{\mu_0\mu_B H^{(e)}}{kT},$$

nous obtenons

$$y = \operatorname{th} x, \quad y = \frac{kT}{\mu_0 n \mu_B^2 \nu}(x - x_0).$$

Pour trouver les valeurs de x et y satisfaisant à ces équations il est commode de représenter la variation de y en fonction de x graphiquement (fig. 12.5, $\alpha = kT/(n\mu_B^2\nu\mu_0)$) et de déterminer les points d'intersection de la courbe de tangente hyperbolique et de la droite. Nous voyons que pour $x_0 = 0$ (c'est-à-dire pour $H^{(e)} = 0$) l'équation peut avoir, en plus de la solution banale $y = x = 0$, encore une solution non triviale $y \neq 0$. A cet effet, il faut que la droite $y = \alpha x$ forme avec l'axe x un angle plus petit que la pente de la tangente sur la courbe hyperbolique pour $x = 0$. La tangente de cet angle est égale à 1, de sorte que doit être vérifiée l'inégalité $kT/(n\mu_B^2\nu\mu_0) < 1$ ou $T < T_C$, où $T_C = n\mu_B^2\nu\mu_0/k$.

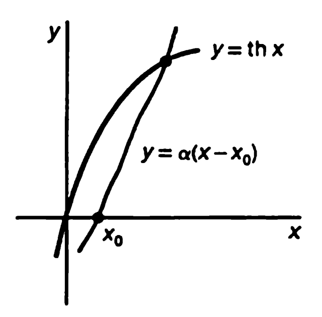


Fig. 12.5. Résolution de l'équation de Weiss

Ainsi, nous en arrivons à cette conclusion que le ferromagnétique peut posséder une aimantation non nulle en l'absence de champ magnétique extérieur, il faut seulement que sa température soit au-dessous d'une certaine température déterminée T_C, c'est-à-dire de la température du point de Curie. Or, c'est la propriété fondamentale du ferromagnétique qui s'explique, comme nous le voyons, par l'hypothèse sur l'existence d'un champ moléculaire interne. Il y a plus que cela, l'hypothèse sur le champ moléculaire permet d'expliquer d'autres propriétés des ferromagnétiques : leur comportement pour $T > T_C$ et une variation en saut de la capacité calorifique à $T = T_C$. Si $T > T_C$, l'aimantation est nulle en l'absence de champ extérieur. C'est pourquoi lorsque $H^{(e)}$ est faible, l'aimantation J l'est aussi et on peut considérer que $y = \operatorname{th} x \sim x$. Ceci nous conduit à l'équation $x = (x - x_0)\, T/T_C$, d'où $y = x = x_0 T/(T - T_C)$, c'est-à-dire que $J = \chi H$, où

$$\chi = \frac{\mu_0 n \mu_B^2}{k(T - T_C)}.$$

Mais cette expression ne traduit rien d'autre que la loi de Curie-Weiss.

Si $T \to 0$, il résulte de l'équation de Weiss que $J = n\mu_B\,[1 - 2\exp(-2T_C/T)]$. Toutefois cette relation n'est pas confirmée par l'expérience : pour $T \ll T_C$ c'est une autre relation : $J(0) - J(T) \sim (T/T_C)^{3/2}$, qui est valable. Ainsi, l'hypothèse de champ moléculaire qui explique les caractéristiques fondamentales du

ferromagnétisme et en premier lieu l'existence d'aimantation spontanée, ne peut être considérée comme parfaitement adéquate dans le domaine des basses températures.

Avant de clore ce paragraphe, évaluons le champ moléculaire $H_W = \nu J$. En posant $n\mu_B \equiv J_\infty \sim 1{,}4\cdot10^5$ A/m et $T_C \sim 10^3$ K, nous trouvons $\nu \sim 10^4$ et donc $H_W \sim 1{,}2\cdot10^9$ A/m. Nous avons obtenu une valeur colossale qui ne peut aucunement s'expliquer par une interaction magnétique entre les moments magnétiques de spin. La valeur de H_W correspond à une interaction d'échange dont l'énergie se détermine par l'énergie électrostatique d'interaction entre les électrons.

§ 12.8. Energie d'échange et énergie d'anisotropie magnétique

En faisant la somme des énergies d'échange de toutes les paires d'électrons, nous obtiendrons l'énergie d'échange totale W_e du ferromagnétique :

$$W_e = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} I_{ij}\mathbf{s}_i\mathbf{s}_j,$$

où $\mathbf{s}_i$ est le spin du i-ième électron et I_{ij}, l'intégrale d'échange entre les i-ième et j-ième électrons (le facteur 1/2 apparaît du fait que chaque paire d'électrons ne doit être comptée qu'une seule fois). L'intégrale d'échange I de deux électrons appartenant à des atomes voisins détermine le champ moléculaire de Weiss H_W et la température du point de Curie T_C du ferromagnétique : $\mu_0\mu_B H_W \sim kT_C \sim I$ (par exemple, pour le fer, $kT_C \sim 2I$).

En considérant les spins $\mathbf{s}_i$ comme des vecteurs classiques, on peut récrire l'expression de l'énergie d'échange du ferromagnétique sous la forme

$$W_e = -\frac{1}{2}s^2\sum_{i,j} I_{ij}\cos\varphi_{ij},$$

où φ_{ij} est l'angle entre $\mathbf{s}_i$ et $\mathbf{s}_j$. Puisque $I_{ij} > 0$, au minimum d'énergie W_e, c'est-à-dire à l'énergie de l'état fondamental du ferromagnétique, correspond une même orientation de tous les spins : $\varphi_{ij} = 0$. Pour les faibles valeurs de φ_{ij}, l'énergie (d'échange) est supérieure à celle de l'état fondamental d'une quantité

$$\delta W_e = \frac{1}{4}s^2\sum_{i,j} I_{ij}\varphi_{ij}^2.$$

Si les orientations des spins des électrons ne sont pas les mêmes, l'orientation du vecteur aimantation **J** est elle aussi différente en divers endroits du ferromagnétique, bien que son module soit partout

le même. Aussi, une variation du vecteur **J** pour $T \ll T_C$ se ramène-t-elle à ses rotations par rapport au vecteur aimantation $\mathbf{J}_0$ correspondant à l'état fondamental. Pour de petites rotations φ il est évident que $\delta J = |\mathbf{J} - \mathbf{J}_0| \approx J_0\varphi$, c'est-à-dire que l'angle de rotation est proportionnel à l'écart de **J** par rapport à $\mathbf{J}_0$. Il en résulte que φ_{ij} est une fonction linéaire de la différence de vecteurs $\delta\mathbf{J}(\mathbf{r}_i) - \delta\mathbf{J}(\mathbf{r}_j) = \mathbf{J}(\mathbf{r}_i) - \mathbf{J}(\mathbf{r}_j)$, où $\mathbf{J}(\mathbf{r}_i)$ est l'aimantation au point $\mathbf{r}_i$. La quantité $I_{ij} \equiv I(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$ décroît rapidement lorsque $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ augmente, de sorte que la contribution principale à la somme W_e est apportée par les paires d'électrons des atomes voisins. Mais dans ce cas

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}_i) - \mathbf{J}(\mathbf{r}_j) \approx \left([\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j]\,\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\mathbf{J}(\mathbf{r}),$$

c'est-à-dire que φ_{ij} est une fonction linéaire des dérivées spatiales du vecteur **J** (**r**). Cela signifie que δW_e est une fonction quadratique des dérivées spatiales de **J** (**r**). Par exemple, si on la reporte à l'unité de volume, la variation de l'énergie d'échange en cas d'apparition d'une aimantation non uniforme (on l'appelle *densité d'énergie de l'inhomogénéité magnétique*) pour un cristal ferromagnétique de symétrie cubique, disons de Fe, est de la forme

$$\delta W_e = \frac{\alpha\mu_0}{2}\left[\left(\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial z}\right)^2\right].$$

où α est une certaine constante proportionnelle à I. On l'appelle *constante d'interaction d'échange inhomogène*; elle est de l'ordre de grandeur de $\alpha = kT_C a^2/(\mu_0\mu_B^2 n)$ (n étant le nombre d'électrons magnétiques par unité de volume).

Nous voyons qu'à l'orientation parallèle des spins de tous les électrons correspond un minimum d'énergie d'échange du ferromagnétique. Cette orientation peut pourtant être quelconque parce qu'au point de vue de l'énergie d'échange toutes les directions sont équivalentes: l'expression de W_e ne fait intervenir que des produits scalaires des spins dépendant des angles formés entre les spins, elle ne comprend aucune direction privilégiée. Cela signifie qu'au minimum de densité de l'énergie d'échange correspond une aimantation uniforme **J**, mais la direction de **J** n'est pas déterminée par l'énergie W_e.

Cependant l'aimantation uniforme **J** d'un cristal ferromagnétique a une direction bien déterminée même en l'absence de champ extérieur (direction d'aimantation privilégiée). Cela signifie qu'à de différentes directions de **J** (le module de **J** étant invariable) doivent correspondre des valeurs différentes de l'énergie du cristal ferromagnétique: de l'énergie totale dont une partie est constituée par l'énergie d'échange indépendante de la direction de **J**. Quant à la direction de facile aimantation, c'est le minimum d'énergie qui doit

lui correspondre. Pour comprendre ce phénomène, c'est-à-dire l'anisotropie magnétique, il faut tenir compte du fait que les électrons responsables du ferromagnétisme se déplacent dans un champ électrique **E** régnant à l'intérieur du cristal. Cela signifie que l'électron est soumis à un champ magnétique $\mathbf{H} = \varepsilon_0 [\mathbf{vE}]$, où $\mathbf{v}$ est la vitesse de l'électron, et donc l'énergie de l'électron dans ce champ est $-\mu_0 \mathbf{m}_s \mathbf{H} = 2\varepsilon_0 \mu_B \mathbf{s} [\mathbf{vE}]/c^2$, $\mathbf{m}_s = -2\mu_B \mathbf{s}$ étant le moment magnétique de spin de l'électron. Cette énergie dépend de l'orientation du spin **s** de l'électron par rapport au champ électrique **E** à l'intérieur du cristal. Maintenant nous devons prendre la somme de ces énergies pour tous les électrons. Nous obtiendrons alors une énergie complémentaire (par rapport à l'énergie d'échange) du cristal ferromagnétique qui dépend de l'orientation du vecteur **J** par rapport au champ **E** et donc par rapport aux axes cristallographiques du ferromagnétique. Cette énergie est appelée *énergie d'anisotropie magnétique.*

Proposons-nous d'évaluer cette énergie. A cet effet, remarquons que $E \sim e/(4\pi\varepsilon_0 a^2)$, où a est une longueur de l'ordre de grandeur de la constante de réseau cristallin. En tenant compte que $\mu_B = e\hbar/(2m_e)$, nous obtenons

$$\mu_0 m_s H \sim \frac{e\hbar}{m_e} \frac{v}{c^2} \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a^2} .$$

Mais $\hbar/a \sim m_e v$, où v est une quantité de l'ordre de grandeur de la vitesse d'un électron atomique, et $e^2/(4\pi\varepsilon_0 a)$ est de l'ordre de grandeur de l'énergie d'échange des électrons. L'énergie d'anisotropie magnétique est donc de l'ordre de grandeur de l'énergie d'échange multipliée par $(v/c)^2$. Pour $v \sim 10^6$ m/s, le rapport des deux énergies vaut 10^{-4}.

L'énergie d'anisotropie magnétique dépend de la direction du vecteur aimantation **J** par rapport aux axes cristallographiques du ferromagnétique. Pour les cristaux uniaxiaux, par exemple, les cristaux de cobalt appartenant au système hexagonal, l'énergie d'anisotropie est fonction de l'angle θ que le vecteur **J** fait avec l'axe hexagonal. Si nous introduisons la densité d'énergie d'anisotropie magnétique w_a, nous pouvons l'écrire pour le cobalt de façon approchée sous la forme $w_a = K \sin^2 \theta$, où K est une certaine quantité indépendante de l'angle θ mais dépendant de la température et des contraintes élastiques s'exerçant dans le cristal. A la température ordinaire, la constante K pour le cobalt est égale à $0{,}4 \cdot 10^6$ J·m^{-3}. Pour les cristaux de système cubique, le fer par exemple,

$$w_a = K_1 (\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2) + K_2\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2,$$

où α_1, α_2, α_3 sont les cosinus directeurs du vecteur **J** par rapport aux arêtes du cube, et K_1, K_2, des constantes. A la température ordinaire,

pour le fer $K_1 = 4{,}2 \cdot 10^4$ J·m^{-3}, $K_2 = 1{,}5 \cdot 10^4$ J·m^{-3}. Nous voyons que l'énergie d'anisotropie du fer est d'un ordre de grandeur inférieure à celle du cobalt. Bien que la valeur de l'énergie d'anisotropie magnétique soit relativement faible, elle joue un rôle important parce que c'est grâce à son existence que l'aimantation spontanée d'un cristal prend une direction déterminée. Pour le fer c'est la direction de l'une quelconque des arêtes du cube de la cellule cristalline, pour le nickel ce sont les diagonales des faces du cube et pour le cobalt, l'axe hexagonal.

L'énergie magnétique, c'est-à-dire l'énergie du champ magnétique $\mathbf{H}^{(m)}$ produit par les moments magnétiques de spin eux-mêmes du ferromagnétique est de l'ordre de grandeur de l'énergie d'anisotropie magnétique. La densité de cette énergie est de toute évidence égale à $w_m = \mu_0 (H^{(m)})^2/2$. Enfin, dans le cas où le ferromagnétique est placé dans un champ extérieur $\mathbf{H}^{(e)}$ il apparaît encore une énergie d'interaction entre le moment magnétique du ferromagnétique et ce champ, dont la densité $w_H = -\mu_0 \mathbf{J}\mathbf{H}^{(e)}$.

§ 12.9. Structure en domaines des ferromagnétiques

Un solide ferromagnétique est divisé en régions macroscopiques, en contact l'une avec l'autre, appelées *domaines*, dont chacun possède une aimantation J_s, mais ces aimantations ont des orientations différentes, de sorte que l'aimantation résultante de l'échantillon tout entier en l'absence de champ extérieur est nulle.

Proposons-nous de montrer qu'en l'absence de champ magnétique extérieur un ferromagnétique présentant une structure en domaines

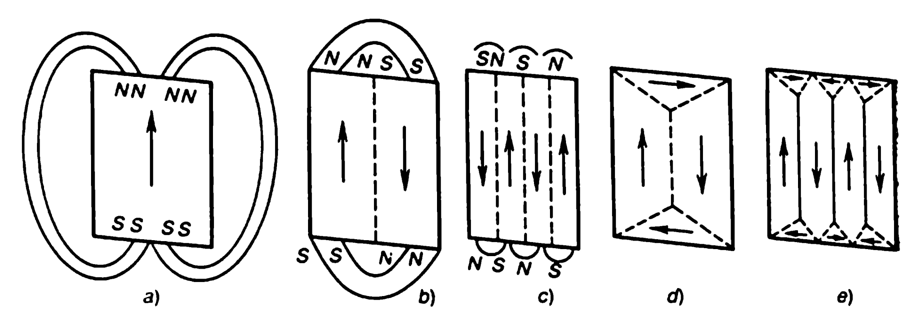


Fig. 12.6. Explication de la structure en domaines des ferromagnétiques

(l'idée d'existence de domaines a été émise par Weiss) possède une énergie moindre que celle d'un ferromagnétique à aimantation uniforme. Cela est lié à une diminution de l'énergie magnétique de l'échantillon lorsqu'il affecte une structure en domaines. La figure 12.6 explique cette situation. La figure 12.6, *a* se rapporte à un échantillon monodomaine. Elle montre les lignes de force magnétique à l'extérieur du cristal : elles embrassent un volume proportionnel au

cube des dimensions linéaires des surfaces supérieure et inférieure de l'échantillon. L'énergie du champ est dans ce cas grande et il est clair que si nous prenons une structure à deux domaines, lorsque l'échantillon est constitué de deux parties dont les aimantations sont orientées dans des sens opposés (fig. 12.6, *b*), son énergie sera près de deux fois plus faible que celle d'un échantillon monodomaine. Dans le cas d'une structure à quatre domaines (fig. 12.6, *c*) l'énergie sera encore plus faible, approximativement de quatre fois, et dans une structure à N domaines l'énergie sera approximativement N fois plus faible que dans une structure monodomaine. On peut également imaginer des domaines ayant une autre forme et une autre position relative, par exemple, ceux représentés par les figures 12.6, *d* et *e*.

Il semble à première vue qu'énergétiquement une structure est d'autant plus avantageuse que le nombre de domaines qu'elle contient est plus grand. Mais en réalité il n'en est pas ainsi. Le fait est qu'en plus de l'énergie magnétique on doit tenir compte de l'énergie d'échange dont la valeur est minimale dans le cas d'une aimantation uniforme. Or, le passage d'un domaine à un autre s'accompagne d'une brusque variation de la direction d'aimantation, ce qui doit avoir pour effet une forte augmentation de l'énergie d'échange. Cela résulte de l'expression $-\frac{1}{2}s^2\sum\limits_{ij} I_{ij}\cos\varphi_{ij}$ de l'énergie d'échange qui montre qu'une rotation brusque des spins est énergétiquement désavantageuse et, au contraire, il est énergétiquement plus avantageux que la rotation des spins se produise lentement.

Nous pouvons en conclure qu'au point de vue énergétique il est avantageux que deux domaines voisins soient séparés par une couche de passage (appelée *paroi de Bloch*) dans laquelle l'angle entre les directions des spins voisins soit petit et seul l'angle entre les spins de part et d'autre de cette couche soit égal à 180°. En effet, à la rotation d'un angle φ de deux spins l'un par rapport à l'autre correspond une énergie d'échange supplémentaire $\frac{1}{4}s^2I\varphi^2$ (l'angle φ est supposé petit). Si on place entre ces spins encore N spins de telle sorte que la rotation entre chaque paire de spins voisins se fasse de l'angle φ/N, l'énergie d'échange entre deux spins voisins deviendra égale à $\frac{1}{4}s^2I(\varphi/N)^2$, et l'énergie d'échange totale de N spins sera proportionnelle à $Is^2\varphi^2/N$, c'est-à-dire sera N fois plus faible que l'énergie correspondant à une rotation brusque directe des spins de l'angle φ.

Une question se pose : quel est le nombre N ? Pour le trouver il faut tenir compte non seulement de l'énergie d'échange mais également de l'énergie d'anisotropie magnétique. Calculons l'énergie totale σ_W (somme de l'énergie d'échange et de l'énergie d'anisotropie magnétique) de la paroi de Bloch en la rapportant à l'unité de sur-

face. Pour chacune des chaînes de N atomes situées le long de l'épaisseur de la paroi l'énergie d'échange est égale à $\pi^2 Is^2/(4N)$. Le nombre de telles chaînes par unité de surface est égal à a^{-2} (a étant la distance atomique), de sorte que l'énergie d'échange totale vaut $\pi^2 Is^2/(4Na^2)$. Puis, si K est l'énergie d'anisotropie magnétique par unité de volume, l'énergie par unité de surface de la paroi de Bloch sera égale à KNa. On peut donc écrire

$$\sigma = \frac{\pi^2 Is^2}{4Na^2} + KNa.$$

Cette quantité est fonction de N et passe évidemment par un minimum pour $N = [\pi^2 Is^2/(4Ka^3)]^{1/2}$. L'épaisseur correspondante de la paroi a pour valeur

$$\delta = Na = a\left(\frac{\pi^2 Is^2}{4Ka^3}\right)^{1/2}.$$

En tenant compte que $I \sim kT_C$ et $K \sim 10^4$ J·m^{-3} (10^5 ergs·cm^{-3}), nous trouvons que $\delta \sim 300a \sim 100$ nm. L'énergie de la paroi rapportée à l'unité de surface peut s'interpréter comme une énergie superficielle du domaine ferromagnétique :

$$\sigma_W = 2\pi\,(IKs^2/a)^{1/2}.$$

Pour le fer cette quantité $\sigma_W \sim 10^{-3}$ J·m^{-2}.

Nous pouvons revenir maintenant à la structure en domaines des ferromagnétiques. Pour pouvoir déterminer le nombre de domaines qui doivent se former dans une configuration donnée, il faut rechercher l'énergie totale du ferromagnétique, en tenant compte de l'énergie superficielle des domaines et la minimiser par rapport au nombre de domaines ou par rapport aux paramètres caractérisant la forme et la disposition des domaines. Considérons par exemple la structure en domaines représentée par la figure 12.7. Nous trouverons le nombre de domaines à partir de la condition que l'énergie du ferromagnétique égale à la somme de l'énergie magnétique et de l'énergie superficielle des domaines soit minimale. L'énergie magnétique du ferromagnétique s'exprime par la formule générale

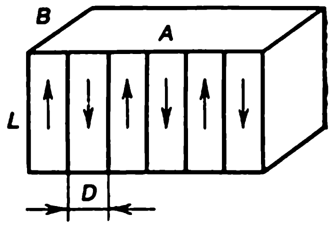


Fig. 12.7. Détermination du nombre de domaines dans un échantillon

$$W_M = -\frac{\mu_0}{2}\int \mathbf{J}\mathbf{H}^{(m)}\,dV,$$

où $\mathbf{H}^{(m)}$ est l'intensité du champ propre produit par l'aimantation $\mathbf{J}$, et l'intégration est effectuée sur tout le volume du ferromagnétique. Comme le montre la formule, il suffit de connaître le champ $\mathbf{H}^{(m)}$ seulement à l'intérieur du ferromagnétique. Lorsque le nombre de domaines est élevé, ce champ est concentré principalement au voisi-

nage des frontières supérieure et inférieure du corps, sa profondeur de pénétration étant de l'ordre de grandeur de D, c'est-à-dire de l'ordre de grandeur de la largeur du domaine. L'intensité de champ dans cette région frontière est proche de —**J**. C'est pourquoi l'énergie magnétique est de l'ordre de $W_M \sim 2\mu_0 J_0^2 DAB$, où A et B sont les dimensions de la section du ferromagnétique, perpendiculaire au vecteur aimantation. (Le facteur 2 s'explique par la présence de deux frontières du ferromagnétique, un calcul précis donne pour ce facteur une valeur de 1,7.)

L'énergie superficielle est égale à l'énergie $\sigma_W LB$ de la paroi de Bloch (L étant la hauteur de l'échantillon), multipliée par le nombre de surfaces de séparation égal à A/D. Ainsi, l'énergie totale du ferromagnétique

$$W = \sigma_M \frac{L}{D} AB + 2\mu_0 J_0^2 DAB.$$

Il s'agit maintenant de minimiser cette expression par rapport à D. Il est facile de voir que la condition de minimum est de la forme $\sigma_W L/D = 2\mu_0 J_0^2 D$, d'où nous tirons

$$D = \left(\frac{\sigma_W L}{2\mu_0 J_0^2}\right)^{1/2}.$$

Pour $L = 1$ cm, en considérant que $\sigma_W \sim 2\cdot 10^{-2}$ J·m^{-2} et J $\sim$ $\sim 10^5$ A·m^{-1}, nous obtenons pour la largeur du domaine une valeur de l'ordre de $D \sim 10^{-5}$ m. Rappelons que la largeur de la paroi de Bloch δ est de l'ordre de 10^{-7} m, de sorte que $\delta \ll D$ ainsi qu'il doit l'être pour que le concept de domaine ait un sens physique.

Pour une largeur optimale du domaine, l'énergie de la structure en domaines $W_D = wS$, où $w = 2\,(\mu_0 2 J_0^2 \sigma_W /L)^{1/2}$ et $S = AB$. Pour $L = 1$ cm on a $w \sim 7$ J·m^{-2}, alors que dans un cristal monodomaine l'énergie du ferromagnétique serait approximativement égale à $\mu_0 J^2 LS$, ce qui est, pour $J \sim 10^5$ A·m^{-1} et $L = 1$ cm, 10^3 fois plus grand que l'énergie W_D. Nous voyons que la formation de domaines entraîne une diminution considérable de l'énergie du ferromagnétique.

On remarquera que les dimensions D du domaine dépendent de celle L de l'échantillon de telle sorte que $D \sim L^{1/2}$. Pour des épaisseurs suffisamment petites de l'échantillon, dans le cas des couches minces de $L \sim 10^{-8}$ m, D est de l'ordre de grandeur de L. Dans ce cas, la formation de domaines est énergétiquement désavantageuse et ils ne se forment pas.

Pour pouvoir observer les domaines expérimentalement, on utilise la métode qui consiste à déposer sur l'échantillon une mince couche de suspension colloïdale de particules ferromagnétiques très fines. Ces particules se disposent le long des frontières entre les domaines ; en les observant au microscope, on peut voir les frontières des domaines.

La structure en domaines des ferromagnétiques est à l'origine du phénomène d'hystérésis. Le fait est que dans un échantillon non aimanté les moments magnétiques des domaines d'orientations opposées de l'aimantation spontanée se neutralisent mutuellement : à l'application du champ les parois des domaines commencent à se déplacer de telle sorte que les domaines aimantés le long du champ croissent au détriment des domaines dont le sens d'aimantation est opposé à celui du champ. Lors de son déplacement, la paroi « s'accroche » aux impuretés et à d'autres défauts de la structure cristalline, ce qui explique précisément pourquoi la courbe d'aimantation varie fortement d'un échantillon à un autre et dépend de son traitement mécanique et de la présence d'impuretés.

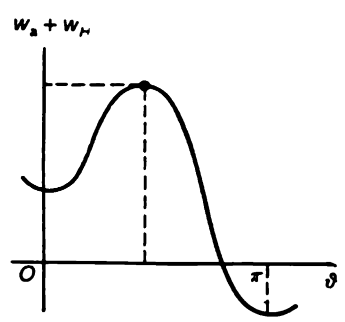


Fig. 12.8. Explication de la force coercitive

Dans des champs suffisamment intenses, ce n'est pas le déplacement de la paroi de domaine parallèlement à elle-même qui est prépondérant mais la rotation du vecteur aimantation spontanée. Examinons ce processus plus en détail. De l'orientation du vecteur **J** dépendent deux termes figurant dans l'expression de la densité d'énergie : l'énergie d'anisotropie magnétique $w_a = K \sin^2 \theta$ et l'énergie magnétique dans le champ extérieur $w_H = \mu_0 J_s H^{(e)} \cos \theta$ (θ étant l'angle formé entre la direction initiale d'aimantation et le champ $\mathbf{H}^{(e)}$ qui est dirigé suivant la direction de facile aimantation). La fonction $w(\theta) \equiv w_a + w_H$ présente (si $H^{(e)} < 2K/(J_s\mu_0)$) la forme indiquée sur la figure 12.8. C'est pourquoi, bien que pour $\theta = \pi$ l'énergie soit plus faible que pour $\theta = 0$, le renversement de l'aimantation exige de surmonter une barrière de potentiel correspondant à $\cos \theta = \mu_0 J_s H^{(e)}/(2K)$.

FORMULES FONDAMENTALES

Loi d'Ohm pour un circuit magnétique	$\Phi = \frac{\mathscr{E}_m}{R_m}$
Force exercée sur un volume unité de corps magnétique	$F = \frac{\chi}{2} \operatorname{grad} H^2$
Moment magnétique orbital de l'atome	$\mathbf{m}_L = \frac{e\hbar}{2m_e} \mathbf{L}$
Moment magnétique de spin de l'atome	$\mathbf{m}_S = \frac{e\hbar}{m_e} \mathbf{S}$

Formule de Langevin	$J = nm_L L\left(\frac{\mu_0 m_L H}{kT}\right)$, $L(\xi) = \operatorname{cth}\xi - \frac{1}{\xi}$
Loi de Curie pour la susceptibilité magnétique d'un paramagnétique	$\chi = \frac{C^{te}}{T}$
Susceptibilité paramaqnétique d'un gaz électronique dégénéré	$\chi_p = 2\mu_0\mu_B^2\nu(\varepsilon_0)$
Susceptibilité diamagnétique d'un gaz	$\chi_d = \frac{-\mu_0 e^2}{6m_e} Z\langle r^2\rangle n$
Fréquence de Larmor	$\omega_L = -\frac{e\mathbf{B}}{2m_e}$
Effet Hall	$\mathbf{E} = \rho\mathbf{j} + R[\mathbf{Bj}]$
Loi de Curie-Weiss pour la susceptibilité magnétique d'un ferromagnétique	$\chi = \frac{C}{T_C - T}$
Loi de Bloch pour l'aimantation spontanée d'un ferromagnétique aux basses températures	$1 - \frac{J_s}{J_\infty} \sim \left(\frac{T}{T_C}\right)^{3/2}$

CHAPITRE 13

SUPRACONDUCTEURS

§ 13.1. Phénomène de supraconduction

Comme nous avons vu au chapitre 9, la résistivité des métaux diminue continuellement lorsque la température diminue et si le réseau cristallin était parfait (c'est-à-dire ne contenait pas d'impuretés et était exempt de défauts), la résistivité deviendrait nulle à 0 K. Pourtant une telle allure de variation de la résistivité est loin d'être caractéristique de tous les métaux. La résistivité de certains métaux, par exemple du plomb, du mercure, de l'étain, tout en diminuant lorsque la température diminue, s'annule soudainement, par saut, à une certaine température, caractéristique de chaque métal, et reste nulle jusqu'à 0 K (fig. 13.1). De tels métaux sont dits *supraconducteurs*, et le phénomène lui-même porte le nom de *supraconduction* ou de *supraconductivité* (découverte en 1911 par Kamerlingh Onnes). La supraconduction s'observe dans 27 métaux et dans plus d'un millier de composés métalliques et d'alliages. La température T_c au-dessous de laquelle se manifeste la supraconduction (cette température est dite *critique*) varie pour des supraconducteurs connus de 0,01 à 20 K. La température critique la plus basse (T_c = 0,1 K) est celle du tungstène. Indiquons encore certaines valeurs de T_c: 0,85 K pour le zinc, 1,2 K pour l'aluminium, 7,2 K pour le plomb, 4,15 K pour le mercure, 9,4 K pour le niobium, 5,8 K pour Ti_3Sn et 18,0 K pour Nb_3Sn.

Pour $T > T_c$ les métaux supraconducteurs présentent une résistance électrique qui varie avec la température de la même façon que pour des métaux ordinaires ou, comme on les appelle, des métaux *normaux*, alors qu'à la température critique la résistivité électrique des supraconducteurs disparaît soudainement. Il est donc naturel de s'attendre que l'absence de la résistivité est la manifestation d'un certain nouvel état, à savoir de l'état supraconducteur, qui diffère de l'état normal. En effet, l'état normal et l'état supraconducteur sont deux différentes phases d'un métal, lorsque la température baisse, il se produit, au point $T = T_c$, une transition de l'état normal à l'état supraconducteur. Pourtant ce passage d'une phase à l'autre n'est pas lié à une modification de la structure cristalline et ne s'accompagne ni de dégagement, ni d'absorption de chaleur. Cela signifie que le passage de la phase normale à la phase

supraconductrice n'est pas une transition de phase du premier ordre. C'est une transition du deuxième ordre qui s'accompagne non pas d'un changement brusque de l'énergie interne mais de celui de la capacité calorifique électronique. Comme nous avons vu, la capacité calorifique électronique d'un métal normal (désignons-la par c_n) varie avec la température suivant une loi linéaire : $c_n \sim kT/T_F$, alors que dans la phase *supraconductrice* la capacité calorifique électronique (désignons-la par c_s) varie avec la température suivant une loi exponentielle : $c_s \sim ke^{-\Delta_s/(kT)}$, où la quantité $\Delta_s = 1{,}75\ kT_c$ est pro-

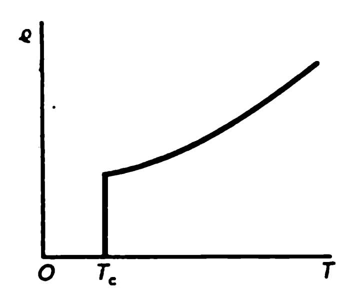


Fig. 13.1. Variation de la résistivité d'un supraconducteur avec la température

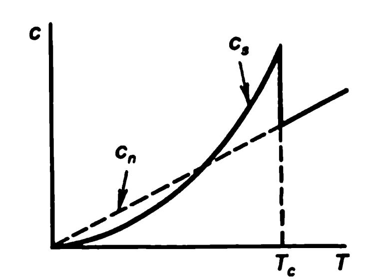


Fig. 13.2. Variation de la capacité calorifique d'un supraconducteur avec la température

portionnelle à la température critique. A la température critique (que l'on appelle encore *température de passage supraconducteur*), la capacité calorifique subit une variation en forme de saut comme le montre la figure 13.2.

Quelle différence existe-t-il donc entre les deux phases métalliques : normale et supraconductrice ? La différence réside en ce que dans la phase supraconductrice une partie des électrons de conduction se condense en une sorte de « suprafluide » qui peut se déplacer, comme un tout, à travers le cristal. Ce mouvement s'effectue sans encombre, c'est-à-dire sans frottement, et c'est précisément pour cette raison que la résistivité électrique de la phase supraconductrice est nulle. Cela signifie que dans un supraconducteur le courant électrique, une fois lancé, continuera aussi longtemps que l'on veut, sans s'affaiblir et sans être entretenu par aucune source de f.é.m. extérieure. A 0 K, tous les électrons de conduction entrent dans la composition du suprafluide. Lorsque la température s'élève, le nombre d'électrons constituant le suprafluide diminue pour s'annuler finalement à la température critique.

Expliquons maintenant la cause de formation du suprafluide électronique. Suivant la loi de Coulomb les électrons qui se déplacent dans le champ périodique du réseau cristallin se repoussent. Mais en plus des forces de répulsion les électrons sont encore soumis à des

forces spécifiques d'attraction mutuelle. Le fait est qu'en entrant en collision avec les ions, l'électron peut soit exciter, soit absorber les vibrations du réseau, c'est-à-dire les phonons. Imaginons maintenant deux électrons dont l'un émet un phonon et l'autre l'absorbe. Un tel échange de phonons lie les électrons, ce qui conduit à une certaine interaction attractive entre électrons. Ainsi,

les électrons de conduction se trouvent soumis non seulement à la force de répulsion coulombienne mais également à la force d'attraction due à l'échange de phonons.

Tout dépend maintenant du rapport de ces forces. Si les forces d'attraction sont supérieures aux forces de répulsion, même d'une quantité aussi petite que l'on veut, il se manifeste un phénomène remarquable : il se forme un état lié de deux électrons, une sorte de molécule à deux électrons. Une telle formation tient pourtant non seulement à ce que les forces d'attraction l'emportent sur les forces de répulsion mais également à cette circonstance extrêmement importante que les électrons obéissent à la statistique de Fermi-Dirac. (L'explication de la supraconduction a été donnée par Bordeen, Cooper et Schrieffer en 1956, c'est-à-dire presqu'un demi-siècle après la découverte de ce phénomène.)

On ne peut d'ailleurs parler d'une molécule à deux électrons que d'une manière conventionnelle. C'est que les dimensions d'une telle paire d'électrons liés sont très grandes, 10^2 à 10^4 fois celles de la constante de réseau cristallin, et se trouvent donc très supérieures à la distance moyenne qui sépare les paires. Néanmoins, il existe une forte corrélation entre les états des électrons à l'intérieur de la paire, et nous pouvons nous baser sur le concept de paires électroniques. Ce sont ces paires qui constituent le suprafluide électronique. Toutes les paires sont à un même état et se déplacent à travers le cristal comme un tout. Il n'est pas facile de changer cet état, c'est-à-dire d'exciter cet ensemble parce que cela exige de rompre au moins une paire, ce qui nécessite une dépense d'énergie égale à l'énergie de liaison de la paire. Cette énergie est égale exactement à $2\Delta_s$. C'est pourquoi, tant que les actions perturbatrices n'apportent pas une énergie égale ou supérieure à $2\Delta_s$, le fluide supraconducteur conserve son état inchangé et stable et se comporte comme un suprafluide se déplaçant sans frottement. Sa résistance électrique est, comme cela a été dit plus haut, nulle.

A 0 K, tous les électrons de conduction sont réunis en paires, c'est-à-dire que tout le gaz électronique entre dans la composition du suprafluide. A une température finie il existe toujours une probabilité de valeur finie (proportionnelle à $e^{-2\Delta_s/(kT)}$) pour que certaines paires soient séparées en électrons isolés. De tels électrons non liés deux à deux constituent un gaz électronique normal ou plus exactement un fluide électronique normal qui se déplace à travers le cristal de façon ordinaire, c'est-à-dire avec frottement. Lorsque la température

s'élève, la quantité de suprafluide diminue, et celle de liquide électronique normal augmente. A $T = T_c$, la quantité de suprafluide devient nulle et tous les électrons deviennent normaux.

§ 13.2. Diamagnétisme des supraconducteurs

Les supraconducteurs se caractérisent non seulement par la disparition de la résistance électrique. Ils présentent encore une propriété remarquable : le champ magnétique à l'intérieur des supraconducteurs est nul ($\mathbf{B} = 0$). Pour cette raison les supraconducteurs peuvent être appelés diamagnétiques absolus. La nullité du champ magnétique dans les supraconducteurs est étroitement liée à l'absence de la résistivité électrique. En effet, imaginons qu'un supraconducteur est placé dans un champ magnétique extérieur. Alors, si le champ magnétique pénétrait dans le supraconducteur, la dérivée par rapport au temps du champ serait, tout au moins à l'instant initial, positive, c'est-à-dire que $\dot{\mathbf{B}}$ serait différente de zéro. Mais dans un tel cas, en vertu de la loi de l'induction électromagnétique, un champ électrique $\mathbf{E}$ prendrait naissance dans le supraconducteur. Comme les électrons se déplacent dans le supraconducteur sans rencontrer aucune résistance, un champ $\mathbf{E}$, aussi faible soit-il, produirait un courant d'intensité indéfinie. Nous savons que le sens du courant induit est toujours tel qu'il s'oppose à la cause qui le produit, c'est-à-dire tel que le champ magnétique propre du courant soit opposé au champ magnétique extérieur. Dans ces conditions, le courant croît jusqu'au moment où les champs se compensent exactement, c'est-à-dire jusqu'au moment où le champ magnétique à l'intérieur du supraconducteur s'annule. Quant au courant dans le supraconducteur il continuera obligatoirement, sans être entretenu par aucune f.é.m. extérieure, parce que son passage est nécessaire pour l'observation de la loi $\mathbf{B} = 0$.

Ainsi, la disparition de la résistivité électrique des supraconducteurs (c'est-à-dire la nullité du champ électrique parce que $\mathbf{E} = \mathbf{j}/\sigma$) est en fait une conséquence de leurs propriétés magnétiques. Il importe de souligner ici que si l'égalité $\mathbf{E} = 0$ découle de l'égalité $\mathbf{B} = 0$, l'égalité $\mathbf{B} = 0$ ne découle pas de l'égalité $\mathbf{E} = 0$: dans un conducteur parfait de $\sigma = \infty$ et $\mathbf{E} = 0$, le champ magnétique peut exister.

Ainsi, un champ magnétique extérieur ne peut pas pénétrer dans un supraconducteur ou, plus exactement, dans sa masse parce que, comme nous le verrons plus loin (v. § 13.4), dans une mince couche superficielle de supraconducteur il peut avoir une valeur non nulle.

Jusqu'ici nous n'avons pas parlé de la valeur du champ magnétique extérieur. Or, la valeur de ce champ n'est pas sans importance. Le fait est que seuls les champs suffisamment faibles ne pénètrent

pas à l'intérieur des supraconducteurs, alors qu'un champ suffisamment intense détruit la supraconduction et, naturellement, pénètre dans le métal qui a passé à l'état normal. Le champ limite H_c à partir duquel la supraconduction se trouve détruite (ce champ est dit *critique*) dépend de la température T, en diminuant lorsque T s'élève. A la température de la transition T_c le champ H_c s'annule. La courbe de variation de $\mu_0 H_c$ en fonction de la température est montrée sur la figure 13.3. La courbe de $\mu_0 H_c$ (T) divise le plan (B, T) en deux parties dont la partie S correspond à l'état supraconducteur, et la partie N, à l'état normal. On peut dire que S correspond à la phase supraconductrice et N à la phase normale et que les deux phases peuvent coexister le long de la courbe de $B = \mu_0 H_c\,(T)$. La variation de H en fonction de T est approximativement quadratique : $H_c\,(T) = H_c\,(0)\,(1 - T^2/T_c^2)$. Les valeurs de T_c et $H_c(0)$ sont indiquées pour certains métaux dans le tableau ci-dessous.

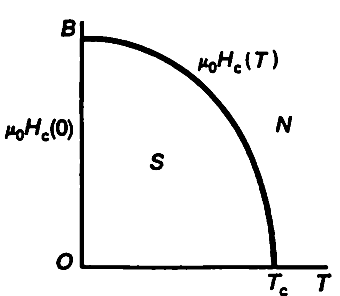


Fig. 13.3. Variation du champ critique avec la température

	Zn	Cd	Al	Ga	In	Ti	Sn	Pb
H_c (0), G	53	30	99	51	283	162	306	803
T_c, K	0,88	0,56	1,19	1,09	3,41	1,37	3,72	7,18

Nous voyons qu'un champ magnétique critique plus intense correspond à des métaux dont la température critique est plus élevée.

Il faut se garder de penser que la relation $B = 0$ signifie seulement qu'un champ magnétique extérieur suffisamment faible ne peut pas pénétrer dans la masse du supraconducteur, c'est-à-dire d'un conducteur ayant passé à l'état supraconducteur avant l'application du champ magnétique extérieur. On peut effectuer une expérience suivante : prendre un conducteur normal, y créer un champ magnétique et le faire passer par refroidissement à l'état supraconducteur. On constatera que le champ magnétique sera chassé du supraconducteur, c'est-à-dire qu'à l'intérieur du supraconducteur sera vérifiée de nouveau la relation $B = 0$ (cette interdiction du champ magnétique à l'intérieur d'un supraconducteur porte le nom d'*effet Meissner*).

Regardons comment se manifeste cet effet sur l'exemple d'un anneau supraconducteur. Prenons un anneau métallique à l'état normal et plaçons-le dans un champ magnétique extérieur B_0 (fig. 13.4, *a*). Puis, refroidissons l'anneau à une température inférieure à la température critique. Le champ magnétique sera chassé de la masse de l'anneau, si bien que les lignes de force auront l'aspect représenté par la figure 13.4, *b*. Elles passent à l'extérieur de l'anneau et traversent aussi son ouverture. Enfin, supprimons le champ magnétique extérieur sans faire varier la température de l'anneau. Il est facile de voir que la suppression du champ ne peut

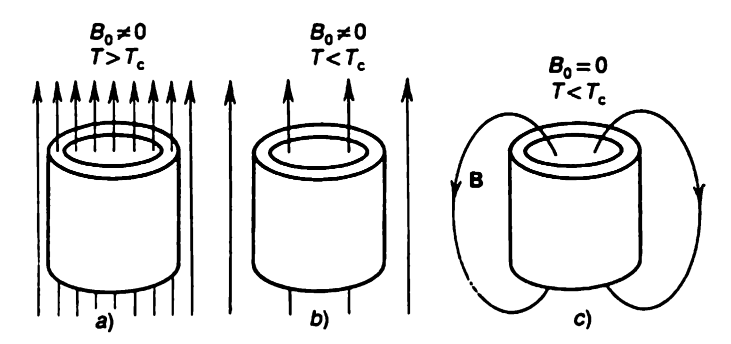


Fig. 13.4. Effet Meissner

pas faire varier le flux Φ de champ magnétique à travers l'ouverture de l'anneau. En effet, rappelons que la dérivée par rapport au temps du flux Φ est égale à la circulation du champ électrique sur le contour traversé par le flux Φ. Plaçons un contour à l'intérieur de l'anneau supraconducteur. Puisqu'à l'intérieur de l'anneau $B = 0$, le flux traversant le contour est égal au flux Φ. D'un autre côté, le champ électrique sur le contour qui se trouve entièrement dans la masse du supraconducteur est nul. C'est pourquoi la dérivée par rapport au temps du flux Φ est nulle, ce qui signifie que Φ est une constante. Autrement dit, le flux de champ magnétique à travers l'ouverture de l'anneau ne variera pas à la suppression du champ extérieur. Cela signifie que les lignes de force magnétique qui passaient à travers l'ouverture en présence de champ extérieur seront « congelées » après la suppression du champ extérieur. Or, les lignes « congelées » doivent être fermées. C'est pourquoi le champ dans le supraconducteur après l'élimination du champ extérieur a l'aspest de la figure 13.4, *c*.

Les lignes de force fermées sont toujours liées à des courants. C'est pourquoi l'anneau supraconducteur est parcouru par un courant électrique qui assure la constance du flux magnétique à travers l'ouverture de cet anneau. Ce courant ne passe, comme nous le

verrons plus loin, que par une mince couche au voisinage de la surface de l'anneau. Il est remarquable que

le flux magnétique Φ à travers l'ouverture d'un anneau supraconducteur ne peut prendre que des valeurs discrètes, à savoir

$$\Phi = n\Phi_0, \quad \Phi_0 = \frac{\pi h}{e} \approx 2{,}068 \cdot 10^{-15} \text{J} \cdot \text{s} \cdot \text{C}^{-1} \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

§ 13.3. Thermodynamique des supraconducteurs

Comme nous l'avons vu, la courbe de $B = \mu_0 H_c(T)$ divise le plan (B, T) en deux parties dont l'une correspond à la phase supraconductrice et l'autre à la phase normale du métal. Si le champ et la température sont liés par la relation $B = \mu_0 H_c(T)$, les deux phases doivent coexister, c'est-à-dire que la courbe de $B = \mu_0 H_c(T)$ est une courbe d'équilibre entre les phases supraconductrice et normale. C'est la raison pour laquelle la valeur critique du champ magnétique est une des caractéristiques les plus importantes d'un supraconducteur.

Montrons d'abord que la différence entre l'énergie libre de la phase normale (F_n) et celle de la phase supraconductrice (F_s) se détermine par le champ critique:

$$F_n(T) - F_s(T) = \mu_0 H_c^2(T)/2$$

$(F_{n,s}$ étant les densités d'énergie libre). A cet effet, imaginons qu'un cylindre fait en un métal capable de passer à l'état supraconducteur est placé dans un solénoïde parcouru par un courant continu I. Alors, l'énergie libre du système cylindre-champ, rapportée à l'unité de volume, sera $F^{(1)} = F_n + B^2/(2\mu_0)$, où $B = \mu_0 In$ est l'induction dans le solénoïde (n étant le nombre de spires par unité de longueur du solénoïde). Supposons maintenant que le cylindre passe à l'état supraconducteur. La densité d'énergie libre du système $F^{(2)} = F_s$ parce que le champ dans le cylindre supraconducteur est nul. Supposons que le passage de l'état normal à l'état supraconducteur s'effectue à une température constante, si bien que $B = \mu_0 H_c(T)$. En outre, l'intensité du courant dans la bobine est supposée invariable. Il résulte de la condition de constance de la température que $F^{(1)} - F^{(2)} = A_{1\to 2}$, où $A_{1\to 2}$ est le travail dépensé lors de la transition $1 \to 2$, c'est-à-dire le travail accompli par la source de f.é.m. insérée dans l'enroulement du solénoïde (ce travail doit être rapporté au volume unité). Puisque le courant est maintenu inchangé, le travail $A_{1\to 2} = I(\Phi_1 - \Phi_2)$, où Φ_1 et Φ_2 sont les flux magnétiques qui traversent l'enroulement de solénoïde dans les états *1* et *2*. A l'état *2*, le flux est nul de sorte que le travail $A_{1\to 2} = I\Phi_1$. En tenant compte que $\mu_0 In = B$ et que la totalité de l'enroulement de solénoïde est traversée par le flux $SBnl$ (l étant la lon-

gueur du solénoïde), nous obtenons $A_{1\to 2}=\mu_0 H_c^2$. On peut donc écrire

$$F^{(1)}-F^{(2)}=F_n+\frac{\mu_0 H_c^2}{2}-F_s=\mu_0 H_c^2,$$

d'où il découle précisément la relation écrite plus haut pour la différence entre les énergies libres F_n et F_s.

A l'aide de cette relation on peut trouver la différence d'entropie entre les phases normale et supraconductrice en équilibre. En utilisant la relation générale $S=-(\partial F/\partial T)_B$ (l'indice B signifie que la dérivation est à effectuer à $B=\mathrm{C^{te}}$) qui lie l'entropie S à l'énergie libre F, nous obtenons

$$S_n(T)-S_s(T)=-\mu_0 H_c(T)\,\frac{\mathrm{d}H_c(T)}{\mathrm{d}T}$$

(les entropies S_n et S_s se rapportent au volume unité). Comme le montre la figure 13.3, $\mathrm{d}H_c/\mathrm{d}T<0$ de sorte que $S_n>S_s$. On devrait s'y attendre parce que la phase supraconductrice est plus « ordonnée » que la phase normale. En multipliant l'entropie par la température, nous trouvons la chaleur latente $Q_{s\to n}$ de la transition de la phase supraconductrice à la phase normale:

$$Q_{s\to n}=T(S_n-S_s)=-\mu_0 T H_c\frac{\mathrm{d}H_c}{\mathrm{d}T}.$$

Le second membre de cette égalité est positif le long de toute la courbe de transition $B=\mu_0 H_c(T)$ sauf au point de $T=T_c$ où le champ critique s'annule. Cela signifie que

le passage de l'état supraconducteur à l'état normal en présence de champ magnétique s'accompagne d'une absorption de chaleur, c'est-à-dire est une transition de phase du premier ordre. En l'absence de champ magnétique ce passage (à $T=T_c$) ne s'accompagne ni d'absorption, ni de dégagement de chaleur, c'est-à-dire constitue une transition de phase du deuxième ordre.

Si, lors du passage de l'état supraconducteur à l'état normal, le conducteur est thermiquement isolé, sa température baisse.

Comme nous l'avons déjà dit, lors du passage de l'état normal à l'état supraconducteur la capacité calorifique du métal subit une variation en forme de saut. Ce saut peut lui aussi être lié au champ magnétique critique. A cet effet, il suffit de se rappeler la relation $C=\mathrm{d}Q/\mathrm{d}T=T(\mathrm{d}S/\mathrm{d}T)$ qui lie la capacité calorifique C à l'entropie S. En tenant compte que $S_n-S_s=-\mu_0 H_c \mathrm{d}H_c/\mathrm{d}T$, nous trouvons le saut de la capacité calorifique au point de transition:

$$C_n-C_s=\left[T\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(S_n-S_s)\right]_{T=T_c}=-\mu_0\left[T\left(\frac{\mathrm{d}H_c}{\mathrm{d}T}\right)^2\right]_{T=T_c}.$$

Cette relation (dite *formule de Ruthgers*) est confirmée expérimentalement avec une précision meilleure que 1 %.

§ 13.4. Profondeur de pénétration du champ magnétique

Bien que dans la masse du supraconducteur $B = 0$, il faut se garder de penser que si le supraconducteur est introduit dans un champ magnétique extérieur, ce dernier subit une brusque variation sur la frontière du supraconducteur. En réalité, au fur et à mesure que le champ pénètre dans le supraconducteur, il décroît progressivement mais devient déjà très faible à une profondeur relativement petite. La profondeur efficace de pénétration du champ magnétique dans un supraconducteur est près de 50 nm pour les métaux tels que Al et Sn et peut atteindre 200 nm pour les métaux de transition (Nb, V, Ta).

Montrons maintenant comment le champ magnétique s'évanouit dans le supraconducteur. Mais mettons d'abord en évidence les facteurs qui déterminent le courant électrique parcourant un supraconducteur. Dans un conducteur normal, la densité de courant électrique est proportionnelle au champ électrique. Il est clair que dans un supraconducteur une telle dépendance ne peut pas exister parce que les électrons se déplacent sans rencontrer de résistance, pour cette raison, un champ électrique même infiniment petit donnerait naissance à un courant d'intensité infiniment grande. Cela signifie que dans les supraconducteurs la densité de courant doit être liée au champ magnétique et non électrique. Mais une relation linéaire directe entre la densité de courant électrique **j** et le champ magnétique **B** ne peut non plus exister parce que ces vecteurs sont de nature différente : le vecteur **j** est polaire alors que le vecteur **B** est axial. Nous savons que c'est le potentiel vecteur **A**, lié à **B** par la relation **B** = rot **A**, qui est un vecteur polaire. C'est pourquoi, dans le cas des supraconducteurs, il faut s'attendre à une liaison entre les grandeurs **j** et **A**, cette liaison étant naturellement linéaire. Mais ce n'est pas le potentiel vecteur mais le champ magnétique qui a un sens physique direct. Cela se manifeste par le fait qu'au potentiel vecteur on peut ajouter le gradient de toute fonction scalaire sans que le champ magnétique égal au rotationnel du potentiel vecteur s'en trouve changé. On peut donc utiliser avec le même résultat aussi bien le potentiel vecteur **A** que le potentiel vecteur **A′** lié à **A** par la relation **A′** = **A** + grad f, où f est une fonction scalaire quelconque des coordonnées.

De quelle liaison entre la densité bien déterminée d'un supracourant **j** et un potentiel vecteur non complètement déterminé **A** peut-il s'agir ? La réponse consiste en ce que le supracourant se détermine non seulement par le potentiel vecteur mais encore par une grandeur remarquable qui est la phase du *potentiel de couplage* des électrons dans le supraconducteur. Nous ne donnons pas ici une définition exacte du potentiel de couplage. Remarquons seulement qu'il existe une telle grandeur, appelée potentiel de couplage Δ (**r**),

qui détermine l'énergie de liaison d'une paire d'électrons dans le supraconducteur. Cette grandeur peut s'écrire sous la forme $\Delta(\mathbf{r}) = |\Delta(\mathbf{r})| \exp(i\varphi(\mathbf{r}))$, où $\varphi(\mathbf{r})$ est précisément la phase du potentiel de couplage.

Si l'on passe du potentiel vecteur **A** au potentiel vecteur $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad}\, f$, la phase du potentiel de couplage variera mais de telle sorte que la quantité $\mathbf{u} = (\hbar/2)\, \text{grad}\, \varphi - e\mathbf{A}$ reste inchangée, c'est-à-dire que

$$(\hbar/2)\, \text{grad}\, \varphi' - e\mathbf{A}' = (\hbar/2)\, \text{grad}\, \varphi - e\mathbf{A}.$$

Il est donc naturel de supposer que la densité de supracourant **j** est proportionnelle précisément à cette quantité. Comme la densité de courant doit être proportionnelle à la densité de porteurs de charges et à leur charge et inversement proportionnelle à leur masse, nous sommes conduits à la relation

$$\mathbf{j} = \frac{en_s}{m_e}\left(\frac{\hbar}{2}\, \text{grad}\, \varphi - e\mathbf{A}\right),$$

où n_s est la densité des électrons supraconducteurs, e, la charge de l'électron et m_e, sa masse. Cette expression traduit la relation linéaire la plus simple entre les vecteurs **j** et **A**. La simplicité réside dans le fait que cette relation est locale, c'est-à-dire que les vecteurs **j** et **A**, dépendant de la position, sont liés entre eux en un seul et même point du supraconducteur.

Mais le caractère local de la liaison ne découle de nulle part. En partant des considérations générales, on peut affirmer seulement que lorsque la variation du champ dans l'espace est suffisamment lente, la liaison doit être locale, alors qu'en général elle peut ne pas l'être, c'est-à-dire que le courant en un certain point peut se déterminer non seulement par la valeur du potentiel vecteur en ce point mais également par ses valeurs en des points voisins. Pour voir clair dans cette situation, il convient de déterminer ce que signifie une variation lente du champ. A cet effet, nous commençons par tirer toutes les conclusions qui découlent de l'hypothèse sur la liaison locale pour revenir ensuite à la question de la liaison non locale entre les vecteurs **j** et **A**.

Le champ magnétique **B** dans le supraconducteur est lié à la densité de courant **j** par l'équation générale bien connue $\text{rot}\, \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ dans laquelle il faut introduire l'expression obtenue plus haut pour **j**. Or, cette expression fait intervenir la phase du potentiel de couplage qu'il est souhaitable de faire disparaître. Cela est facile à faire si l'on remarque que $\text{rot grad}\, \varphi = 0$. Il convient donc de prendre le rotationnel des deux membres de l'équation écrite : $\text{rot rot}\, \mathbf{B} = \text{rot}\, \mu_0 \mathbf{j}$. Comme $\text{rot}\, \mathbf{A} = \mathbf{B}$, nous obtenons une équation qui ne

comprend que le champ magnétique:

$$\text{rot rot } \mathbf{B} = -\frac{\mu_0 e^2 n_s}{m_c}\mathbf{B}.$$

Mais rot rot $\mathbf{B}$ = grad div $\mathbf{B} - \Delta\mathbf{B}$, et div $\mathbf{B} = 0$. L'équation de $\mathbf{B}$ prend donc la forme

$$\Delta\mathbf{B} = \frac{1}{\lambda_L^2}\mathbf{B}, \quad \lambda_L = \sqrt{\frac{m_c}{\mu_0 e^2 n_s}}.$$

Cette équation a été établie pour la première fois par F. London et G. London et porte le nom d'*équation de London.*

Une solution de l'équation de London est facile à trouver dans le cas où le supraconducteur occupe toute l'espace $z > 0$, et le champ magnétique est dirigé le long de la frontière du supraconducteur suivant l'axe x. L'équation prend alors la forme $d^2B/dz^2 = B/\lambda_L^2$ et admet une solution $B(z) = B(0)\, e^{-z/\lambda_L}$, où $B(0)$ est la valeur du champ sur la frontière du supraconducteur. (L'équation admet, formellement, aussi une solution variant avec z comme $\exp(z/\lambda_L)$, mais cette solution doit être rejetée parce qu'elle conduit à un champ infiniment grand pour $z \to \infty$.)

Ainsi, nous en sommes arrivés à cette conclusion que dans le supraconducteur le champ magnétique décroît suivant une loi exponentielle et à une profondeur $z = \lambda_L$ il est réduit à $1/e$ de sa valeur de surface. La quantité λ_L peut donc être appelée *profondeur de pénétration du champ* (ou *longueur de pénétration de London*). Comme le courant est proportionnel au rotationnel du champ, il pénètre à la même profondeur λ_L. Si le champ est dirigé suivant l'axe x, la densité de courant l'est suivant l'axe y et $dB/dz = \mu_0 j$, d'où

$$j = -\frac{B(0)}{\mu_0\lambda_L}\, e^{-z/\lambda_L}.$$

§ 13.5. Deux espèces de supraconducteurs

Nous pouvons revenir maintenant à la question de la variation lente du champ. Dans les supraconducteurs, le champ et le courant varient substantiellement à des distances de l'ordre de λ_L. Si cette quantité (longueur de pénétration de London) est grande par rapport à d'autres longueurs caractéristiques, le champ peut être considéré comme lentement variable, mais si la longueur λ_L est petite devant d'autres longueurs qui interviennent dans un problème donné, on ne peut considérer le champ comme lentement variable. Une question se pose donc: quelles sont d'autres longueurs qui jouent un rôle dans le problème de la supraconductivité?

Nous n'allons examiner que des supraconducteurs massifs dont les dimensions sont beaucoup plus grandes que la longueur de pénétration de London λ_L. Dans ce cas, la seule grandeur qui a les

dimensions d'une longueur et joue un rôle dans le problème de supraconduction est la dimension de la paire d'électrons dont la liaison est due à l'échange de phonons. Cette quantité, que nous désignerons par ξ, est d'autant plus petite que l'énergie de liaison de la paire d'électrons, c'est-à-dire le potentiel de couplage $|\Delta|$, est plus grande, mais elle est d'autant plus grande que la vitesse limite de Fermi v^F du supraconducteur est plus élevée. A savoir, il se trouve que

$$\xi = \hbar v_F/(\pi\,|\Delta|).$$

On peut comprendre l'origine de cette formule en considérant par exemple un atome d'hydrogène. Dans ce cas, l'équation du mouvement de l'électron (si le mouvement est décrit classiquement) est de la forme $m_e v^2/r = e^2/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$, où v est la vitesse de l'électron et r, le rayon de son orbite. En y adjoignant la condition de quantification $m_e vr = \hbar$ et en tenant compte que l'énergie de l'électron

$$\Delta = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r},$$

nous obtenons

$$r = \frac{4\pi\hbar\varepsilon_0}{m_e e^2}, \quad v = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}, \quad \Delta = -\frac{m_e e^4}{2(4\pi\varepsilon_0\hbar)^2},$$

d'où $r = \hbar v/(2\,|\Delta|)$. En substituant dans cette expression v_F à v, nous obtenons la formule de ξ indiquée plus haut.

Ainsi, nous devons comparer les quantités λ_L et ξ. Si $\lambda_L \gg \xi$, on peut dire que le champ est lentement variable, alors que pour $\lambda_L \lesssim \xi$ le champ ne peut plus être considéré comme lentement variable. Dans le premier cas ($\lambda_L \gg \xi$) on peut partir de l'hypothèse sur la liaison locale entre les vecteurs **j** et **A**. C'est pour cette raison que l'équation de London est valable dans ce cas. Mais si $\lambda_L \lesssim \xi$, l'équation de London n'est pas valable et doit donc être remplacée par une autre équation basée sur une liaison non locale entre le courant et le potentiel vecteur. D'une manière concrète, si l'on prend des métaux simples (In, Pb, Sn), et non ceux de transition, on a $\lambda_L \approx 40$ à 70 nm et $\xi \approx 10^3$ nm, c'est-à-dire qu'à de tels métaux l'équation de London est inapplicable et pour décrire l'effet Meissner il faut utiliser une autre approche fondée sur la liaison non locale entre les vecteurs **j** et **A**. Au contraire, pour des métaux de transition (Nb, V) et des composés intermétalliques du type de Nb_3Sn, V_3Ga, la profondeur de pénétration de London est grande ($\lambda_L \approx 200$ nm) et le paramètre ξ est petit ($\xi \approx 5$ nm), si bien que $\lambda_L \gg \xi$ et donc l'équation de London est parfaitement applicable.

Les supraconducteurs pour lesquels $\lambda_L \gg \xi$ sont appelés supraconducteurs de deuxième espèce (ou durs ou encore supraconducteurs de London), et les supraconducteurs pour lesquels $\lambda_L < \xi$ portent le nom de supraconducteurs de première espèce (on les appelle encore supraconducteurs mous ou de Pippard).

Proposons-nous d'expliquer le caractère de la liaison non locale entre la densité de courant et le potentiel vecteur dans les supraconducteurs de première espèce. Considérons un supraconducteur massif simplement connexe (c'est-à-dire un supraconducteur non en forme d'anneau) et utilisons le potentiel vecteur **A** satisfaisant aux conditions div **A** $= 0$, $A_n = 0$, où A_n est la composante de **A** normale à la surface du supraconducteur sur sa frontière. Le potentiel vecteur d'un supraconducteur simplement connexe se détermine univoquement par ces conditions en fonction d'un champ magnétique donné, c'est-à-dire que l'équation rot **A** = **B** déterminant **A** a une et une seule solution.

Dans le cas d'un supraconducteur massif simplement connexe la phase φ du potentiel de couplage peut être considérée comme constante (v. plus loin). Cela permet de faire disparaître le terme en grad φ figurant dans l'expression du courant, si bien que pour les supraconducteurs de deuxième espèce la densité de courant se définit par la formule

$$\mathbf{j} = -(n_s e^2/m_e)\,\mathbf{A}.$$

Comme il a été dit précédemment, les vecteurs **j** et **A** se rapportent ici à un seul et même point et cette relation n'est valable que dans le cas où **j** et **A** varient lentement sur une distance de l'ordre de ξ ($\lambda_L \gg \xi$). Si cette condition n'est pas accomplie, le courant en un point quelconque **r** dépend des valeurs du potentiel vecteur **A** (**r**′) en tous les points **r**′, mais un rôle prépondérant est joué par ceux des points **r**′ dont la distance au point **r** est de l'ordre de ξ ou plus petite, c'est-à-dire que $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| \lesssim \xi$. La formule qui décrit cet effet est de la forme

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = C \int (\mathbf{A}(\mathbf{r}')\mathbf{R})\,\mathbf{R}\,\frac{e^{-R/\xi}}{R^4}\,d^3r',$$

où $\mathbf{R} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ et C est une certaine constante. Pour déterminer cette constante, imaginons que $\xi \to 0$. Alors, **A** (**r**′) peut sortir de l'intégrale au point $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$, ce qui doit conduire à l'équation de London. Il en résulte que

$$C = -3e^2 n_s/(4\pi m_e \xi).$$

Le facteur exponentiel exp $(-R/\xi)$, entrant dans la formule pour le courant (appelée *formule de Pippard*), « coupe » la contribution des points éloignés, alors que le facteur R^4 au dénominateur « compense » l'influence due à deux facteurs R au numérateur et au facteur R^3 correspondant à la valeur du volume d'intégration (une puissance plus élevée de R ne doit pas s'introduire au dénominateur, sinon l'intégrale commencera à se diverger pour $R \to 0$).

Montrons maintenant comment on peut évaluer à l'aide de la formule de Pippard la profondeur de pénétration du champ magnéti-

que dans les supraconducteurs de première espèce. Désignons cette profondeur par λ_P à la différence de λ_L. A des distances $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| \sim \sim \lambda_P$, le potentiel $\mathbf{A}(\mathbf{r}')$ diffère peu de $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Si le potentiel $\mathbf{A}(\mathbf{r}')$ était invariable sur de grandes distances (de l'ordre de ξ et non de λ_P), l'intégrale déterminant la densité de courant se réduirait à la formule de London $\mathbf{j} = -(n_s e^2/m_e)\mathbf{A}$. Mais on doit avoir en vue que $\lambda_P \ll \xi$. On peut donc considérer que la densité de courant sera ξ/λ_P fois plus faible. Ainsi, nous évaluons la densité de courant au moyen de la formule

$$\mathbf{j} = -\frac{n_s e^2}{m_e}\frac{\lambda_P}{\xi}\mathbf{A}; \quad \lambda_P \ll \xi.$$

Nous devons utiliser maintenant cette relation conjointement avec l'équation rot $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$. Pour la géométrie examinée précédemment nous obtenons $B(z) = B(0) \exp(-z/\lambda_P)$, où λ_P se détermine maintenant à partir de l'équation $\lambda_P^{-2} = e^2\mu_0 n_s (\lambda_P/\xi)$, d'où

$$\lambda_P = \lambda_L \left(\frac{\xi}{\lambda_L}\right)^{1/3} = \xi \left(\frac{\lambda_L}{\xi}\right)^{2/3}.$$

Nous voyons que $\lambda_L \ll \lambda_P \ll \xi$. Ainsi,

la profondeur de pénétration du champ magnétique dans un supraconducteur de première espèce est beaucoup plus grande que celle de London, néanmoins elle est nettement inférieure aux dimensions de la paire d'électrons.

Jusqu'ici nous avons considéré des supraconducteurs simplement connexes. Comme il a été déjà dit plus haut, pour de tels supraconducteurs la phase φ du potentiel de couplage peut être considérée comme constante. Mais pour des supraconducteurs doublement et multiplement connexes une telle supposition n'est plus justifiée. En effet, prenons un anneau supraconducteur et considérons un certain contour quelconque fermé L situé à l'intérieur de l'anneau, loin de sa surface (fig. 13.5). Sur un tel contour la densité de courant est nulle et puisqu'elle se détermine par la quantité $(\hbar/2)$ grad $\varphi - e\mathbf{A}$, cette quantité est nulle elle aussi, c'est-à-dire que le contour L vérifie l'égalité $\mathbf{A} = [\hbar/(2e)]$ grad φ. Prenons maintenant l'intégrale de cette expression suivant le contour L. En nous rappelant que $\oint_L \mathbf{A}d\mathbf{l} = \Phi$ exprime le flux magnétique à travers une surface s'appuyant sur le contour L, c'est-à-dire le flux magnétique à travers l'ouverture de l'anneau, nous obtenons

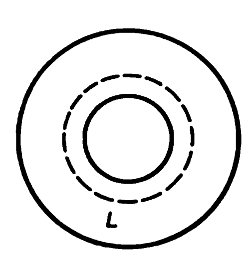


Fig. 13.5. Explication de la quantification du flux magnétique

$$\Phi = \frac{\hbar}{2e}\oint_L d\varphi.$$

Ainsi, le flux magnétique à travers l'ouverture d'un anneau supraconducteur est proportionnel à la variation de phase du potentiel de couplage lors du parcours du contour fermé L. Si cette phase était considérée comme constante, le flux Φ serait nul, ce qui ne correspond pas, nous le savons, à la réalité. Cela signifie que la phase doit entrer obligatoirement dans l'expression donnant un supracourant.

D'un autre côté, le potentiel de couplage doit être une fonction univoque des coordonnées. Il s'ensuit que la variation de phase lors du parcours d'un contour fermé ne peut être que multiple de 2π, c'est-à-dire que $\oint_L d\varphi = 2\pi n$, où n est un nombre entier quelconque. Ceci nous conduit à un résultat remarquable $\Phi = 2\hbar\pi n/(2e)$. En d'autres termes,

le flux magnétique à travers l'ouverture d'un anneau supraconducteur est toujours multiple d'un certain flux élémentaire Φ_0:

$$\Phi = n\Phi_0, \quad \Phi_0 = \pi\,(\hbar/e).$$

Ce fait a déjà été indiqué au § 13.2. Il est en particulier mis à profit pour une mesure très précise de la quantité $\hbar/e$.

§ 13.6. Etat mixte

Ainsi que nous l'avons déjà dit, un champ magnétique suffisamment intense détruit la supraconduction et cette destruction se produit indépendamment de l'origine du champ: qu'il soit extérieur ou produit par le courant lui-même qui parcourt le supraconducteur. Pour que la supraconduction existe, le champ ne doit pas dépasser une certaine valeur critique et cette condition doit être réalisée partout. Mais le champ peut prendre des valeurs différentes aux divers points d'un conducteur métallique, de sorte qu'une situation peut se présenter lorsque le champ est en certains points inférieur et en d'autres points supérieur au champ critique H_c. Qu'arrivera-t-il alors? Dans un tel cas un conducteur métallique ne pourra pas devenir entièrement supraconducteur mais il ne sera non plus entièrement normal. Le conducteur sera dans ces conditions divisé en domaines dont certains seront supraconducteurs et d'autres normaux. Un tel état du conducteur est dit *mixte*.

L'état mixte se détermine pour une large part par la géométrie du conducteur, car c'est d'elle que dépend le caractère de distribution du champ magnétique. Si le conducteur est en forme d'un long cylindre placé dans un champ magnétique extérieur $\mathbf{H}_0$, orienté le long de l'axe du cylindre, le champ prend une même valeur sur toute la surface du cylindre (si l'on néglige l'influence due aux extrémités

du cylindre). Pour cette raison, si le champ $\mathbf{H}_0$ n'excède pas la valeur critique H_c (et la température est en-dessous de la température critique), le cylindre tout entier sera supraconducteur.

Mais la situation sera nettement différente si le conducteur présente, par exemple, la forme d'une sphère (fig. 13.6). Supposons en effet qu'une sphère supraconductrice se trouve dans un champ magnétique extérieur suffisamment faible $\mathbf{H}_0$ (fig. 13.6, *a*). On montre

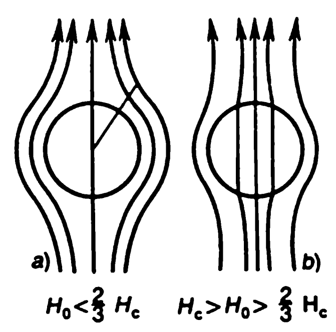


Fig. 13.6. Supraconducteur en forme de sphère

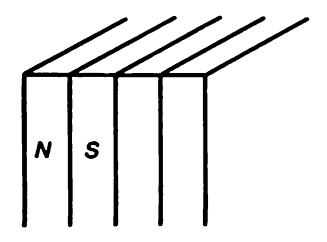


Fig. 13.7. Supraconducteur en forme de plaque

que dans ce cas la composante du champ tangentielle à la surface de la sphère est égale à $H_\theta = \frac{3}{2} H_0 \sin\theta$, où θ est un angle polaire. Ainsi, le champ est nul aux pôles de la sphère et égal à $\frac{3}{2} H_0$ à son équateur. Maintenant, supposons vérifiée l'inégalité $H_c > H_0 > \frac{2}{3} H_c$ (fig. 13.6, *b*). Dans ce cas le champ sur l'équateur et dans les régions avoisinantes sera supérieur à la valeur critique alors que près des pôles il sera inférieur à H_c. Cela signifie que près de l'équateur la supraconduction sera détruite mais les régions situées près des pôles seront supraconductrices. Ainsi, dans l'intervalle de champs $H_c > H_0 > \frac{2}{3} H_c$ la sphère supraconductrice se trouve à l'état mixte caractérisé par une coexistence des régions normales et supraconductrices.

Un exemple encore plus intéressant est représenté par une plaque supraconductrice placée dans un champ magnétique extérieur orienté perpendiculairement à sa surface. Dans ce cas, quel que soit le champ H_0 non supérieur à H_c, la plaque est à l'état mixte. En effet, la plaque ne peut pas se trouver en totalité à l'état supraconducteur, sinon la condition de continuité de la composante normale du champ sur la surface de la plaque serait troublée: le champ serait nul à l'intérieur de la plaque et H_0 à son extérieur. Mais la plaque ne peut se trouver non plus entièrement à l'état normal parce que cela est désavantageux au point de vue énergétique pour $T < T_c$. C'est

pourquoi la plaque est à l'état mixte, c'est-à-dire qu'elle est constituée par des domaines normaux et supraconducteurs.

On peut supposer que la plaque possède une structure dite *laminaire* du type de celle représentée par la figure 13.7. Ici, N et S désignent les domaines normaux et supraconducteurs qui représentent des couches perpendiculaires au plan de la figure. Les lignes de force magnétique ne passent que par les couches N et puisque les régions N et S sont en équilibre entre elles, le champ dans les régions N doit être égal à H_c. (Dans les régions S le champ est naturellement nul.)

Maintenant tenons compte de ce que le flux magnétique doit être continu sur la surface de la plaque. A l'extérieur de la plaque il est évidemment égal à SH_0, où S est l'aire de la surface de la plaque, et à l'intérieur de la plaque il est égal à $n\,(ad_nH_c + ad_sH_0)$, où a est la dimension de la plaque dans la direction perpendiculaire au plan de la figure, d_n et d_s sont les épaisseurs des couches N et S, n est le nombre de couches. En égalant entre elles ces expressions du flux et en tenant compte que $S = na\,(d_n + d_s)$, nous obtenons

$$\delta_s \equiv \frac{d_s}{d_n + d_s} = 1 - \frac{H_0}{H_c} \quad (H_0 \leqslant H_c).$$

Cette formule définit la dimension relative des domaines supraconducteurs qui se trouve dépendant uniquement du rapport H_0/H_c. (Quant aux valeurs elles-mêmes de d_s et d_n, il existe des méthodes de leur détermination expérimentale ; ces expériences montrent que l'épaisseur des couches est beaucoup plus petite que l'épaisseur l de la plaque.)

Pour déterminer les valeurs absolues des épaisseurs d_n et d_s des couches il est nécessaire, de même que pour déterminer les dimensions des domaines dans un ferromagnétique, de considérer l'énergie totale de l'échantillon (plus exactement, l'énergie libre) et d'établir les conditions dans lesquelles elle prend la valeur minimale. Ce faisant, il faut tenir compte tant de l'énergie que l'échantillon posséderait en l'absence de champ et de domaines que de l'énergie du champ magnétique en présence de domaines et, enfin, de l'énergie superficielle liée à l'existence d'une frontière entre les régions supraconductrices et normales. C'est l'énergie superficielle qui présente une importance particulière parce qu'elle détermine l'épaisseur de la frontière entre les différents domaines, qui détermine à son tour les dimensions des domaines.

Mais il existe une autre circonstance encore plus substantielle. Le fait est que notre supposition sur une structure laminaire d'un supraconducteur à l'état mixte est basée sur une hypothèse admise tacitement sur la valeur positive de l'énergie superficielle entre les domaines. Or, cette dernière hypothèse n'est fondée sur rien, de sorte que le caractère de l'énergie superficielle exige une étude spé-

ciale. L'analyse montre que l'énergie superficielle est nettement différente pour les supraconducteurs de première et de deuxième espèces. C'est seulement

pour les supraconducteurs de première espèce que l'énergie est positive (comme pour les ferromagnétiques) alors que pour les conducteurs de deuxième espèce elle est négative.

Si nous désignons par γ_i l'énergie superficielle (rapportée à la surface unité de la frontière), où l'indice $i = 1, 2$ désigne l'espèce de supraconducteur, il apparaît que

$$\gamma_1 = \frac{\mu_0 H_c^2}{2}\,\xi, \quad \gamma_2 = -\frac{\mu_0 H_c^2}{2}\,\lambda_L.$$

où ξ est la dimension de la paire électronique et λ_L, la profondeur de pénétration du champ dans un supraconducteur de deuxième espèce. Ainsi, la structure laminaire de l'état mixte représentée par la figure 13.7 ne se rapporte qu'aux supraconducteurs de première espèce. La période de cette structure, c'est-à-dire la grandeur $d \equiv \equiv d_s + d_n$ se détermine essentiellement par l'énergie superficielle, elle est de l'ordre de $d \approx \sqrt{l\xi}$, où l est l'épaisseur de la plaque.

Quant aux supraconducteurs de deuxième espèce, leur état mixte n'affecte pas une structure laminaire simple. Comme leur énergie superficielle liée à la surface frontière entre les domaines normal et supraconducteur est négative, cette frontière doit être aussi grande que possible, c'est-à-dire que la division en régions N et S doit être très menue (à la différence des supraconducteurs de première espèce dans lesquels la frontière entre les régions N et S est minimale). Dans ces conditions, si une petite partie d'un supraconducteur de deuxième espèce est à l'état normal et sa plus grande partie à l'état supraconducteur, les régions N sont constituées non par des couches mais par des *lignes* dites *de tourbillon.*

Jusqu'ici nous avons traité des supraconducteurs placés dans un champ magnétique extérieur. Si le champ extérieur est absent et un supraconducteur est relié à un générateur qui le fait parcourir par un certain courant électrique I, ce courant produit un champ magnétique égal, à la surface du conducteur, à $H(a) = I/(2\pi a)$ (a étant le rayon du conducteur). Pour $H(a) < H_c$, c'est-à-dire pour $I < I_c$, où $I_c = 2\pi a H_c$, le conducteur est entièrement supraconducteur (il s'agit d'un supraconducteur de première espèce). Si $I > I_c$, le champ sur la surface du conducteur est supérieur à H_c et donc il se forme au voisinage de la surface une couche à l'état normal. Le rayon intérieur R de cette couche se détermine à partir de la condition $H(R) = = H_c$, ce qui donne pour le courant parcourant la section intérieure $I_1 = 2\pi R H_c = I_c R/a$. La partie extérieure (normale) de la section est parcourue par le courant $I - I_1$. Il est évident que dans cette partie de la section il existe un champ électrique dirigé le long du

conducteur. Pour ce qui est de la partie intérieure ($r < a$), elle ne doit pas être entièrement à l'état supraconducteur, sinon le générateur serait mis en court-circuit par la partie centrale supraconductrice. C'est pourquoi la partie intérieure peut se trouver à un état mixte dont la structure est représentée par la figure 13.8.

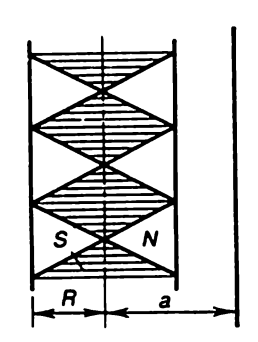


Fig. 13.8. Fil supraconducteur parcouru par un courant supérieur au courant critique

§ 13.7. Contact entre les supraconducteurs

Nous savons (v. § 9.5) que si deux métaux de nature différente portés à une même température sont mis en contact, les électrons commenceront à passer d'un métal dans l'autre, mais bien qu'une différence de potentiel de contact prenne naissance entre les métaux, elle ne conduit pas, en l'absence de f.é.m. extérieure, au passage d'un courant. Il n'en est pas de même pour le contact entre les supraconducteurs. Le fait est que dans le contact entre les métaux ordinaires ce sont des électrons normaux qui passent d'un métal à l'autre tandis que dans le cas des supraconducteurs ce sont des électrons supraconducteurs qui passent.

Si l'on prend deux supraconducteurs S et S' séparés par une mince couche isolante (d'épaisseur de l'ordre de quelques nanomètres), les électrons supraconducteurs peuvent passer, par effet de tunnel d'origine quantique, d'un supraconducteur dans l'autre, et comme ces électrons se déplacent sans rencontrer aucune résistance, un circuit fermé comprenant le contact SS' peut être parcouru par un courant en l'absence de f.é.m. extérieure. De plus, les supraconducteurs en contact peuvent être faits en un même matériau et néanmoins, le courant peut passer sans tension appliquée. Ce phénomène est connu sous le nom d'*effet Josephson*.

Etant d'origine quantique, cet effet peut se décrire dans le cadre de la mécanique quantique, mais en réalité nous utiliserons seulement le fait que l'état d'un système d'électrons supraconducteurs (comme de tout système quantique) se caractérise par une certaine *fonction* dite *d'onde* qui obéit à une équation bien déterminée, à savoir à celle de Schrödinger (voir à ce propos § 21.2). Dans le problème considéré il s'agit de l'ensemble de deux supraconducteurs S et S' entre lesquels peuvent passer des électrons supraconducteurs. Si les nombres d'électrons couplés dans S et S' sont égaux à 2ν et à $2N - 2\nu$, où $2N$ est le nombre total d'électrons couplés, supposé donné, la fonction d'onde du système S-S' peut s'écrire sous la forme $\psi_\nu = \psi^S_{2\nu}\psi^{S'}_{2N-2\nu}$, où ψ^S et $\psi^{S'}$ sont les fonctions d'onde des supraconducteurs S et S' pris séparément.

L'équation de Schrödinger est de la forme

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}=H\psi,$$

où H est l'opérateur de Hamilton ou *hamiltonien* du système, dépendant des variables dynamiques qui caractérisent le système.

Dans le cas considéré la structure la plus simple de l'hamiltonien se présente sous la forme suivante :

$$H\psi_\nu = E_0\psi_\nu + K(\psi_{\nu+1} + \psi_{\nu-1}),$$

où E_0 et K sont certaines constantes (dépendant de la nature des supraconducteurs S et S' et de la géométrie du contact supraconducteur, la constante K pouvant prendre une valeur tant positive que négative). Cette structure décrit la possibilité de variation du nombre ν en ne tenant compte que des transitions par effet tunnel les plus probables correspondant à la variation de ν tout au plus d'une unité.

Le cas qui nous intéresse est le cas stationnaire où le système possède une certaine énergie E déterminée. Alors ψ varie avec le temps suivant une loi exponentielle $\exp[-(i/\hbar)Et]$ et l'équation de Schrödinger prend la forme $H\psi = E\psi$. Ainsi, nous sommes conduits à l'équation

$$E_0\psi_\nu + K(\psi_{\nu+1} + \psi_{\nu-1}) = E\psi_\nu.$$

La solution de cette équation est de la forme $\psi_\nu = A\exp \times \times \{ik\nu\}$, où A et k sont des constantes et, comme il est facile de voir,

$$E \equiv E(k) = E_0 + 2K\cos k.$$

Le paramètre k peut prendre toutes les valeurs possibles, de sorte que l'énergie du système est fonction d'un paramètre continu. Dans ces conditions, elle est comprise dans l'intervalle $(E_0 - 2K, E_0 + + 2K)$. Le paramètre k joue un rôle important ; il est analogue au vecteur d'onde d'une onde électromagnétique ou à la quasi-impulsion d'un électron dans un réseau périodique.

La dérivée de l'énergie par rapport à k détermine la vitesse de groupe v_g du paquet d'ondes constitué par une superposition de fonctions d'ondes ψ_ν (voir à ce sujet chapitre 16) :

$$v_g=\frac{1}{\hbar}\frac{\partial E}{\partial k}=-\frac{2K}{\hbar}\sin k.$$

En multipliant la vitesse de groupe par la charge $2e$ de la paire d'électrons (e étant la charge de l'électron), nous trouvons le courant I qui peut passer entre S et S' :

$$I = I_0\sin k,\ I_0 = -4eK/\hbar.$$

Cela signifie que si le système S-S' est inséré dans un circuit fermé, il peut être parcouru par un courant électrique sans tension extérieure appliquée. L'intensité et le sens de ce courant se déterminent par les conditions initiales à l'instant de fermeture du circuit. Dans ces conditions, il est obligatoire que $|I| \leqslant |I_0|$, où le courant I_0 dépend, comme nous l'avons vu, uniquement de K. En d'autres termes, l'intensité possible du courant ne peut pas être supérieure à une certaine valeur maximale qui ne se détermine que par le caractère du contact supraconducteur et ne dépend pas des conditions initiales.

Supposons maintenant qu'une différence de potentiel V est appliquée entre les supraconducteurs S et S'. Dans ce cas, le « vecteur d'onde » k commencera à dépendre du temps et, comme le montre la théorie quantique de l'effet Josephson,

$$\frac{d}{dt}(\hbar k) = 2eV.$$

Il s'ensuit que si V est une certaine fonction donnée du temps $V(t)$, on a

$$k \equiv k(t) = k_0 + \frac{2e}{\hbar}\int_0^t V(t)\,dt,$$

où k_0 est la valeur prise par k à $t = 0$.

Si, en particulier, $V = V_0$ est une constante, k est une fonction linéaire du temps et donc le courant est une fonction sinusoïdale du temps de fréquence $\omega = 2eV_0/\hbar$:

$$I = I_0 \sin\left(k_0 + \frac{2e}{\hbar} Vt\right).$$

La fréquence ω est très grande, de sorte qu'on obtient en moyenne un courant nul.

Ainsi, le courant passe pour $V_0 = 0$ et ne passe pas pour $V_0 \neq 0$!

Supposons maintenant qu'en plus de la tension continue V_0 le contact supraconducteur est soumis encore à une tension alternative $v \cos \omega t$, c'est-à-dire que $V(t) = V_0 + v \cos \omega t$. Alors,

$$k = k_0 + \frac{2e}{\hbar} V_0 t + \frac{2e}{\hbar\omega} v \sin \omega t.$$

Supposons encore que $v \ll V_0$. Dans ce cas le courant s'exprime par la formule

$$I = I_0 \left[\sin\left(k_0 + \frac{2eV_0}{\hbar} t\right) + \frac{2e}{\hbar\omega} v \sin \omega t \cos\left(k_0 + \frac{2eV_0}{\hbar} t\right)\right].$$

Il s'agit maintenant de déterminer la valeur moyenne de ce courant dans le temps. Il est clair que le premier terme entre crochets sera nul. Quant au second terme, il peut donner une valeur non nul-

le. A cet effet il est nécessaire que la fréquence de la tension appliquée vérifie l'égalité

$$\omega = (2e/\hbar)\, V_0$$

(condition de résonance). Dans ce cas la valeur moyenne (dans le temps) du courant est égale à

$$\langle I\rangle = -I_0 \frac{ev}{\hbar\omega} \sin k_0 = -\frac{1}{2} I_0 \frac{v}{V_0} \sin \mathbf{k}_0.$$

Si la condition de résonance n'est pas satisfaite, il est évident que $\langle I \rangle = 0$.

L'étude de cette résonance permet de déterminer avec une haute précision la quantité $e/\hbar$. Le fait est qu'il existe des méthodes très précises de mesure de la fréquence (par exemple, à l'aide des interférences) ainsi que de la grandeur macroscopique qui est le potentiel V_0.

Enfin, examinons plus en détail ce qui arrivera si le système S-S' (contact de Josephson) est intercalé dans un circuit fermé comportant une f.é.m. continue U. Si R est la résistance de ce circuit, la tension aux bornes du contact S-S' aura pour expression

$$V = U - RI = U - I_0 R \sin k.$$

En appliquant la loi de variation de k, nous obtenons

$$\frac{dk}{dt} = \frac{2e}{\hbar}(U - I_0 R \sin k) = \omega_0 (1 - \lambda \sin k),$$

où $\omega_0 = 2eU/\hbar$ et $\lambda = RI_0/U$. L'intégration de cette équation donne

$$\omega_0 t = \int (1 - \lambda \sin k)^{-1}\, dk.$$

Si $\lambda < 0$, le dénominateur de l'expression sous le signe d'intégration ne s'annule pas et l'intégrale peut être facilement calculée. En posant $\operatorname{tg} k/2 = \vartheta$, nous obtenons

$$I = I_0 \frac{2\vartheta}{1+\vartheta^2}, \quad \vartheta = \lambda + \sqrt{1-\lambda^2}\, \operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}\sqrt{1-\lambda^2}\,\omega_0 (t - t_0)\right].$$

Ainsi, pour $\lambda < 1$, le courant est une fonction périodique du temps de période égale à $2\pi\omega_0^{-1}(1-\lambda^2)^{-1/2}$; pourtant il n'est pas sinusoïdal (sauf le cas de $\lambda = 0$).

Soit maintenant $\lambda > 1$. Dans ce cas l'expression sous le signe d'intégration a un pôle pour $k = k_0$ où $\sin k_0 = \lambda^{-1}$. Cela signifie que $k \to k_0$ lorsque $t \to \infty$, c'est-à-dire que le courant tend vers sa valeur limite U/R, et la tension sur le contact, vers zéro. Nous voyons qu'un régime est possible auquel le courant reste constant. Sa valeur en ce régime ne se détermine que par la f.é.m. et la résistance du circuit ($I = U/R$) et ne dépend pas des caractéristiques du contact de Joséphson.

§ 13.8. Supraconduction à température élevée

Comme il a été indiqué au § 13.1, la température critique T_c des supraconducteurs métalliques (métaux, leurs alliages, composés métalliques) ne dépasse pas 20 K. En automne de 1986, cette limite a été déplacée d'abord dans le domaine de 40 K et ensuite dans celui de 100 K grâce à l'utilisation d'une nouvelle classe de substances dites céramiques métallo-oxydes. Ainsi, la température critique la plus élevée connue à cette époque-là s'est trouvée augmentée de presque cinq fois. (Rappelons que les céramiques sont des matériaux obtenus par des procédés de frittage d'un mélange broyé de matériaux de départ.) Les céramiques à haute valeur de T_c sont des composés de type $RE_{2-x}M_x\,CuO_{4-y}$, où RE sont les terres rares La et Y ; M, les métaux Ba, Sr, Ca ; x est la concentration ; y indique une saturation incomplète par l'oxygène (état non stœchiométrique). Les valeurs caractéristiques de x et des températures critiques T_{c_1} sont les suivantes :

x	composé	T_{c_1}, K
0,15	$La_{1,85}Ba_{0,15}CuO_{4-y}$	37,5
0,2	$La_{1,8}Sr_{0,2}CuO_{4-y}$	42
0,8	$Y_{1,2}Ba_{0,8}CuO_{4-y}$	93

(Le sens de la température critique T_{c_1} sera expliqué plus loin.)

Les supraconducteurs céramiques sont des substances complexes hétérogènes dont la valeur de la température critique dépend de façon substantielle du procédé de fabrication. Par exemple, pour les mêmes composition (x = 0,1) et température de recuit (T_{recuit} = = 900 °C) $La_{1,9}Sr_{0,1}CuO_{4-y}$ a T_{c_1} = 32 K dans le cas du recuit sous atmosphère d'argon et T_{c_1} = 39 K dans le cas du recuit sous atmosphère d'oxygène. Compte tenu de l'hétérogénéité des supraconducteurs céramiques qui constituent un mélange de plusieurs phases on parle généralement dans la littérature du système La-Ba-Cu-O et du système Y-Ba-Cu-O.

Les particularités de constitution des supraconducteurs à température élevée déterminent plusieurs différences notables dans leur comportement par rapport aux supraconducteurs classiques examinés plus haut dont la pureté et l'homogénéité peuvent être contrôlées avec une précision suffisante.

Tout d'abord, comme il a été indiqué au § 13.1, pour les supraconducteurs classiques il existe un point caractéristique de transition à l'état supraconducteur qui se manifeste par une brutale disparition,

à une certaine température T_c, de la résistance électrique, alors que la capacité calorifique subit en ce point une variation discontinue. Dans le cas des supraconducteurs céramiques (v. fig. 13.9), la résistivité décroît progressivement (bien qu'assez vite) jusqu'à zéro dans un certain intervalle de température compris entre T_{c_1} et T_{c_2}. La valeur caractéristique de l'intervalle de température est comprise entre 7 et 15 K mais peut aussi être plus grande (suivant les facteurs

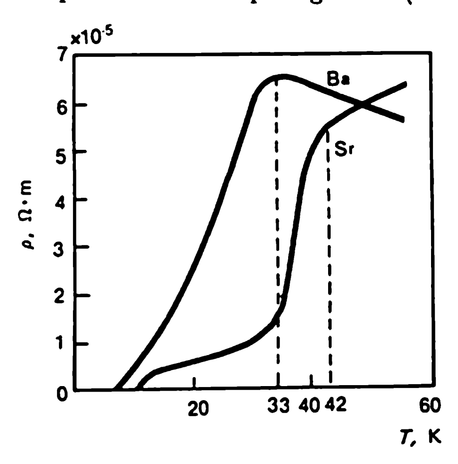


Fig. 13.9. Variation de la résistivité des céramiques avec la température (systèmes La-Ba-Cu-O et La-Sr-Cu-O)

tels que l'état non stœchiométrique en oxygène, l'hétérogénéité de la composition, etc.). C'est ainsi par exemple que pour $La_{1,825}Sr_{0,175}CuO_{4-y}$ on a $T_{c_1} = 40$ K et $T_{c_2} = 32$ K, alors que pour $La_{1,8}Sr_{0,2}CuO_{4-y}$ on a $T_{c_1} = 30$ K et $T_{c_2} = 8$ K. L'existence d'un tel intervalle de température témoigne plutôt de la complexité de la structure des céramiques que de l'absence de point de transition de phase pour ces substances. Du fait d'une telle structure complexe le domaine de température dans lequel sont formées les régions supraconductrices, qui pénètrent l'échantillon, devient relativement large (plusieurs kelvins). C'est en particulier la propriété caractéristique des supraconducteurs granulaires (non nécessairement de ceux à température élevée) lorsque les granules supraconducteurs, dont la dimension est inférieure à la longueur de London, sont inclus dans la matrice du conducteur normal et n'interagissent que faiblement entre eux. Une telle constitution des céramiques supraconductrices est aussi confirmée par les particularités de comportement des supraconducteurs à température élevée dans les champs magnétiques, que nous indiquerons plus loin.

La figure 13.10 montre une courbe traduisant la variation de la capacité calorifique de $La_{1,8}Sr_{0,2}CuO_{4-y}$ lors de la transition à

l'état supraconducteur. On voit qu'à la différence de la figure 13.2, l'anomalie de la capacité calorifique est représentée par une courbe continue en cloche dans le domaine de température de 28 K à 47 K. Notons que l'écart maximal à $T = 38$ K est égal à 10 %.

Comme nous l'avons vu au § 13.2, en plus de la disparition de la résistance, un des traits les plus importants de la transition supraconductrice est le diamagnétisme du supraconducteur, c'est-à-dire l'impossibilité pour le champ magnétique de pénétrer à l'intérieur du supraconducteur ou, ce qui revient au même, la relation $\chi = -1$. Lorsque $\lambda \gg \xi$, dans le cas de supraconducteurs de deuxième espèce, auxquels appartiennent les supraconducteurs céramiques, le champ magnétique ne pénètre pas dans l'échantillon jusqu'à une intensité $H = H_{c_1}$ après quoi il commence à pénétrer progressivement jusqu'à l'instant où, au deuxième champ critique H_{c_2}, le champ moyen à l'intérieur du supraconducteur devient égal au champ

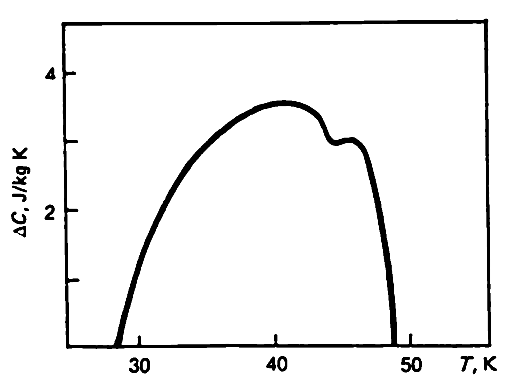


Fig. 13.10. Comportement anomal de la capacité calorifique de la céramique supraconductrice $La_{1,8}Sr_{0,2}CuO_{4-y}$

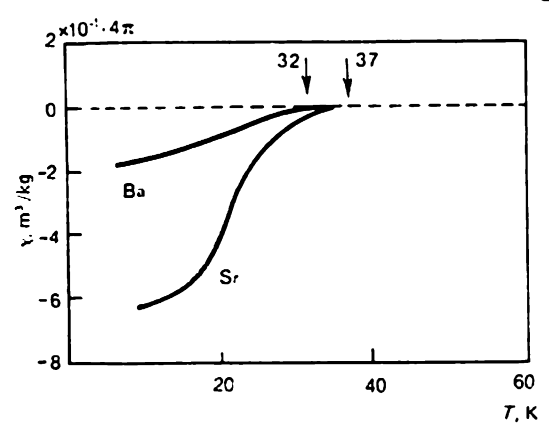


Fig. 13.11. Susceptibilité magnétique des céramiques supraconductrices (système La-Ba-Cu-O et La-Sr-Cu-O)

appliqué. L'étude du comportement des céramiques supraconductrices dans des champs peu intenses ($H < H_{c_1}$) conduit aux conclusions générales suivantes : à $T < T_{c_1}$ il apparaît une susceptibilité

diamagnétique ($\chi < 0$). Sa valeur (v. fig. 13.11) constitue quelques pour cent de l'effet Meissner total (c'est-à-dire de $\chi = -1$) et elle est supprimée par un champ de 1 à 5 T qui représente le champ H_{c_1}. Quant au champ critique supérieur H_{c_2}, il peut atteindre des valeurs grandes anomales ($H_{c_2} \sim 140$ T), ce qui vaut aux supraconducteurs à température élevée la possibilité de nombreuses applications techniques. Les particularités du comportement des céramiques supraconductrices dans les champs magnétiques, notamment, les particularités de l'effet Meissner confirment, à ce qu'il paraît, l'hypothèse sur le caractère granulaire de la supraconduction de ces matériaux. Ainsi, la petitesse de l'effet Meissner pour $T = T_{c}$, peut être due à ce que les régions supraconductrices, qui pénètrent le volume de l'échantillon, ne le remplissent pas en totalité, en assurant une résistivité nulle lorsque le champ magnétique est faiblement mis sous écran.

Notons, avant de clore ce paragraphe, que bien que certaines particularités de la supraconduction à température élevée soient expliquées qualitativement, il n'existe pas à présent (été 1987) de théorie cohérente exacte qui décrive les particularités bien variées des céramiques supraconductrices à l'échelle tant microscopique que macroscopique (et même, dans certains cas, les expériences correspondantes!).

FORMULES FONDAMENTALES

Effet Meissner	$\mathbf{B} = 0$
Flux magnétique à travers l'ouverture d'un anneau supraconducteur	$\Phi = n\Phi_0$, $\Phi_0 = \frac{\pi\hbar}{e} = 2{,}068 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{J \cdot s \cdot C^{-1}}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$
Chaleur latente de la transition de la phase supraconductrice à la phase normale	$Q_{s\to n} = -\mu_0 T H_c \frac{dH_c}{dT}$
Saut de la capacité calorifique au point de transition supraconductrice (formule de Ruthgers)	$C_n - C_s = -\mu_0 \left[T \left(\frac{dH_c}{dT}\right)^2\right]_{T=T_c}$
« Dimensions » de la paire d'électrons (longueur de corrélation)	$\xi = \frac{\hbar v_F}{\pi \lvert\Delta\rvert}$

Supraconducteurs de deuxième espèce (supraconducteurs de London)	$\lambda_L \gg \xi$, $\lambda_L = \sqrt{\dfrac{m_e}{\mu_0 e^2 n_s}}$
Equation de London pour le champ	$\Delta \mathbf{B} - \dfrac{1}{\lambda_L^2} \mathbf{B} = 0$
Densité de supracourant dans les supraconducteurs de première espèce ($\xi \gg \lambda_L$)	$\mathbf{j}_s(\mathbf{r}) = C \int (\mathbf{A}(\mathbf{r}') \mathbf{R}) \mathbf{R} e^{-R/\xi} R^{-4} d^3 r'$, $C = -\dfrac{3e^2 n_s}{4\pi m_e \xi}$
Profondeur de pénétration du champ dans un supraconducteur de première espèce	$\lambda_P = \lambda_L (\xi/\lambda_L)^{1/3}$
Profondeur de pénétration du champ dans un supraconducteur de deuxième espèce	$\lambda_L \ll \lambda_P \ll \xi$
Relation entre la fréquence de la tension alternative et la tension continue dans l'effet Josephson	$\omega = \dfrac{2e}{h} V_0$

III. ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES. OPTIQUE

CHAPITRE 14

ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LE VIDE

§ 14.1. Onde monochromatique plane

Ainsi que nous l'avons vu dans le chapitre 6, le champ électromagnétique peut exister de lui-même, c'est-à-dire sans charges, ni courants. Un tel champ, dit *libre*, ne peut pas être statique, il doit être obligatoirement de nature ondulatoire. Cela signifie que la variation du champ en fonction du temps et des coordonnées n'est pas arbitraire, mais, par contre, ces variables n'interviennent que dans des combinaisons bien déterminées. La situation la plus simple se présente dans une onde plane lorsque les champs (électrique et magnétique) ne dépendent que d'une seule coordonnée cartésienne, disons de x. Dans ces conditions, si l'onde se propage dans le sens des x positifs, la dépendance du champ vis-à-vis des coordonnées et du temps doit être une fonction de $(x - ct)$ ou, ce qui revient au même, de $(t - x/c)$. Ainsi, à un instant $t + \Delta t$ le champ en un point $x + \Delta x$, où $\Delta x = c\,\Delta t$, est le même que celui qui existait au point x à l'instant t, c'est-à-dire que pendant le temps Δt le champ s'est « déplacé » d'une distance égale à Δx. Cela illustre la nature ondulatoire du champ. La grandeur $c = 2{,}997925 \cdot 10^8$ m/s peut s'interpréter comme la vitesse de l'onde électromagnétique. Elle ne dépend pas de la nature de l'onde, c'est-à-dire qu'elle a un caractère d'universalité, et coïncide avec la vitesse de la lumière dans le vide, ce qui certes n'est pas un effet du hasard parce que la lumière n'est rien d'autre qu'une onde électromagnétique.

La plus simple des ondes planes est une *onde plane monochromatique* dont chacune des composantes du champ f se décrit par une fonction harmonique $f = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{c}\right)$, où A et ω sont des constantes (amplitude et fréquence). Les ondes de ce type sont de la plus haute importance parce que toute onde électromagnétique peut être représentée comme une superposition des ondes planes mono-

chromatiques. Rappelons que $T = 2\pi/\omega$ s'appelle période, et $\lambda = cT = 2\pi c/\omega$, longueur d'onde.

La figure 14.1 représente schématiquement l'échelle des ondes électromagnétiques (le spectre des ondes électromagnétiques étant très large, on a utilisé l'échelle logarithmique, c'est-à-dire qu'on a indiqué les valeurs de $\lg(\lambda/\lambda_0)$, où $\lambda_0 = 1$ cm). Seule une partie infime de ce spectre appartient à la lumière visible (de 390 à 770 nm de longueur d'onde ; c'est la partie couverte de hachures sur la figure 14.1). Les ondes radio-électriques (appelées encore couramment ondes hertziennes), dont les longueurs d'onde vont de quelques millimètres à quelques kilomètres, les rayons X, dont les longueurs

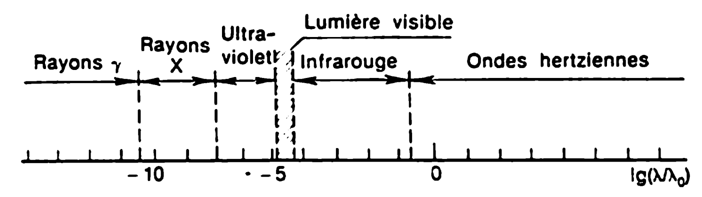


Fig. 14.1. Echelle des ondes électromagnétiques (la partie correspondant à la lumière visible est couverte de hachures)

d'onde sont comprises entre 1,0 et 0,005 nm et les rayons gamma, dont la longueur d'onde dans le rayonnement cosmique est de 10^{-6} nm, ainsi que les rayons ultraviolets et les rayons infrarouges, sont des ondes électromagnétiques.

Comme les équations de Maxwell sont linéaires, il est commode d'utiliser pour la description du champ des grandeurs complexes, c'est-à-dire commencer par supposer que le champ f d'une onde plane est de la forme $f = Ae^{-i\omega(t-x/c)}$, où A est l'amplitude complexe, et ensuite, après avoir trouvé cette fonction, passer aux grandeurs réelles en posant $f = \mathrm{Re}\,[Ae^{-i\omega(t-x/c)}]$. Il est aussi commode de ne pas choisir l'axe x comme direction de propagation de l'onde mais d'introduire un vecteur unitaire $\mathbf{n}$ orienté dans cette direction. Le champ de l'onde plane monochromatique peut alors se représenter sous la forme $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp\{i(\mathbf{kr} - \omega t)\}$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp\{i(\mathbf{kr} - \omega t)\}$, où $\mathbf{k} = \mathbf{n}\omega/c$ est le vecteur d'onde. En introduisant ces expressions dans les équations de Maxwell

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0, \quad \mu_0^{-1}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \varepsilon_0\,\partial\mathbf{E}/\partial t, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{E} = 0$$

et en tenant compte que $\varepsilon_0\mu_0 = c^{-2}$ et que pour une onde plane $\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = i\,[\mathbf{kA}]$ et $\mathrm{div}\,\mathbf{A} = i\mathbf{kA}$, nous obtenons

$$\mathbf{B}_0 = \frac{1}{c}\,[\mathbf{nE}_0], \quad \mathbf{E}_0 = -c\,[\mathbf{nB}_0], \quad \mathbf{nE}_0 = \mathbf{nB}_0 = 0.$$

Ainsi, les amplitudes complexes des champs sont perpendiculaires l'une à l'autre et à la direction de propagation de l'onde.

Nous savons que les densités d'énergies électrique et magnétique sont proportionnelles aux carrés des champs: $w_e = \varepsilon_0 E^2/2$, $w_m = B^2/(2\mu_0)$ (E et B sont ici des grandeurs réelles !). Comme les valeurs moyennes du sinus et du cosinus sont égales à 1/2, nous pouvons écrire $\langle w_e \rangle = \varepsilon_0 \mid \mathbf{E}_0 \mid^2/4$, $\langle w_m \rangle = \mid \mathbf{B}_0 \mid^2/(4\mu_0)$. Nous voyons que les valeurs moyennes des densités d'énergies électrique et magnétique sont égales. Quant à la densité totale d'énergie électromagnétique, elle a pour expression

$$w = \langle w_e \rangle + \langle w_m \rangle = \varepsilon_0 \mid \mathbf{E}_0 \mid^2/2 = \mid \mathbf{B}_0 \mid^2/(2\mu_0).$$

Calculons la densité de flux d'énergie électromagnétique d'une onde plane monochromatique: $\mathbf{S} = [\mathbf{EH}]$. Puisque $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ et $E = Hc\mu_0$, il vient $\langle \mathbf{S} \rangle = cw\mathbf{n}$. Ce résultat présente un sens physique très clair: il signifie que

l'énergie est transportée par l'onde à la vitesse de la lumière *c*.

§ 14.2. Polarisation de l'onde électromagnétique

Nous avons vu au paragraphe précédent que dans une onde plane monochromatique les champs électrique et magnétique sont perpendiculaires à la direction de propagation de l'onde. On dit dans ce cas que l'on a affaire à une onde *à polarisation transversale* ou tout simplement à une onde transversale. Remarquons qu'il n'en est pas ainsi pour une onde sonore se propageant dans un liquide ou dans un gaz (mais non dans un cristal !) dans lesquels le vecteur vitesse des particules est dirigé le long de la direction de propagation de l'onde (onde longitudinale ou onde *à polarisation longitudinale*).

Examinons de plus près la polarisation d'une onde plane monochromatique. Son amplitude complexe peut se représenter sous la forme $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_1 + i\mathbf{E}_2$, où $\mathbf{E}_{1,2}$ sont deux vecteurs réels orthogonaux (de même que le vecteur $\mathbf{E}_0$) à la direction de propagation de l'onde. Le choix de $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$ n'est pourtant pas univoque, car on peut choisir arbitrairement la phase de $\mathbf{E}_0$ (la variation de la phase de $\mathbf{E}_0$ est équivalente à celle de l'origine des temps). C'est pourquoi les vecteurs $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$ peuvent être choisis de telle sorte qu'ils soient orthogonaux l'un à l'autre. La formule $\mathbf{E} = \mathrm{Re}\,\{\mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{kr} - \omega t)\}$ signifie alors que le champ électrique de l'onde plane monochromatique peut être représenté toujours par une superposition de deux champs dirigés le long de deux vecteurs constants perpendiculaires entre eux et variant comme $\cos(\mathbf{kr} - \omega t)$ et $\sin(\mathbf{kr} - \omega t)$, c'est-à-dire avec un déphasage de $\pi/2$. Dans le cas où $\mathbf{E}_0$ est réelle (c'est-à-dire que $\mathbf{E}_2 = 0$) on dit que la polarisation de l'onde est *rectiligne* ou *linéaire*. Ainsi, on peut dire que

dans le cas général, le champ d'une onde plane monochromatique représente une superposition de deux champs perpendiculaires entre eux et correspondant à deux ondes polarisées rectilignement, le déphasage des champs étant égal à $\pi/2$.

L'existence de trois vecteurs $\mathbf{k}$, $\mathbf{E}_1$ et $\mathbf{E}_2$, perpendiculaires entre eux, permet de choisir tout naturellement un système de coordonnées cartésiennes dont les vecteurs unitaires sont dirigés le long de ces vecteurs. A savoir, dirigeons l'axe z le long de $\mathbf{k}$, l'axe x le long de $\mathbf{E}_1$ et l'axe y le long de $\mathbf{E}_2$ (ou bien le long de $-\mathbf{E}_2$ pour obtenir un système de coordonnées à droite). Alors, $(E_x/E_1)^2 + (E_y/E_2)^2 = 1$. Nous voyons qu'en chaque point de l'espace l'extrémité du vecteur $\mathbf{E}$ décrit au cours du temps une ellipse dont les demi-axes sont égaux à E_1 et E_2 (fig. 14.2). Ce vecteur, qui fait avec l'axe x un angle $\chi = \mathbf{kr} - \omega t$, tourne soit en sens horaire (si $\mathbf{E}_2 \parallel y$), soit en sens antihoraire (si $-\mathbf{E}_2 \parallel y$). On dit que l'onde est *polarisée elliptiquement à droite* dans le premier cas et *à gauche* dans le second cas. Dans un cas particulier où $E_1 = E_2$ l'ellipse dégénère en une circonférence, on dit alors que la polarisation de l'onde est *circulaire*.

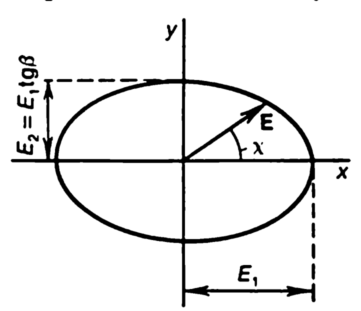


Fig. 14.2. Ellipse décrite par l'extrémité du vecteur intensité du champ électrique

Il est aisé de montrer que le vecteur $\mathbf{B}$, de même que le vecteur $\mathbf{E}$, décrit une ellipse et que les deux ellipses sont égales et ont des orientations perpendiculaires l'une à l'autre.

§ 14.3. Onde partiellement polarisée

Une polarisation d'une onde électromagnétique, caractérisée par une fréquence et une direction de propagation déterminées, ne constitue pas une propriété nécessaire de cette onde. Si une telle onde est émise par un seul atome, elle possède une polarisation rigoureusement déterminée. Mais si les ondes planes monochromatiques, bien qu'elles aient mêmes ω et mêmes $\mathbf{k}$, sont émises par plusieurs atomes identiques, l'onde résultante, tout en restant plane monochromatique, ne possède plus une polarisation. Le fait est que son amplitude complexe est la somme des amplitudes complexes des ondes constitutives, et les phases de ces amplitudes peuvent prendre les valeurs les plus différentes, aucunement liées l'une à l'autre, de sorte que l'amplitude complexe résultante est une quantité aléatoire et non rigoureusement déterminée. Pour expliquer ceci, introduisons le champ excité par le j-ième atome : $\mathbf{E}^{(j)} = \mathrm{Re}\, \mathcal{E}^{(j)} e^{i[\mathbf{kr} - \omega(t - t_j)]}$, où $\mathcal{E}^{(j)}$ est l'amplitude complexe (vectorielle) et t_j, l'origine des temps pour le j-ième atome (par exemple, le commencement de l'émission). Nous supposons que le champ $\mathbf{E}^{(j)}$ a une polarisation elliptique. Le champ résultant $\mathbf{E} = \mathrm{Re}\, \mathcal{E} \exp(i\mathbf{kr} - i\omega t)$ produit

par tous les atomes vaut la somme des champs $\mathbf{E}^{(j)}$; ici, $\mathscr{E}$ est l'amplitude complexe du champ résultant :

$$\mathscr{E} = \sum_j \mathscr{E}^{(j)} \exp(i\omega t_j).$$

Les quantités t_j qui entrent dans cette expression sont évidemment aléatoires ; en outre, les angles que les axes des ellipses de polarisation des ondes font avec les différents j sont eux aussi aléatoires.

Il en résulte que pour étudier les propriétés de polarisation d'une onde résultant de la superposition de nombreuses ondes planes monochromatiques émises par diverses sources indépendantes, on doit faire usage de la notion de probabilité. A savoir, si on décompose l'amplitude résultante $\mathscr{E}$ suivant les vecteurs unitaires normaux $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathscr{E} = \mathscr{E}_1\mathbf{e}_1 + \mathscr{E}_2\mathbf{e}_2$, les quantités complexes $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ (scalaires) seront aléatoires et on devra se donner la probabilité de distribution de ces quantités.

La structure des grandeurs $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ est telle que leurs valeurs moyennes $\langle\mathscr{E}_1\rangle$ et $\langle\mathscr{E}_2\rangle$ sont nulles suivant cette distribution. En effet, puisque les instants t_j figurant dans les facteurs de superposition $\exp(i\omega t_j)$ de l'expression de $\mathscr{E}$ prennent, avec une même probabilité, toutes les valeurs possibles, la valeur moyenne de ces facteurs est nulle : $\langle\exp(i\omega t_j)\rangle = 0$. Pour la même raison, $\langle\mathscr{E}_\alpha \mathscr{E}_\beta\rangle = 0$ (ici, $\alpha, \beta = 1, 2$) et seules les quantités $\langle\mathscr{E}_\alpha \mathscr{E}_\beta^*\rangle$ sont non nulles (les chevrons $\langle\ldots\rangle$ servent à indiquer une valeur moyenne). Ce sont ces quantités qui caractérisent une onde plane monochromatique d'amplitude complexe aléatoire. Dans ce cas $\langle|\mathscr{E}|^2\rangle \equiv \langle\sum_\alpha \mathscr{E}_\alpha \mathscr{E}_\alpha^*\rangle$ détermine l'intensité de l'onde, et quatre quantités

$$\rho_{\alpha\beta} = \langle|\mathscr{E}|^2\rangle^{-1} \langle\mathscr{E}_\alpha \mathscr{E}_\beta^*\rangle$$

le font pour la polarisation de l'onde. Les quantités $\rho_{\alpha\beta}$ forment une matrice à deux lignes hermitienne : $\rho_{\alpha\beta} = \rho_{\beta\alpha}^*$. La somme de ses éléments diagonaux (appelée trace) est égale à l'unité : $\rho_{11} + \rho_{22} \equiv$ $\equiv \mathrm{Sp}\,\rho = 1$. La matrice ρ est appelée *matrice de polarisation*. Bien entendu, les valeurs de ses éléments dépendent du choix de la base, c'est-à-dire des vecteurs unitaires $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$.

Pour une onde polarisée elliptiquement la matrice de polarisation est de la forme $\rho_{\alpha\beta} = |\mathscr{E}|^{-2} \mathscr{E}_\alpha \mathscr{E}_\beta^*$; elle ne comporte naturellement aucune valeur moyenne. Cette matrice représente tout simplement le produit des composantes du vecteur $\mathscr{E}/|\mathscr{E}|$ et de son conjugué $\mathscr{E}^*/|\mathscr{E}|$. La réciproque est elle aussi vraie : pour qu'une onde possède une polarisation déterminée il faut que sa matrice de polarisation soit représentable sous cette forme.

Pour une onde polarisée elliptiquement la matrice de polarisation peut être représentée sous la forme

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos 2\beta \cos 2\chi, & \cos 2\beta \sin 2\chi - i \sin 2\beta \\ \cos 2\beta \sin 2\chi + i \sin 2\beta, & 1 - \cos 2\beta \cos 2\chi \end{pmatrix},$$

où χ est l'angle que le demi-grand axe de l'ellipse fait avec le vecteur unitaire $\mathbf{e}_1$ et β, le degré d'ellipticité de la polarisation (rapport des demi-axes de l'ellipse de polarisation, fig. 14.2). En y posant $\chi = 0$, nous trouverons ρ dans le système de coordonnées dont les axes sont dirigés le long des axes principaux de l'ellipse de polarisation.

Si $\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}$, l'onde est dite *non polarisée* (dans le cas de la lumière on dit que l'on a affaire à une *lumière naturelle*).

Dans le cas général d'une onde partiellement polarisée, la matrice de polarisation peut être représentée sous la forme

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(1-P)\,\delta_{\alpha\beta} + Pe_\alpha e_\beta^*,$$

où e_α sont les composantes d'un certain vecteur unitaire et P est un nombre non négatif inférieur à l'unité. L'onde est polarisée pour $P = 1$ et non polarisée pour $P = 0$. C'est pourquoi la quantité P s'appelle *degré de polarisation.*

Souvent on écrit la matrice de polarisation sous la forme

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\xi_3, & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2, & 1-\xi_3 \end{pmatrix},$$

où ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont des quantités réelles non supérieures à l'unité. On les appelle *paramètres de Stokes.* Pour une onde totalement polarisée

$$\xi_1 = \cos 2\beta \sin 2\chi, \quad \xi_2 = \sin 2\beta, \quad \xi_3 = \cos 2\beta \cos 2\chi,$$

et pour une onde partiellement polarisée

$$\xi_1 = P\cos 2\beta \sin 2\chi, \qquad \xi_2 = P\sin 2\beta, \qquad \xi_3 = P\cos 2\beta \cos 2\chi.$$

Nous voyons que

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = P^2 \leqslant 1.$$

Chose importante: pour la lumière, les paramètres de Stokes peuvent être déterminés directement par expérience. A cet effet, on fait passer la lumière à étudier à travers certains cristaux et on détermine l'intensité de la lumière transmise qui se trouve polarisée rectilignement. C'est son intensité relative qui détermine les quantités ξ_1, ξ_2, ξ_3. C'est ainsi par exemple que si la lumière est polarisée rectilignement suivant l'axe x_1, l'intensité relative de la lumière transmise w_1 détermine directement $\rho_{11} = \frac{1}{2}(1 + \xi_3) = w_1$. Puis, si l'on a obtenu une lumière polarisée rectilignement le long d'un

axe qui fait avec l'axe x_1 l'angle de $\pi/4$, son intensité relative w_2 détermine le paramètre ξ_1, c'est-à-dire que $w_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi_1)$. Enfin, pour trouver ξ_2 il faut obtenir à partir de la lumière à étudier une lumière polarisée circulairement et non rectilignement, ce qui se fait à l'aide de cristaux appropriés. Ainsi, pour une étude complète des propriétés de polarisation de la lumière il est nécessaire de mesurer les intensités correspondant à deux polarisations rectilignes (le plus commodément sous l'angle de $\pi/4$ l'une par rapport à l'autre) et à une polarisation circulaire.

Signalons, avant de clore ce paragraphe, un fait curieux. On sait que l'œil de l'homme distingue la longueur d'onde (couleur) et l'intensité (luminance) de la lumière visible (la plupart des mammifères ne distinguent même pas la longueur d'onde), mais ne discerne pas (en règle générale) sa polarisation. Quant aux yeux de certains insectes, y compris les abeilles, ils sont capables de distinguer non seulement la couleur et la brillance mais aussi la polarisation de la lumière. C'est précisément cette propriété de ses yeux qui permet à l'abeille de trouver la direction de soleil même par un temps nuageux.

§ 14.4. Ondes dans l'espace entre les surfaces métalliques

Après l'étude des ondes électromagnétiques dans l'espace illimité, considérons maintenant les ondes se propageant dans un espace limité. Commençons par un demi-espace limité par une surface métallique.

Comme nous l'avons vu au chapitre 6, sur la surface de séparation des deux milieux les quantités $\mathbf{E}_t$ et B_n (les indices t et n désignent respectivement les composantes du champ tangentielle et normale à la frontière) doivent être continues. Si l'un des milieux considérés est un bon conducteur de l'électricité, par exemple un métal, on peut supposer qu'un champ à haute fréquence n'y pénètre pas. Physiquement ceci tient à ce que dans un milieu de conductivité infiniment grande les champs même très faibles auraient produit des courants infinis ; cette question sera discutée plus à fond au chapitre 16. Ainsi, sur la surface d'un conducteur le champ électromagnétique variable doit satisfaire aux conditions aux limites $\mathbf{E}_t = 0$, $B_n = 0$.

Toutefois, si l'on considère une onde électromagnétique, prise isolément, tombant sur la surface d'un métal, ces conditions aux limites ne seront en général pas satisfaites. Il en découle que

sur une frontière métallique doit apparaître encore une onde électromagnétique dite réfléchie, si bien que le champ électromagnétique dans le vide est constitué par une superposition de deux ondes, incidente et réfléchie, et c'est cette superposition qui satisfait aux conditions aux limites nécessaires.

Pour expliquer ceci, supposons qu'une onde plane monochromatique de vecteur d'onde $\mathbf{k}$ et de fréquence ω tombe sur un plan métallique $x = 0$. Dirigeons l'axe y perpendiculairement au vecteur $\mathbf{k}$; le vecteur $\mathbf{k}$ n'aura alors que deux composantes: k_x et k_z. Par raison de simplification, supposons que le champ électrique $\mathbf{E}^{(i)}$ de l'onde incidente se situe dans le plan (x, z):

$$E_x^{(i)} = A \exp\{ik_x x + ik_z z - i\omega t\},$$

$$E_z^{(i)} = B \exp\{ik_x x + ik_z z - i\omega t\}, \qquad E_y^{(i)} = 0,$$

où A et B sont les amplitudes des composantes du champ. Ces amplitudes ne sont pas indépendantes, elles sont liées par la condition de transversalité de l'onde électromagnétique, si bien que $B = -Ak_x/k_z$.

Puis, désignons par $\mathbf{E}^{(r)}$ l'intensité du champ de l'onde réfléchie et exigeons que pour l'intensité totale $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(i)} + \mathbf{E}^{(r)}$ soient réalisées les conditions aux limites sur la surface $x = 0$. Puisque $E_y^{(i)} = 0$, il est évident que $E_y^{(r)} = 0$, c'est-à-dire que seules les composantes suivant x et z du champ $\mathbf{E}^{(r)}$ sont non nulles:

$$E_x^{(r)} = A' \exp\{ik'_x x + ik'_z z - i\omega' t\},$$

$$E_z^{(r)} = B' \exp\{ik'_x x + ik'_z z - i\omega' t\},$$

où $\mathbf{k}'$ et ω' sont le vecteur d'onde et la fréquence de l'onde réfléchie et A' et B' les amplitudes liées (en vertu de la transversalité de cette dernière) par la relation $B' = -A'k'_x/k'_z$. La condition à la limite $E_t^{(i)} + E_t^{(r)} = 0$ se ramène alors à la relation $B \exp\{ik_z z - i\omega t\} + B' \exp\{ik'_z z - i\omega t\} = 0$ qui doit être vérifiée identiquement pour toutes les valeurs de z et t. Or, cela n'est possible que dans le cas où $k'_z = k_z$, $\omega' = \omega$ et $B' = -B$. Mais $\omega = ck$, $\omega' = ck'$, si bien que le module du vecteur d'onde reste inchangé et seule sa composante suivant x change de signe: $k'_x = -k_x$. Il en résulte que l'angle d'incidence θ est égal à l'angle de réflexion θ^r (les angles sont comptés à partir de la normale à la surface, fig. 14.3).

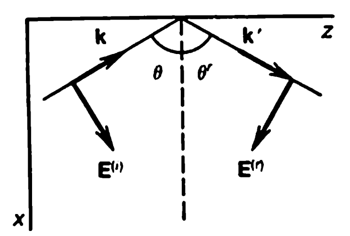


Fig. 14.3. Vecteurs intensités du champ électrique des ondes incidente et réfléchie

Enfin, si nous tenons compte de la relation entre les amplitudes A, B et A', B', nous obtiendrons $A' = A$. Remarquons que dans le problème considéré la condition à la limite $B_n = 0$ est satisfaite identiquement comme il est facile de s'en assurer.

En additionnant $\mathbf{E}^{(i)}$ et $\mathbf{E}^{(r)}$, nous obtenons le champ électrique résultant qui apparaît lorsqu'une onde plane monochromatique

tombe sur une surface métallique :

$$E_x = 2A \cos k_x x \cdot \exp(ik_z z - i\omega t),$$

$$E_z = 2iB \sin k_x x \cdot \exp(ik_z z - i\omega t), \quad E_y = 0.$$

Nous voyons que l'onde progressive ne se conserve que dans la direction tangentielle à la surface et que dans la direction normale il apparaît une onde stationnaire. Dans ce cas la composante E_z s'annule dans les plans $x = 0$, $x = \pi/k_x$, $x = 2\pi/k_x$, . . . (qu'on peut appeler *plans de nœuds* de E_z) et atteint son maximum dans les plans $x = \pi/(2k_x)$, $x = 3\pi/(2k_x)$ (qu'on peut appeler *plans de ventres* de cette composante). A des endroits de nœuds de E_z correspondent des ventres de composante E_x et inversement. Portons notre attention sur le facteur i figurant dans l'expression de E_z. Il signifie que les quantités E_z et E_x sont déphasées de $\pi/2$, c'est-à-dire d'un quart de période, l'une sur l'autre. Le champ magnétique présente une structure analogue.

Regardons maintenant ce qui arrivera si l'on place parallèlement à la première surface métallique, à une distance a d'elle, une deuxième surface métallique. Les composantes du champ seront données par les mêmes formules que précédemment mais le champ E_z devra maintenant s'annuler encore sur la deuxième surface, c'est-à-dire pour $x = a$. Il en résulte que $\sin ak_x = 0$, d'où l'on tire $k_x = \pi n/a$, où n est un nombre entier. Autrement dit, la composante du vecteur d'onde, normale aux deux surfaces métalliques, doit être discrète, à savoir multiple de π/a.

Remarquons encore que $k_x = k \cos\theta = 2\pi \cos\theta/\lambda$, où θ est l'angle d'incidence et λ, la longueur d'onde, d'où $\cos\theta = n\lambda/(2a)$. Mais la valeur du $\cos\theta$ ne peut pas être supérieure à l'unité, par conséquent, la longueur d'onde λ ne peut pas dépasser $2a$. On peut donc dire que

des ondes plus longues « ne pénètrent pas » dans l'espace entre les surfaces métalliques.

Nous voyons que pour $\lambda < 2a$, l'angle θ lui aussi ne peut pas être quelconque : il ne peut prendre que n_m valeurs discrètes, où n_m est la partie entière du rapport $2a/\lambda$ (nombre positif le plus grand inférieur à $2a/\lambda$).

§ 14.5. Guides d'ondes

Ainsi, dans l'espace entre deux surfaces métalliques, le champ est constitué par une onde progressant le long de ces surfaces et stationnaire dans la direction de la normale aux surfaces. Il est clair que si on ajoute encore deux plans métalliques et considère un parallélépipède rectangle infiniment long ainsi formé, le champ sera représenté par une onde qui sera stationnaire déjà dans deux directions et progressive seulement dans une direction, le long de l'axe

du parallélépipède. Un tel parallélépipède de longueur infinie ou, dans le cas général, un cylindre de section quelconque peut être utilisé pour guider les ondes dans une direction déterminée d'où le nom de *guide d'ondes* qu'on lui donne.

Considérons le guide d'ondes rectangulaire le plus simple dont la section est un rectangle de côtés a et b (fig. 14.4). Il est facile de comprendre quelle structure devra posséder la composante z du champ électrique dans un tel guide. Puisqu'elle doit s'annuler sur toute la surface du guide, il est évident que $E_z = C \sin(k_x x) \sin(k_y y) \times \times \exp(ik_z z - i\omega t)$, où C est une constante et k_x, k_y sont les composantes du vecteur d'onde ne pouvant prendre que des valeurs discontinues $k_x = \pi m/a$, $k_y = \pi n/b$ $(m, n = 1, 2, \ldots)$. Comme $\omega = ck$ et $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$, il vient

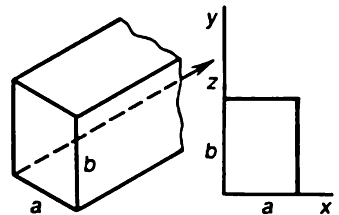


Fig. 14.4. Guide d'ondes rectangulaire et sa section

$$\omega = c\sqrt{\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 + k_z^2}.$$

Les entiers m et n ont un sens physique simple: ils déterminent les nombres de points nodaux de la composante E_z du champ, à savoir: il y a $(m - 1)$ points nodaux le long de l'axe x et il y en a $(n + 1)$ le long de l'axe y. L'onde ayant des valeurs données de m et n est appelée *harmonique mn* du champ E et notée E_{mn}.

A la propagation de l'onde correspondent des valeurs réelles de k_z. Pour cette raison, seules les ondes dont la fréquence est supérieure à $\pi c \sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}$ peuvent se propager le long du guide. Cette fréquence est appelée *fréquence limite* ou *fréquence de coupure* et notée ω_{mn}. Il est évident que $\omega = \sqrt{\omega_{mn}^2 + c^2 k_z^2}$.

Cherchons la vitesse de propagation de l'onde le long de l'axe du guide. Elle se détermine par la condition de constance du facteur de phase $\exp\{ik_z z - i\omega t\}$, et celui-ci est constant pour un observateur qui se déplace le long de l'axe z à la vitesse $dz/dt = \omega/k_z$. Pour cette vitesse de l'onde, appelée *vitesse de phase*, nous avons $v_{\text{ph}} = c(1 - \omega_{mn}^2/\omega^2)^{-1/2}$; elle est de toute évidence supérieure à la vitesse de la lumière et devient même infiniment grande pour $\omega = \omega_{mn}$.

Proposons-nous d'établir la structure des composantes du champ dans un guide d'ondes de section transversale quelconque. A cet effet, reportons-nous aux équations de Maxwell en les écrivant sous la forme suivante:

$$[\nabla \mathbf{E}] = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad [\nabla \mathbf{H}] = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

où $\nabla = \mathbf{i}_x\partial/\partial x + \mathbf{i}_y\partial/\partial y + \mathbf{i}_z\partial/\partial z$ est l'opérateur nabla ($\mathbf{i}_x$, $\mathbf{i}_y$, $\mathbf{i}_z$ étant les vecteurs unitaires orientés le long des axes x, y, z), **B** et **D** sont les inductions liées aux intensités **H** et **E** par les relations $\mathbf{B} = \mu_0\mu\mathbf{H}$, $\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}$. Ici, ε et μ sont la permittivité électrique et la perméabilité magnétique du matériau remplissant le guide ; elles sont égales à l'unité dans le cas du vide. Nous considérons que toutes les composantes des champs sont proportionnelles à $\exp\{ik_z z - i\omega t\}$. C'est pourquoi dans les équations de Maxwell

$$[\nabla\mathbf{E}] = i\omega\mathbf{B}, \quad [\nabla\mathbf{B}] = -i\omega\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\mathbf{E} \quad (\varepsilon_0\mu_0 = c^{-2})$$

nous pouvons poser

$$\nabla = \nabla_\perp + i\mathbf{i}_z k_z, \quad \nabla_\perp = \mathbf{i}_x\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}_y\frac{\partial}{\partial y}.$$

En remplaçant **E** et **B** par $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\perp + \mathbf{i}_z E_z$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_\perp + \mathbf{i}_z B_z$ ($\mathbf{E}_\perp$, $\mathbf{B}_\perp$ et E_z, B_z sont des composantes des champs transversales et longitudinales par rapport à la direction de propagation z), nous obtenons

$$[\nabla\mathbf{E}] = [\nabla_\perp\mathbf{i}_z]\,E_z + [\nabla_\perp\mathbf{E}_\perp] + ik_z\,[\mathbf{i}_z\mathbf{E}_\perp]$$

et une relation analogue pour $[\nabla\mathbf{B}]$. Introduisons ces expressions dans les équations de Maxwell et multiplions ces dernières vectoriellement par $\mathbf{i}_z$. En faisant usage de la formule $[\mathbf{a}\,[\mathbf{bc}]] = \mathbf{b}\,(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{ab})$, nous obtenons

$$[\mathbf{i}_z\,[\nabla\mathbf{i}_z]]\,E_z = \nabla_\perp E_z, \quad [\mathbf{i}_z\,[\nabla_\perp\mathbf{E}_\perp]] = 0.$$

Les équations de Maxwell prennent donc la forme suivante:

$$\nabla_\perp E_z - ik_z\mathbf{E}_\perp = i\omega\,[\mathbf{i}_z\mathbf{B}_\perp],$$
$$\nabla_\perp B_z - ik_z\mathbf{B}_\perp = -i\omega c^{-2}\varepsilon\mu\,[\mathbf{i}_z\mathbf{E}_\perp].$$

Ces équations peuvent être résolues par rapport à $\mathbf{E}_\perp$ et $\mathbf{B}_\perp$:

$$i\,(k_z^2 - \varepsilon\mu\omega^2c^{-2})\,\mathbf{E}_\perp = k_z\,\nabla_\perp E_z - \omega\,[\mathbf{i}_z\nabla_\perp]\,B_z,$$
$$i\,(k_z^2 - \varepsilon\mu\omega^2c^{-2})\,\mathbf{B}_\perp = k_z\,\nabla_\perp B_z + \varepsilon\mu\omega c^{-2}\,[\mathbf{i}_z\nabla_\perp]\,E_z.$$

Nous voyons que les composantes transversales des champs s'expriment univoquement par l'intermédiaire des composantes longitudinales qui entrent indépendamment dans les seconds membres de ces égalités. Ceci permet de représenter les champs dans les guides d'ondes par une superposition des champs de deux types indépendants. Dans les champs d'un de ces types $E_z \neq 0$ et $B_z = 0$, et dans l'autre type $B_z \neq 0$ et $E_z = 0$. Les champs du premier type sont appelés *ondes E* ou *ondes transversales magnétiques* (en abrégé *ondes TM*). Les champs du deuxième type sont appelés *ondes H* ou *ondes transversales électriques* (en abrégé *ondes TE*).

Toutes les composantes des champs des ondes E s'expriment par E_z et toutes les composantes des champs des ondes H s'expri-

ment par H_z ; ces grandeurs elles-mêmes satisfont aux mêmes équations

$$\Delta_\perp E_z + k_\perp^2 E_z = 0, \quad \Delta_\perp H_z + k_\perp^2 H_z = 0,$$

où $k_\perp^2 = \varepsilon\mu\omega^2 c^{-2} - k_z^2$ et $\Delta_\perp = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, mais avec des conditions aux limites différentes. Pour les ondes E, la condition $E_z = 0$ doit être satisfaite sur le contour C de la section transversale du guide. Dans le cas des ondes H c'est la composante $\mathbf{E}_t$ qui doit s'annuler et cette condition est équivalente, comme il est facile de s'en assurer, à la nullité de la dérivée de H_z normale au contour. Ainsi, les conditions aux limites imposées sont les suivantes:

$$E_z|_C = 0, \quad \left.\frac{\partial H_z}{\partial n}\right|_C = 0.$$

Revenons au guide d'ondes rectangulaire vide et écrivons l'expression de H_z de l'onde H:

$$H_z = C \cos\frac{\pi m x}{a} \cos\frac{\pi n y}{b} e^{i(k_z z - \omega t)} \quad (m, n = 0, 1, \ldots),$$

où C est une constante. Nous voyons que cette expression diffère de celle obtenue pour E_z dans l'onde E: elle contient les cosinus au lieu des sinus. La fréquence limite pour les ondes des deux types a pour valeur:

$$\omega_{mn} = \pi c \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}.$$

Si l'on suppose pour fixer les idées que $a < b$, la fréquence limite aura sa valeur minimale $\omega_{01} = \pi c n/b$ pour une onde H de $m = 0$, $n = 1$ qu'on note H_{01} (pour les ondes E la fréquence limite minimale est ω_{11}).

On montre que

pour un guide d'ondes de section quelconque (simplement connexe) il existe aussi obligatoirement une fréquence limite ω_{lim} telle que $\omega = \sqrt{\omega_{\text{lim}}^2 + c^2 k_z^2}$ et donc $v_{\text{ph}} > c$.

De même que dans le cas particulier d'un guide d'ondes rectangulaire, la fréquence limite se détermine par deux nombres entiers m et n et peut donc être notée ω_{mn} (bien que dans le cas général la dépendance de ω_{mn} vis-à-vis de m et n soit plus complexe).

Posons-nous maintenant la question suivante: les ondes ayant la même structure des champs que dans l'espace illimité, c'est-à-dire des ondes purement transversales de $E_z = H_z = 0$, peuvent-elles se propager dans un guide d'ondes? Le système d'équations inhomogènes (contenant aux seconds membres E_z, H_z) obtenu plus haut pour $\mathbf{E}_\perp$, $\mathbf{H}_\perp$ se transforme dans le cas des ondes transversales en un système homogène ; la condition d'existence de solutions non

triviales de ce système est $\omega = ck_z$. En d'autres termes, la vitesse de phase d'une telle onde est égale à la vitesse de la lumière et donc la fréquence limite n'existe pas : $\omega_{mn} = 0$. Mais si $\omega = ck_z$, $k_\perp = 0$ et les équations pour les champs $\mathbf{E}_\perp$, $\mathbf{H}_\perp$ cessent d'être des équations d'ondes et se transforment en équations bidimensionnelles de Laplace, c'est-à-dire des équations bien connues décrivant un champ électrostatique. Or, le champ électrostatique à l'intérieur d'une région simplement connexe limitée par une surface métallique est nul, c'est-à-dire que l'équation de Laplace à conditions aux limites nulles n'a pas de solutions dans une région simplement connexe. Nous en arrivons à la conclusion suivante :

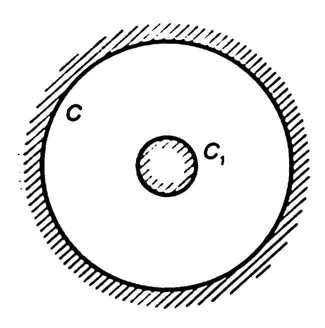


Fig. 14.5. Section transversale d'un câble coaxial

les ondes électromagnétiques transversales ne peuvent pas se propager dans un guide d'ondes de section simplement connexe ; dans un tel guide on a toujours $\omega_{mn} > 0$ et $v_{ph} > c$.

Il n'en est pas ainsi pour un guide d'ondes de section doublement connexe, par exemple, lorsqu'il comporte un conducteur cylindrique intérieur (fig. 14.5 sur laquelle C_1 est le contour de ce conducteur). Dans ce cas l'équation de Laplace possède pour l'espace compris entre les surfaces C et C_1 des solutions non triviales, si bien que

les ondes transversales peuvent se propager dans un tel guide d'ondes à la vitesse c. Au point de vue pratique le guide d'ondes le plus important de ce type est le *câble coaxial*.

Soulignons que la distribution du champ dans la région doublement connexe entre les surfaces C et C_1 a un caractère électrostatique.

§ 14.6. Résonateurs

Les guides d'ondes sont le siège d'une propagation libre des ondes électromagnétiques dont l'onde progressive chemine le long de l'axe du guide, alors que dans des directions perpendiculaires à l'axe il se forme, par suite de la réflexion sur les surfaces métalliques du guide, des ondes stationnaires.

Regardons maintenant ce qui arrivera si les deux extrémités du guide d'ondes sont limitées par des cloisons métalliques, par exemple par des plans métalliques $z = 0$ et $z = d$. Les ondes seront réfléchies sur ces faces terminales, de sorte que le long de l'axe z l'onde progressive cédera sa place à une onde stationnaire. Les conditions aux limites imposées aux champs sur les faces terminales du guide d'ondes sont, bien entendu, les mêmes que celles sur ses parois, à

savoir la composante tangentielle du champ électrique et la composante normale du champ magnétique doivent s'annuler.

Nous avons vu que dans le guide d'ondes les composantes longitudinales des champs possèdent la structure de la forme $C\psi(x, y) \times \times \exp(ik_z z - i\omega t)$, où la fonction réelle ψ détermine la variation en fonction de x, y (elle est différente pour les ondes E et H) et C est une constante complexe quelconque (amplitude complexe). De ce fait, le champ de l'onde progressant dans le sens des z positifs est proportionnel à $C \exp(ik_z z - i\omega t)$, et le champ de l'onde réfléchie cheminant dans le sens des z négatifs est proportionnel à $C' \times \times \exp(-ik_z z - i\omega t)$ (C' étant l'amplitude complexe de l'onde réfléchie).

Pour une onde H, la condition aux limites $H_z = 0$ pour $z = 0$ donne $H_z \sim \sin k_z z$. En ajoutant la condition aux limites $H_z = 0$ pour $z = d$, nous obtenons $k_z = \pi p/d$, où p est un nombre entier. Autrement dit,

$$H_z = \psi_H(x, y) \sin \frac{\pi p z}{d} e^{-i\omega t} \quad (p = 1, 2, \ldots),$$

où $\psi_H(x, y)$ est une certaine fonction de x et y.

Comme il est aisé de s'en assurer à l'aide des formules générales définissant les champs dans le guide d'ondes, dans le cas d'une onde E la condition de nullité de $\mathbf{E}_t$ sur les faces terminales du guide exige que la dérivée $\partial E_z/\partial z$ soit nulle sur ces surfaces. On peut donc écrire

$$E_z = \psi_E(x, y) \cos \frac{\pi p z}{d} e^{-i\omega t} \quad (p = 0, 1, \ldots),$$

où $\psi_E(x, y)$ est une certaine fonction de x et y.

Nous voyons que dans un guide d'ondes dont les extrémités sont fermées la quantité k_z devient discontinue. Il en découle une conclusion importante concernant la fréquence d'oscillations ω. Comme $\omega = ck$ et $k^2 = k_t^2 + k_z^2$ et $k_t^2 = \omega_{mn}^2/c^2$, où ω_{mn} est la fréquence limite de l'oscillation mn, nous avons

$$\omega = \sqrt{\omega_{mn}^2 + \frac{\pi^2 c^2 p^2}{d^2}}.$$

Cette quantité se détermine par trois nombres entiers m, n et p (pour une forme donnée du guide d'ondes et une distance donnée entre ses faces terminales) et peut être notée ω_{mnp}. En particulier, pour un guide rectangulaire

$$\omega_{mnp} = \pi c \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{d^2}}.$$

En d'autres termes,

le spectre de fréquences d'un guide d'ondes aux extrémités fermées est discontinu.

Le guide d'ondes aux extrémités fermées est un cas particulier d'une cavité entourée de tous les côtés d'une enveloppe métallique et le résultat obtenu est un cas particulier du résultat général qui consiste en ce que le champ électromagnétique dans une telle cavité, si cette dernière est isolée de l'espace environnant, possède un spectre de fréquences discontinu dépendant de la géométrie de la cavité, chacune des fréquences de ce spectre étant déterminée par trois nombres entiers. Une telle cavité est appelée *cavité résonnante* ou *résonateur*, et les fréquences constituant son spectre sont appelées *fréquences propres du résonateur.* Les cavités résonnantes sont largement utilisées comme circuits oscillants dans la technique des hyperfréquences.

Si les parois de la cavité résonnante présentaient une conductivité infinie, le champ électromagnétique n'y pénétrerait pas et l'énergie électromagnétique serait conservée à l'intérieur de la cavité sans affaiblissement. Autrement dit, une fois introduit dans la cavité résonnante, le champ y effectuerait des oscillations sur une des fréquences propres de la cavité sans atténuation. Nous pouvons en conclure, même sans procéder à la résolution des équations de Maxwell pour la cavité, que les amplitudes d'oscillations des champs électrique et magnétique doivent être déphasées entre elles de $\pi/2$ et que leur rapport est égal à $\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$.

Mais en réalité l'onde électromagnétique pénètre dans les parois de la cavité où son énergie se transforme en chaleur Joule. C'est la raison pour laquelle l'énergie électromagnétique emmagasinée dans la cavité diminue progressivement. Le rapport de l'énergie emmagasinée dans la cavité à l'énergie perdue pendant chaque période d'oscillations est appelé *coefficient de surtension* ou *facteur de qualité* de la cavité résonnante. Si $W(t)$ est l'énergie de la cavité à un instant t et Q, son facteur de qualité, l'énergie W varie suivant la loi $\mathrm{d}W/\mathrm{d}t = -\omega_0 W/(2\pi Q)$, d'où

$$W(t) = W_0 \exp[-\omega_0 t/(2\pi Q)],$$

où ω_0 est la fréquence de résonance et W_0, la valeur initiale de l'énergie dans la cavité. On peut en conclure que les champs dans la cavité résonnante varient avec le temps non suivant la loi $\exp(-i\omega_0 t)$ mais suivant la loi

$$E(t) = E_0 \exp[-i\omega_0 t - \omega_0 t/(4\pi Q)].$$

Un tel champ, qui n'est pas parfaitement harmonique, peut être représenté par une superposition des harmoniques constitutifs

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) \exp(-i\omega t)\, \mathrm{d}\omega,$$

où l'amplitude du champ $E(\omega)$ de fréquence ω se définit par la formule

$$E(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t) \exp(i\omega t)\, dt/(2\pi).$$

Connaissant $E(\omega)$, on peut déterminer la distribution en fréquence de l'énergie : dans l'intervalle de fréquences $(\omega, \omega + d\omega)$ l'énergie est proportionnelle à $|E(\omega)|^2 d\omega$. Il est aisé de s'assurer que $|E(\omega)|^2 \sim \sim \{(\omega - \omega_0)^2 + [\omega_0/(4\pi Q)]^2\}^{-1}$.

Ainsi, au lieu de la fréquence discontinue ω_0 le champ dans la cavité présente tout un spectre de fréquences. La courbe de variation de l'intensité du champ en fonction de la fréquence est montrée sur la figure 14.6. L'intensité prend sa valeur maximale à la fréquence de résonance ω_0, elle diminue lorsque $|\omega - \omega_0|$ augmente. L'intensité du champ est deux fois plus petite que sa valeur maximale pour $\omega = \omega_0 \pm \frac{1}{2} \Delta\omega$, où $\Delta\omega = \omega_0/(2\pi Q)$. La quantité $\Delta\omega$ détermine la largeur effective de la courbe de résonance. Ainsi,

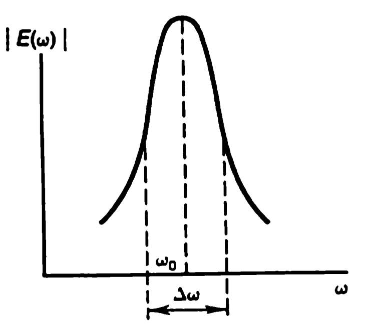


Fig. 14.6. Courbe de résonance

le facteur de qualité est proportionnel au rapport de la fréquence de résonance à la largeur de la courbe de résonance.

Regardons maintenant ce qui détermine le facteur de qualité de la cavité résonnante. Puisque les pertes d'énergie sont dues à la pénétration du champ dans les parois de la cavité, c'est la profondeur de pénétration δ du champ dans les parois de la cavité qui doit présenter une grande importance. Cette quantité est appelée *profondeur de l'effet pelliculaire* (elle sera définie au chapitre 16). Le facteur Q est facile à évaluer si l'on connaît δ. En effet, l'énergie emmagasinée dans la cavité est proportionnelle à son volume V, alors que l'énergie perdue est proportionnelle au volume de la couche d'épaisseur δ, c'est-à-dire à $S\delta$, où S est l'aire de la surface des parois de la cavité. Le facteur de qualité doit donc s'exprimer par la formule $Q = = GV/(S\delta)$, où G est un coefficient sans dimensions dont la valeur dépend de la géométrie de la cavité et de la structure du champ à la résonance. Nous n'indiquons pas ici les expressions concrètes pour G.

FORMULES FONDAMENTALES

Densité d'énergie d'une onde	$w=\frac{1}{2}\varepsilon_0\,\lvert\mathbf{E}_0^2\rvert=\frac{1}{2\mu_0}\,\lvert\mathbf{B}_0^2\rvert$
Polarisation elliptique	$\left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2+\left(\frac{E_y}{E_2}\right)^2=1$
Matrice de polarisation et paramètres de Stokes	$\rho=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\xi_3, & \xi_1-i\xi_2\\ \xi_1+i\xi_2, & 1-\xi_3\end{pmatrix}$
Onde totalement polarisée	$\xi_1=\cos 2\beta\sin 2\chi,$ $\xi_2=\sin 2\beta,\quad \xi_3=\cos 2\beta\cos 2\chi$
Onde partiellement polarisée	$\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2=P^2\leqslant 1$
Equation pour les composantes longitudinales des champs	$\Delta_\perp E_z+k_\perp^2E_z=0,$ $\Delta_\perp B_z+k_\perp^2B_z=0,$ $E_z\,\lvert_C=0,\ \partial B_z/\partial n\,\lvert_C=0$
Fréquences propres d'une cavité résonnante rectangulaire	$\omega_{mnp}=$ $=\pi c\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2+\left(\frac{p}{d}\right)^2}$
Amortissement de l'énergie dans la cavité résonnante	$W(t)=W(0)\exp[-\omega_0t/(2\pi Q)]$

CHAPITRE 15

INTERFÉRENCES ET COHÉRENCE

§ 15.1. Intensité d'une superposition des ondes monochromatiques

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, la superposition de deux ondes planes monochromatiques progressives ayant même amplitude et même fréquence mais se propageant dans des sens opposés donne naissance à une onde stationnaire dont l'intensité varie, à la différence des intensités des ondes de départ, d'un point à un autre, en s'annulant aux nœuds et en passant par un maximum (égal au double de l'intensité totale des ondes de départ) aux ventres. Un tel comportement de l'intensité tient à ce que

ce sont les intensités des champs qui s'ajoutent et non les intensités d'énergies.

Le fait est que par intensité d'énergie on entend la densité, moyenne dans le temps, du flux d'énergie de l'onde et comme cette quantité ne diffère de la valeur moyenne (dans le temps) du carré du champ électrique $\langle \mathbf{E}^2 \rangle$ que par un facteur multiplicatif, on peut entendre par intensité d'énergie de l'onde la quantité $J = \langle \mathbf{E}^2 \rangle$.

Si l'on considère la superposition de deux ondes monochromatiques dont les champs électriques en un certain point sont $\mathbf{E}_1 = \mathbf{A}_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ et $\mathbf{E}_2 = \mathbf{A}_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$, où $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ sont les amplitudes et φ_1, φ_2, les phases initiales (nous admettons pour simplifier que les ondes sont polarisées rectilignement), les intensités des deux ondes seront $J_1 = {}^1/_2 A_1^2$ et $J_2 = {}^1/_2 A_2^2$. Le champ résultant au point considéré $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$, si bien que l'intensité de l'onde résultante aura pour expression

$$J = \langle \mathbf{E}^2 \rangle = \langle \mathbf{E}_1^2 \rangle + \langle \mathbf{E}_2^2 \rangle + 2\,\langle \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \rangle = J_1 + J_2 + 2\,\langle \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \rangle.$$

Nous voyons qu'elle diffère de la somme des intensités des ondes superposées par une quantité

$$2\,\langle \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \rangle = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \,[\langle \cos(\psi_1 - \psi_2) \rangle + \langle \cos(\psi_1 + \psi_2) \rangle],$$

où $\psi_1 = \omega_1 t + \varphi_1$ et $\psi_2 = \omega_2 t + \varphi_2$. Il est clair que $\langle \cos(\psi_1 + \psi_2) \rangle = 0$. Pour ce qui est de la quantité $\langle \cos(\psi_1 - \psi_2) \rangle$, elle est elle aussi nulle si $\omega_1 \neq \omega_2$ et ne peut différer de zéro que dans le cas où les fréquences ω_1 et ω_2 sont égales. Nous en tirons la conclusion que

dans le cas d'une superposition de deux ondes de fréquences différentes ce sont les intensités des ondes qui s'ajoutent :

$$J = J_1 + J_2 \quad (\omega_1 \neq \omega_2).$$

Il est clair que cette assertion est également valable pour la superposition d'un plus grand nombre d'ondes. Si les ondes ont même fréquence et la différence de phase $(\varphi_1 - \varphi_2)$ est une quantité bien déterminée (et non aléatoire), l'intensité de l'onde résultante aura pour valeur

$$J = J_1 + J_2 + J_{12}; \quad J_{12} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) =$$
$$= 2\sqrt{J_1J_2}\cos\chi\cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

où χ est l'angle formé par $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$. Nous voyons que si $\chi \neq \pi/2$ et $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \neq \pi/2$, $J_{12} \neq 0$, de sorte que l'intensité de l'onde résultante diffère de la somme des intensités des ondes superposées. Ce phénomène est appelé *interférence* des ondes et le *terme* J_{12} est dit *d'interférence.* Le terme d'interférence étant compris entre $-2\sqrt{J_1J_2}$ et $2\sqrt{J_1J_2}$, l'intensité de l'onde résultante peut varier dans les limites définies par l'inégalité

$$J_{\min} \leqslant J \leqslant J_{\max}, \quad J_{\min} = (\sqrt{J_1} - \sqrt{J_2})^2. \quad J_{\max} = (\sqrt{J_1} + \sqrt{J_2})^2.$$

Si $J_1 = J_2$, $J_{\min} = 0$, $J_{\max} = 4J_1$.

Remarquons que si deux ondes (même de fréquences identiques) sont polarisées rectilignement dans deux directions perpendiculaires l'une à l'autre, c'est-à-dire si $\chi = \pi/2$, elles ne pourront pas interférer. Ce fait a été établi expérimentalement par Fresnel et Arago qui ont étudié les propriétés de polarisation de la lumière ayant traversé un cristal. Ils ont été conduits à cette conclusion que *les ondes lumineuses doivent être transversales et ne peuvent pas être longitudinales.* En effet, une onde transversale peut se trouver dans deux états indépendants à polarisations perpendiculaires entre elles alors qu'une onde longitudinale n'a qu'un seul état.

Nous avons considéré, pour des raisons de simplicité, les ondes polarisées rectilignement. Mais on peut également obtenir des interférences entre les ondes possédant des polarisations quelconques. De plus, les ondes ne doivent être obligatoirement planes. Pour expliquer ceci, rappelons que dans le cas le plus général l'intensité du champ d'une onde monochromatique peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}\{\mathscr{E}(\mathbf{r})\, e^{-i\omega t}\},$$

où $\mathscr{E}(\mathbf{r})$ est un certain vecteur complexe dépendant de la coordonnée $\mathbf{r}$ du point d'observation et satisfaisant à l'équation d'onde $\Delta\mathscr{E}(\mathbf{r}) + (\omega^2/c^2)\,\mathscr{E}(\mathbf{r}) = 0$ avec des conditions aux limites déterminées. L'intensité de l'onde au point $\mathbf{r}$ est définie par la formule

$$J(\mathbf{r}) = \langle(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t))^2\rangle = \frac{1}{4}\langle(\mathscr{E}^2 e^{-2i\omega t} + \mathscr{E}^{*2} e^{2i\omega t} + 2\mathscr{E}\mathscr{E}^*)\rangle,$$

et comme les valeurs moyennes dans le temps des deux premiers termes sont nulles, il vient

$$J(\mathbf{r}) = {}^1/_2 \mathscr{E}(\mathbf{r})\, \mathscr{E}^*(\mathbf{r}).$$

Supposons maintenant qu'il se produit l'interférence de deux ondes dont les champs au point $\mathbf{r}$ sont $\operatorname{Re} \mathscr{E}_1 e^{-i\omega t}$ et $\operatorname{Re} \mathscr{E}_2 e^{-i\omega t}$. Le champ résultant sera $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \mathscr{E}(\mathbf{r})\, e^{-i\omega t}$, où $\mathscr{E}(\mathbf{r}) = \mathscr{E}_1(\mathbf{r}) + \mathscr{E}_2(\mathbf{r})$, et l'intensité de l'onde résultante aura pour expression

$$J(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathscr{E}(\mathbf{r})\, \mathscr{E}^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathscr{E}_1(\mathbf{r}_1)\, \mathscr{E}_1^*(\mathbf{r}_1) + \\ + \frac{1}{2} \mathscr{E}_2(\mathbf{r})\, \mathscr{E}_2^*(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \{\mathscr{E}_1(\mathbf{r})\, \mathscr{E}_2^*(\mathbf{r}) + \mathscr{E}_1^*(\mathbf{r})\, \mathscr{E}_2(\mathbf{r})\}.$$

En introduisant le terme d'interférences

$$J_{12}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \{\mathscr{E}_1(\mathbf{r})\, \mathscr{E}_2^*(\mathbf{r}) + \mathscr{E}_1^*(\mathbf{r})\, \mathscr{E}_2(\mathbf{r})\},$$

on peut récrire la formule de $J(\mathbf{r})$ sous la forme

$$J(\mathbf{r}) = J_1(\mathbf{r}) + J_2(\mathbf{r}) + J_{12}(\mathbf{r}).$$

Si les fonctions $\mathscr{E}_1(\mathbf{r})$ et $\mathscr{E}_2(\mathbf{r})$ ne sont pas tout à fait aléatoires, le terme d'interférences est en général non nul, de sorte que l'interférence a lieu.

L'ensemble des fréquences des ondes superposées est appelé spectre de l'onde résultante. Le spectre ne doit pas nécessairement être composé de fréquences discrètes, c'est-à-dire être discontinu. Il peut aussi être continu, c'est-à-dire que les fréquences peuvent remplir de façon continue un certain intervalle.

Dans ce dernier cas l'onde résultante se décrit par une intégrale sur les fréquences appelée *intégrale de Fourier* et non par une somme sur les fréquences. Cette intégrale s'écrit commodément sous forme complexe $\mathbf{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_\omega \exp(-i\omega t)\, d\omega$, où $\mathbf{E}_\omega$ est l'amplitude complexe de l'onde de fréquence ω. Formellement l'intégration porte ici sur toutes les fréquences tant positives (seules ayant un sens physique) que négatives. Pour que le champ $\mathbf{E}$ soit réel, la condition $\mathbf{E}_{-\omega} = \mathbf{E}_\omega^*$ doit être remplie. L'amplitude complexe $\mathbf{E}_\omega$ (on l'appelle composante de Fourier) est liée au champ $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t)$ par la relation $\mathbf{E}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(t) \exp(i\omega t)\, dt/(2\pi)$. L'intensité des ondes dans l'intervalle de fréquences $(\omega, \omega + d\omega)$ est proportionnelle à $|\mathbf{E}_\omega|^2\, d\omega$, tandis que l'intensité totale (définie par l'intégrale du carré du

champ sur le temps) est liée à E_ω par la relation

$$\int_{-\infty}^{\infty} E^2 \, dt = 4\pi \int_0^{\infty} |E_\omega|^2 \, d\omega$$

(*formule de Parseval*).

§ 15.2. Faisceaux cohérents et incohérents

Nous avons montré au paragraphe précédent que les ondes de fréquences différentes n'interfèrent pas, alors que les ondes monochromatiques de même fréquence peuvent interférer ou, comme on dit, peuvent être *cohérentes* entre elles. Mais à cet effet le cosinus de la différence de phase entre les ondes $\delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ doit être non nul. Nous avons considéré le cas où cette quantité avait une valeur bien déterminée. Or, les phases des ondes émises par les différents atomes sont des quantités aléatoires aucunement corrélées l'une avec l'autre. C'est pourquoi les phases des ondes émises par des sources macroscopiques réelles sont elles aussi des quantités aléatoires. Une question se pose donc: comment faire pour que cos $(\varphi_1 - \varphi_2)$ ou plus exactement la valeur moyenne de cette quantité sur toutes les valeurs possibles de φ_1 et φ_2 ne soit pas identiquement nulle. On a estimé jusqu'à ces derniers temps qu'à cet effet les deux ondes devaient être produites non pas par des sources différentes, mais par une source commune: dans ce cas les termes stochastiques (aléatoires) des phases φ_1 et φ_2 d'origine commune se neutraliseront mutuellement, si bien que la différence de phase $\varphi_1 - \varphi_2$ sera une quantité déterminée (plus exactement, partiellement déterminée). Or, les sources peuvent être différentes si elles sont constituées, par exemple, par des lasers de même fréquence.

Nous sommes ainsi conduits à une conclusion importante: pour pouvoir observer le phénomène d'interférences il faut faire usage de deux ondes émises par une source commune (ou par deux lasers de même type). Dans le cas de la lumière émise par une seule source ceci signifie qu'il faut prendre un faisceau lumineux, le diviser artificiellement en deux parties et faire cheminer les faisceaux séparés de telle sorte que leurs phases deviennent différentes. Puis, en superposant ces faisceaux l'un à l'autre, on peut observer le phénomène d'interférences.

Ces faisceaux ne sont pourtant pas totalement cohérents, c'est-à-dire que l'intensité de la lumière résultant de leur superposition ne se détermine pas entièrement par les formules établies au paragraphe précédent et valables pour des ondes parfaitement monochromatiques présentant une différence de phase absolument déterminée. C'est que ces faisceaux sont produits par des sources étendues et de ce fait ils ont obligatoirement un caractère stochastique plus ou moins

marqué. C'est pour cette raison qu'on les appelle faisceaux *partiellement cohérents*. En outre, on doit tenir compte du fait que les faisceaux ne peuvent jamais être parfaitement monochromatiques. Ceci tient à ce que les ondes électromagnétiques, même celles émises par un seul atome quelconque, ne peuvent jamais être absolument monochromatiques. Telle est la constitution de la matière.

Prenons, par exemple, un atome isolé qui émet, en un certain état, de la lumière. Si la durée de vie de cet état se détermine par une quantité τ, le degré de non-monochromaticité, c'est-à-dire la dispersion de fréquence $\Delta\omega$ par rapport à une certaine fréquence moyenne ω_0, est de l'ordre de $\Delta\omega \sim 1/\tau$. C'est seulement pour une durée de vie infiniment longue de l'état que la lumière pourrait être parfaitement monochromatique, alors que pour des durées de vie finies, ce qui est toujours le cas, elle n'est pas monochromatique, et le degré de non-monochromaticité est d'autant plus élevé que la durée de vie est plus courte. C'est pour cette raison que les ondes électromagnétiques ne peuvent pas être rigoureusement monochromatiques; elles peuvent être tout au plus quasi monochromatiques, c'est-à-dire telles que $\Delta\omega \ll \omega_0$.

Si, au lieu d'un atome isolé, on considère une source réelle d'ondes quasi monochromatiques, elle satisfait, elle aussi, toujours à la condition $\Delta\omega \sim 1/\tau$, où τ détermine la durée du train d'ondes (*paquet d'ondes*) émis par la source (v. chap. 16).

La quantité τ joue un rôle important dans l'observation du phénomène d'interférences. Le fait est que la différence de phase entre les faisceaux séparés résulte du mouvement des faisceaux, c'est-à-dire se détermine par la différence Δs de leur chemin optique. D'un autre côté, pendant la durée τ d'existence du train d'ondes la lumière parcourt une distance $c\tau$. Ceci signifie que dans le problème considéré les grandes distances n'ont pas de sens. C'est pourquoi les interférences entre les faisceaux séparés et ensuite réunis ne peuvent s'observer que dans le cas où $\Delta s \ll c\tau$ ou $\Delta s \ll l_c$, où $l_c = c\tau = c/\Delta\omega$. Ce qui explique le nom de *longueur de cohérence* donné à la grandeur l_c.

Puisque la longueur de cohérence est inversement proportionnelle au degré de non-monochromaticité, les différences de marche des faisceaux, admissibles dans les expériences sur les interférences, sont d'autant plus grandes que la lumière est plus monochromatique.

La division d'un faisceau en deux faisceaux cohérents (plus exactement, partiellement cohérents) s'obtient par l'une de deux méthodes: on fait passer le faisceau à diviser soit à travers deux trous pratiqués l'un près de l'autre dans un écran, soit on fait tomber le faisceau sur des surfaces partiellement réfléchissantes, partiellement transparentes à la lumière. Examinons ces deux méthodes.

§ 15.3. Expérience d'Young

La première méthode a été appliquée par Young dans son expérience historique (1802) qui a joué un rôle important dans la mise en évidence de la nature ondulatoire de la lumière. Dans cette expérience, la lumière issue de la source S (fig. 15.1) tombait sur un écran présentant deux petits trous S_1 et S_2. Ces trous peuvent être considérés comme des sources lumineuses secondaires éclairant l'espace derrière l'écran. (Une telle manière de raisonner est basée sur le principe général de Huygens-Fresnel qui sera énoncé au chapitre 21.) Les sources lumineuses secondaires sont cohérentes parce

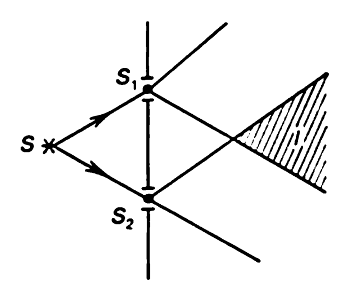


Fig. 15.1. Dispositif avec une source ponctuelle utilisé dans l'expérience d'Young

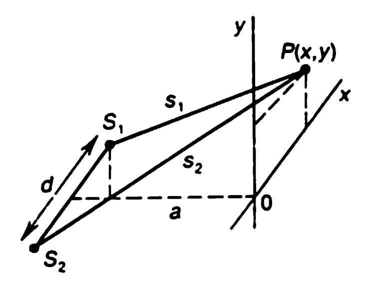


Fig. 15.2. Calcul de la différence de marche des rayons dans l'expérience d'Young

qu'elles ont leur origine dans une source commune (plus exactement, elles sont partiellement cohérentes). C'est pourquoi on observe un phénomène d'interférences dans la région I où se croisent les faisceaux lumineux produits par les deux sources lumineuses secondaires.

Pour déterminer l'aspect des franges d'interférences, supposons que la source S, de même que les trous S_1, S_2, sont des sources ponctuelles et que la lumière est monochromatique. Avec ces hypothèses le problème se ramène à calculer la différence de marche des faisceaux issus des sources secondaires S_1, S_2 jusqu'au point d'observation se trouvant dans la région I. Le calcul de la différence de marche des faisceaux est expliqué sur la figure 15.2. Le plan Oxy dans lequel se situe le point d'observation P (x, y) est parallèle à la ligne joignant les trous S_1 et S_2. Les trous sont supposés se trouver à la même distance de la source S. Aussi, l'intensité de la lumière au point P se détermine-t-elle uniquement par la différence des distances s_2 et s_1 entre les points S_2, P et S_1, P. Ces distances ont pour valeur

$$s_1 = \sqrt{a^2 + y^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2},$$

$$s_2 = \sqrt{a^2 + y^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2},$$

où d est la distance entre S_1 et S_2, a, la distance de la ligne S_1S_2 au plan Oxy. On peut donc écrire $s_2^2 - s_1^2 = 2xd$, ce qui donne pour la différence de marche des faisceaux $\Delta s = s_2 - s_1 = 2xd/(s_1 + s_2)$.

Les franges d'interférences ne sont observées que dans le cas où les trous S_1 et S_2 se trouvent l'un près de l'autre de façon que soit vérifiée l'inégalité $d \ll a$ (ce qui est lié au fait que les sources S_1 et S_2 ne sont pas parfaitement ponctuelles; v. plus loin). En outre, l'intensité de la lumière n'est élevée qu'au voisinage du point O. De ce fait les distances s_1 et s_2 diffèrent peu de a, c'est-à-dire que $s_1 + s_2 \sim 2a$ et $\Delta s = xd/a$.

Nous pouvons maintenant user des résultats obtenus au paragraphe précédent en considérant que les intensités J_1 et J_2 des deux faisceaux superposés au point P (x, y) ne diffèrent pas des intensités au point O et en outre sont égales: $J_1 = J_2$. La différence de phase

$$\varphi \equiv \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \frac{\Delta s}{\lambda} = 2\pi \frac{xd}{\lambda a},$$

où λ est la longueur d'onde de la lumière. L'intensité lumineuse J dans la région I s'exprime par la formule

$$J = 2J_1 (1 + \cos\varphi) = 4J_1 \cos^2 \left(\pi \frac{xd}{\lambda a}\right).$$

Nous voyons que l'intensité a une seule et même valeur pour $x = C^{te}$, c'est-à-dire le long d'une droite parallèle à l'axe des y. Autrement dit, les droites perpendiculaires au plan SS_1S_2 sont des lignes d'égale intensité. Le maximum d'intensité se situe sur les droites $x = ma\lambda/d$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, et le minimum, sur les droites $x = \left(m + \frac{1}{2}\right)a\lambda/d$. Ainsi, au voisinage immédiat du point O les franges d'interférences sont représentées par des franges alternées, brillantes et sombres, que l'on appelle *franges d'interférences*.

Nous avons supposé dans notre calcul que la lumière est monochromatique et que les dimensions de la source S et celles des trous S_1 et S_2 pratiqués dans l'écran sont très petites. Regardons maintenant ce qui arrivera si ces conditions ne sont pas réalisées. Si la lumière n'est pas monochromatique, elle peut être représentée par une superposition de composantes monochromatiques. Chacune de telles composantes donne une frange d'interférences du type que nous venons de considérer et toutes ces franges se superposent l'une à l'autre, c'est-à-dire que les intensités des franges constitutives s'ajoutent. Mais la position des maximums et des minimums dépend de la longueur d'onde et sera donc différente pour les différentes composantes. Il en résulte que pour la lumière non monochromatique les franges d'interférences seront moins nettes que pour la lumière monochromatique : elles seront plus ou moins floues.

Pour mieux comprendre ce phénomène, reportons-nous à la formule $x_m = ma\lambda/d$ qui détermine la position du m-ième maximum.

Nous voyons que seule la position du maximum central $m = 0$ ne dépend pas de la longueur d'onde, alors que les coordonnées des autres maximums sont proportionnelles à λ. C'est pourquoi, si une source émet dans une gamme comprise entre $\lambda - {}^1/_2\, \Delta\lambda$ et $\lambda + {}^1/_2\, \Delta\lambda$, le maximum de $m \neq 0$ se transformera en une bande de largeur $\Delta x_m = ma\, \Delta\lambda/d$. Une frange d'interférences nette n'apparaît que si la largeur de cette bande est petite devant la distance qui sépare les m-ième et $(m + 1)$-ième maximums, c'est-à-dire pour $\Delta\lambda/\lambda \ll 1/(2m)$. Nous voyons que la condition de quasi-monochromaticité de la lumière $\Delta\lambda/\lambda \ll 1$ est nécessaire mais non suffisante pour l'observation du phénomène d'interférences. En effet, lorsque cette

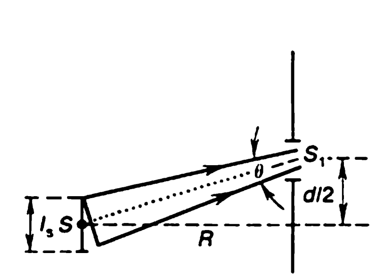


Fig. 15.3. Rôle des dimensions de la source lumineuse dans l'expérience d'Young

Fig. 15.4. Schéma des miroirs de Fresnel

condition est accomplie, seules les franges d'interférences correspondant aux faibles valeurs de m sont visibles; le nombre total de franges observées m_{max} est d'autant plus grand que $\Delta\lambda/\lambda$ est plus petit et $m_{max} \sim \lambda/(2\, \Delta\lambda)$.

Considérons maintenant la condition que les sources doivent être ponctuelles, à laquelle est également liée la possibilité d'obtenir une frange d'interférences nette. Si l_s sont les dimensions de la source S, la différence de marche des faisceaux depuis ses points extrêmes jusqu'au trou S_1 sera égale à $l_s\theta$ (fig. 15.3; l'angle θ est supposé petit). Pour que la frange d'interférences soit nette, cette quantité doit être petite devant la longueur d'onde: $l_s\theta \ll \lambda$; dans ce cas, la frange d'interférences diffère peu de celle qui correspond à une source ponctuelle. Comme $\theta \sim d/R$, cette condition (qu'on peut appeler condition de source quasi ponctuelle) peut se mettre sous la forme $l_s \ll \lambda R/d$. Une condition analogue doit être imposée aux sources secondaires. A savoir, si l_1 est la dimension du trou, la source secondaire se comporte comme une source ponctuelle pour $l_1\theta_1 \ll \lambda$, où $\theta_1 \sim d/a$, c'est-à-dire pour $l_1 \ll \lambda a/d$.

Vu que pour la lumière visible $\lambda \ll l_1$ et $\lambda \ll l_s$, la condition nécessaire (mais loin d'être suffisante) d'interférences s'exprime

par les inégalités $R \gg d$ et $a \gg d$ (nous avons déjà utilisé précédemment la seconde de ces inégalités).

Dans l'expérience d'Young les sources cohérentes sont constituées par deux trous pratiqués dans un écran opaque et éclairés par une source lumineuse commune. Il existe d'autres méthodes d'obtention de sources cohérentes qui sont équivalentes à la méthode d'Young. Une d'elles est basée sur l'utilisation des *miroirs* dits *de Fresnel* (fig. 15.4). Dans cette méthode, la lumière issue d'une source ponctuelle S tombe sur deux miroirs plans M_1 et M_2 placés sous un petit angle l'un par rapport à l'autre. Les images virtuelles S_1 et S_2 de la source agissent comme deux sources cohérentes.

§ 15.4. Interférences à deux faisceaux lors de la réflexion

Examinons maintenant les interférences qui se produisent lorsqu'un faisceau lumineux se réfléchit sur les frontières d'une plaque de verre à faces planes et parallèles (fig. 15.5). Le faisceau *1* incident est partiellement réfléchi par la surface supérieure de la plaque (rayon *1'*) et partiellement réfracté (rayon *2*). La réflexion du rayon *2* sur la surface inférieure de la plaque fait apparaître le rayon *2'* qui se réfracte ensuite par la surface supérieure de la plaque pour se transformer en rayon *1"*. Les interférences se produisent entre les rayons *1'* et *1"*. Il est évident que ces rayons sont cohérents, et les franges d'interférences se déterminent par leur différence de phase.

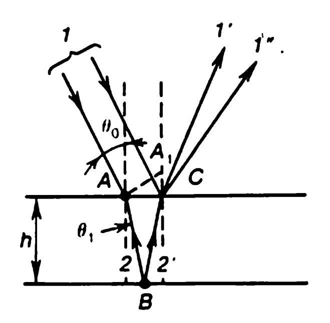


Fig. 15.5. Réflexion d'un rayon lumineux sur les frontières d'une plaque plane parallèle

La détermination de la différence de phase exige de prendre en considération deux circonstances: premièrement, la vitesse de propagation de la lumière dans un milieu matériel (en l'occurrence, dans le verre) diffère de celle dans le vide et deuxièmement, la phasa s'inverse à chaque réflexion. Au chapitre 16 nous déterminerons le vitesse de la lumière dans le milieu et montrerons qu'elle est égale à $v = c/N$, où N est l'indice de réfraction lié à l'angle d'incidence θ_0 et à l'angle de réfraction θ_1 par la relation $N = \sin\theta_0/\sin\theta_1$ (l'apparition lors de la réflexion d'une différence de phase supplémentaire égale à π sera expliquée elle aussi au chapitre 16).

La variation des champs d'une onde plane en fonction de la coordonnée se détermine par le facteur exponentiel exp $(i\mathbf{kr})$ et dans le vide, nous le savons, le vecteur d'onde $\mathbf{k} = \mathbf{n}\omega/c$ ($\mathbf{n}$ étant un

vecteur unitaire orienté dans le sens de propagation). Si l'onde se propage dans un milieu, il faut substituer à c figurant dans cette formule la vitesse $v = c/N$, de sorte que la phase de l'onde au point $\mathbf{r}$ sera égale à $\omega\mathbf{n}\mathbf{r}N/c$. Il en résulte que la différence de phase entre deux rayons I et II s'exprime par la formule

$$\varphi_{\mathrm{I}}-\varphi_{\mathrm{II}}=\frac{\omega}{c}\Big(\sum_{(\mathrm{I})}\mathbf{n}\mathbf{r}N-\sum_{(\mathrm{II})}\mathbf{n}\mathbf{r}N\Big)=\frac{\omega}{c}\Big(\sum_{(\mathrm{I})}s_iN_i\Big)-\frac{\omega}{c}\Big(\sum_{(\mathrm{II})}s_iN_i\Big),$$

où $s_i = (\mathbf{n}\mathbf{r})_i$ est la longueur du chemin du faisceau sur la portion i, l'indice i indiquant le numéro des portions parcourues par le faisceau, la première somme est étendue à toutes les portions i parcourues par le rayon I (dans le cas général, dans des milieux différents) et la seconde somme a un sens analogue pour le rayon II. La quantité $s^{\mathrm{opt}} = \sum sN$ est appelée *longueur du parcours* (ou *du chemin*) *optique* du faisceau. En tenant compte que $\omega/c = 2\pi/\lambda$ (λ étant la longueur d'onde dans le vide), la différence de phase entre deux rayons n'ayant pas subi de réflexion peut s'écrire sous la forme $\varphi_{\mathrm{I}} - \varphi_{\mathrm{II}} = 2\pi(s_{\mathrm{I}}^{\mathrm{opt}} - s_{\mathrm{II}}^{\mathrm{opt}})/\lambda$.

Mais ce n'est pas encore toute la différence de phase qui détermine l'interférence entre les faisceaux. Pour trouver la différence de phase totale il faut encore, comme il a été dit plus haut, tenir compte de la variation de phase de π qui se produit à chaque réflexion. Ainsi, si p est le nombre total de réflexions pour les deux faisceaux, la formule définitive donnant la différence de phase prend la forme

$$\delta\varphi=\varphi_{\mathrm{I}}-\varphi_{\mathrm{II}}+\pi p=\frac{2\pi}{\lambda}(s_{\mathrm{I}}^{\mathrm{opt}}-s_{\mathrm{II}}^{\mathrm{opt}})+\pi p.$$

Appliquons maintenant cette formule pour trouver la différence de phase entre les rayons $1'$ et $1''$ représentés par la figure 15.5. La différence entre les parcours optiques de ces rayons étant évidemment égale à $N(ABC) - A_1C$, il vient

$$\varphi_{1'}-\varphi_{1''}=\frac{2\pi}{\lambda}\Big(\frac{2hN}{\cos\theta_1}-2h\,\mathrm{tg}\,\theta_1\sin\theta_0\Big).$$

Mais $\sin\theta_0/\sin\theta_1 = N$ et donc

$$\varphi_{1'}-\varphi_{1''}=\frac{4\pi}{\lambda}hN\cos\theta_1.$$

C'est cette quantité qui exprime la différence de phase totale puisqu'il y a deux réflexions (une sur chacune des surfaces), et le terme multiple de 2π figurant dans l'expression de la différence de phase peut être omis. Il est facile d'en tirer les conditions de maximum et de minimum d'intensité : si $\delta\varphi = 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$),

l'intensité est maximale, alors que si $\delta\varphi = 2\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)$, elle est minimale.

Ainsi, les conditions d'extrémums d'intensité sont

$$2hN\cos\theta_1 = \begin{cases} n\lambda & \text{(maximum)},\\ \left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda & \text{(minimum)}.\end{cases}$$

Elles signifient que les extrémums correspondent (pour une longueur d'onde donnée de la lumière et une épaisseur déterminée de la plaque) à des valeurs bien déterminées de l'angle θ_1, c'est-à-dire à des valeurs bien déterminées de l'angle d'incidence θ_0 (on dit dans ce cas que l'on a des *lignes* ou des *franges d'interférences d'égale inclinaison*). Si l'épaisseur h n'est pas la même aux différents points de la plaque (les faces de la plaque ne sont pas parfaitement planes et parallèles), les extrémums se manifestent pour des angles d'incidence suffisamment arbitraires ; les interférences dépendent dans ce cas de la réflexion sur les différentes portions de la plaque ayant des épaisseurs différentes mais satisfaisant à la condition d'interférences (on dit dans ce cas que l'on a des *lignes* ou des *franges d'interférences d'égale épaisseur*).

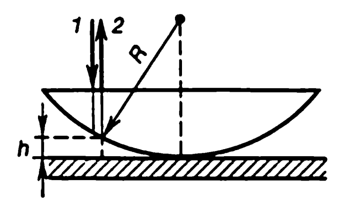


Fig. 15.6. Rayons cohérents lors de l'observation des anneaux de Newton

Les lignes d'interférences d'égale épaisseur peuvent être observées lorsque la lumière tombe sur une lentille sphérique en contact, dans l'air, avec une surface plane de verre (fig. 15.6). Dans ce cas il s'agit des interférences entre les rayons *1* et *2*. La différence de marche des rayons est égale à $2h$, où h est l'épaisseur de la couche d'air à l'endroit de l'incidence du rayon ; h est liée au rayon R de la lentille et à la distance r entre le point d'incidence du rayon et le point de contact entre la lentille et la plaque par la relation $r = \sqrt{h\,(2R-h)} \simeq \sqrt{2hR}$ (on suppose que $h \ll R$).

La différence de phase entre les rayons considérés $\delta\varphi = 4\pi h/\lambda + \pi$ (le dernier terme apparaît du fait qu'il y a une seule réflexion sur la plaque de verre). Les maximums d'intensité correspondent à $\delta\varphi = 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), et les minimums à $\delta\varphi = 2\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)$; dans le premier cas $h = (2n+1)\,\lambda/4$, et dans le second, $h = n\lambda/2$. Les rayons r correspondants sont $r = \sqrt{nR\lambda}$ pour les minimums et $r = \sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)R\lambda}$ pour les maximums. Les lignes d'interférences qui en résultent sont appelées *anneaux de Newton*. Newton les a observées près de 1670 et a déterminé à l'aide de ces anneaux, pour la première fois, la longueur d'onde des ondes lumineuses.

Remarquons que le point de contact entre la lentille et la plaque semble sombre, ce qui est lié au renversement de la phase de l'onde lors de la réflexion.

§ 15.5. Expérience de Michelson

Le phénomène d'interférences trouve de nombreuses applications pratiques : pour la comparaison des étalons, pour la vérification de la qualité des surfaces, etc. Nous ne nous y arrêterons pas et n'examinerons qu'une seule application ayant une importance de principe,

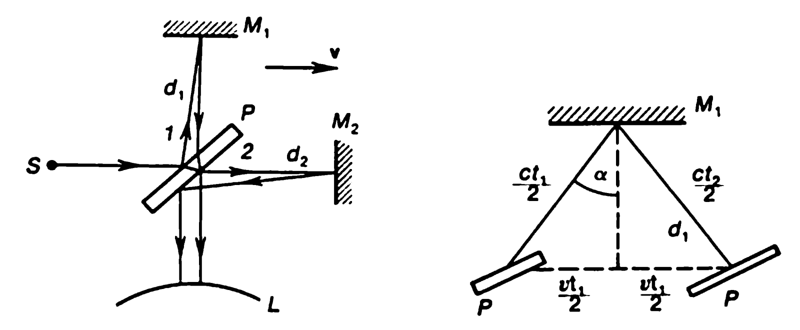


Fig. 15.7. Dispositif utilisé dans l'expérience de Michelson

Fig. 15.8. Calcul du temps t_1 dans l'expérience de Michelson

à savoir nous montrerons comment on pourrait, en utilisant ce phénomène, mettre en évidence le mouvement de la Terre par rapport à « l'éther porteur de lumière » ou plus exactement, établir si la vitesse de la lumière dépend de la vitesse de mouvement de la Terre.

A cet effet, Michelson a effectué en 1881 l'expérience suivante. La lumière émise par la source S (fig. 15.7) est focalisée sur une plaque de verre argentée semi-transparente P qui divise le faisceau lumineux incident en deux rayons *1* et *2* perpendiculaires l'un à l'autre et cheminant vers les miroirs M_1 et M_2. Après s'être réfléchis sur les miroirs, les rayons pénètrent dans la lentille L où on observe leur interférence.

Plaçons-nous dans l'hypothèse où il existe un système de référence privilégié, lié à l'éther, dans lequel la lumière se propage à la vitesse c. Si la Terre avec l'appareil de mesure se déplace à la vitesse v, la vitesse de la lumière par rapport à l'appareil sera $c + v$ sur le chemin de P à M_2 et $c - v$ sur le chemin de retour. Aussi, la lumière parcourt-elle le chemin de P à M_2 aller et retour pendant le temps

$$t_2 = d_2 \left[(c-v)^{-1} + (c+v)^{-1}\right] = \frac{2d_2}{c}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}.$$

Déterminons maintenant le temps t_1 mis par la lumière pour parcourir le chemin de P à M_1 aller et retour. Dans le système de coordonnées lié à l'éther sont vérifiées les relations géométriques représentées par la figure 15.8. Il est clair que $t_1 = 2d_1/(c \cos \alpha)$ où $\sin \alpha = v/c$. Il vient donc $t_1 = (2d_1/c)(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. La différence entre les temps de parcours de tout le chemin jusqu'à L sera égale à

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2}{c}\left[d_2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} - d_1\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}\right] \approx$$

$$\approx \frac{2}{c}\left[d_2 - d_1 + \frac{v^2}{c^2}\left(d_2 - \frac{1}{2}d_1\right)\right]$$

(nous avons tenu compte que $v \ll c$).

Maintenant faisons tourner l'appareil de 90°. Alors les temps de parcours des deux rayons seront $t_2' = (2d_2/c)(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, $t_1' = (2d_1/c)(1 - v^2/c^2)^{-1}$, et la différence de temps de parcours est

$$\Delta t' = \frac{2}{c}\left[d_2 - d_1 + \frac{v^2}{c^2}\left(\frac{d_2}{2} - d_1\right)\right].$$

Puisque $\Delta t' \neq \Delta t$, la rotation de l'appareil doit provoquer un déplacement des franges d'interférences

$$\delta = c(\Delta t' - \Delta t) = (d_1 + d_2) v^2/c^2.$$

La vitesse de la Terre étant $v \sim 3 \cdot 10^4$ m·s^{-1}, si bien que $v^2/c^2 \sim 10^{-8}$. Pour $d_1 + d_2 \sim 3$ m on obtient $\delta \sim 3 \cdot 10^{-8}$ m = 30 nm, ce qui est 10 fois plus petit que la longueur d'onde de la lumière visible. L'appareil utilisé (appelé *interféromètre de Michelson*) permettait de détecter un tel déplacement, pourtant aucun déplacement n'a été observé. On a construit par la suite des appareils plus perfectionnés du type de l'interféromètre de Michelson qui ont permis de confirmer le résultat obtenu : les franges d'interférences ne subissaient aucun déplacement. On n'a réussi à donner l'explication de ce fait que dans le cadre de la théorie de la relativité restreinte, selon laquelle il n'existe pas de système de référence privilégié lié à l'éther et la vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels d'inertie et égale à c (v. chap. 7).

§ 15.6. Fonction de corrélation du champ

Nous avons vu au cours des paragraphes qui précèdent que des franges d'interférences nettes ne sont observées dans les expériences sur les interférences que pour une différence de phase bien déterminée entre les deux faisceaux lumineux. Les franges floues témoignent d'un caractère indéterminé de la différence de phase, c'est-à-dire d'un caractère aléatoire, stochastique de cette grandeur et donc d'un caractère stochastique du champ tout entier. Une telle situation reflète les propriétés statistiques de la source de champ, à savoir,

l'indétermination et l'absence de corrélation dans le comportement des charges créatrices du champ (ainsi que les propriétés quantiques du champ lui-même, v. plus loin). Pour toutes ces raisons, l'étude des interférences de la lumière conduit à un problème plus général concernant les propriétés statistiques du champ électromagnétique. Nous avons déjà rencontré ce problème au chapitre 14 à propos de la lumière partiellement polarisée. Nous y avons considéré les produits des différentes composantes du vecteur polarisation et nous les avons moyennés sur ceux des paramètres qui déterminent le caractère aléatoire du vecteur polarisation. Comme résultat du moyennage nous avons obtenu la matrice de polarisation qui peut servir à décrire les propriétés d'une lumière partiellement polarisée.

Nous pouvons maintenant généraliser cette idée en considérant au lieu du vecteur polarisation le vecteur champ lui-même, par exemple électrique, et en moyennant les produits des composantes du champ sur des paramètres qui tiennent compte de son caractère stochastique. De tels produits moyennés portent le nom de fonctions de corrélation. Il est commode d'utiliser les champs sous forme complexe et de définir les fonctions de corrélation de la façon suivante :

$$G_{\mu\nu}(\mathbf{r}_1 t_1, \mathbf{r}_2 t_2) = \langle E_\mu(\mathbf{r}_1 t_1) E_\nu^*(\mathbf{r}_2 t_2)\rangle,$$

où les chevrons $\langle \ldots \rangle$ indiquent des moyennes et les indices μ et ν désignent les composantes du champ ($\mu, \nu = 1, 2, 3$). Les fonctions de corrélation dépendent de deux coordonnées $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ et de deux instants t_1, t_2. Fixons notre attention sur le fait que la fonction de corrélation comprend le produit des composantes d'un champ et de son complexe conjugué. Il se trouve que pour une telle définition un compteur de photons réagit précisément à la fonction de corrélation. Le fait est que le fonctionnement d'un compteur de photons est basé sur l'effet photoélectrique (v. chap. 24), c'est-à-dire que le compteur enregistre des photoélectrons, mais leur nombre (enregistré entre les instants t et $t + dt$) est proportionnel à $G(\mathbf{r}t, \mathbf{r}t)$, où $\mathbf{r}$ est la coordonnée du compteur.

Expliquons maintenant le sens du moyennage utilisé dans la définition des fonctions de corrélation. Rappelons à cet effet que le champ peut être représenté par une superposition des ondes planes $\mathbf{e}_k \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$ ou par un autre système quelconque d'ondes $\mathbf{u}_p(\mathbf{r}) \exp(-i\omega_p t)$ (pouvant exister, par exemple, dans une cavité résonnante ou dans un guide d'ondes) :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_p C_p \mathbf{u}_p(\mathbf{r}) \exp(-i\omega_p t),$$

où C_p est l'amplitude complexe de la p-ième onde. Cette grandeur peut être soit bien déterminée, soit aléatoire suivant le caractère de la source de champ. Dans le premier cas, c'est-à-dire dans le

cas d'un champ parfaitement déterminé, la fonction de corrélation définie plus haut ne comporte en fait aucun moyennage, $G_{\mu\nu}(\mathbf{r}_1t_1, \mathbf{r}_2t_2) = E_\mu(\mathbf{r}_1t_1)\, E_\nu^*(\mathbf{r}_2t_2)$, et représente une certaine fonction des coefficients de superposition, de sorte que $G_{\mu\nu}(\mathbf{r}_1t_1, \mathbf{r}_2t_2) \equiv F(C_1, C_2, \ldots)$. Dans le second cas, c'est-à-dire dans le cas d'un champ aléatoire, les coefficients de superposition sont des grandeurs aléatoires si bien que la fonction F doit être moyennée sur les valeurs possibles de $C_1, C_2, \ldots$ avec une certaine probabilité $w(C_1, C_2, \ldots)$. Cela signifie que le calcul réel de la grandeur $G_{\mu\nu}(\mathbf{r}_1t_1, \mathbf{r}_2t_2)$ ne devient possible que si l'on connaît la probabilité $w(C_1, C_2, \ldots)$ des différentes valeurs de $C_1, C_2, \ldots$

Dans certains cas le champ aléatoire est une grandeur stochastique stationnaire satisfaisant à la *condition* dite *d'ergodicité*. Les fonctions de corrélation dépendent alors de la différence de temps $t_2 - t_1 \equiv \equiv \tau$ et peuvent être déterminées comme des moyennes dans le temps:

$$G_{\mu\nu}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T E_\mu(\mathbf{r}_1t_1)\, E_\nu^*(\mathbf{r}_2t_1 + \tau)\, \mathrm{d}t_1.$$

Soulignons que la condition d'ergodicité, c'est-à-dire l'égalité de la moyenne dans le temps à la moyenne calculée à l'aide de la fonction probabiliste $w(C_1, C_2, \ldots)$ (cette dernière est appelée *moyenne sur l'ensemble des champs*), est loin d'être accomplie pour tous les champs. Si la distribution des coefficients aléatoires C_1, $C_2, \ldots$ de la décomposition d'un champ est gaussienne, ce champ est ergodique, c'est-à-dire que sa moyenne sur l'ensemble est égale à la moyenne dans le temps. Rappelons que la distribution gaussienne est celle pour laquelle la probabilité $w(x)$ pour que la valeur aléatoire x soit comprise dans l'intervalle $(x, x + \mathrm{d}x)$ a pour expression

$$w(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{C^{te}} \exp\left[-x^2/(2\langle x^2\rangle)\right] \mathrm{d}x,$$

où $\langle x^2\rangle$ est la moyenne de x^2 (la constante qui se détermine par la condition $\int w(x)\,\mathrm{d}x = 1$ est égale à $(2\pi\langle x^2\rangle)^{-1/2}$).

En analysant la notion de fonction de corrélation nous nous sommes fondés jusqu'ici sur le caractère classique du champ électromagnétique. Or, la lumière est de nature quantique (v. chap. 24) et il nous faut tenir compte de la quantification du champ dans la fonction de corrélation. Remarquons à cet effet que la fonction de corrélation est quadratique en champ, c'est-à-dire linéaire en énergie du champ; pour cette raison elle doit être linéaire en nombre de photons. En outre, la fonction de corrélation est quadratique par rapport aux fonctions propres $\mathbf{u}_k(\mathbf{r})$ du champ. Pour toutes ces rai-

sons sa forme se définit en fait de façon univoque :

$$G_{\mu\nu}(\mathbf{r}_1 t_1, \mathbf{r}_2 t_2) = \frac{1}{2} \sum_k \hbar\omega_k \langle n_k \rangle u_{k\mu}(\mathbf{r}_1) u^*_{k\nu}(\mathbf{r}_2) \exp\{-i\omega_k(t_1 - t_2)\},$$

où $\langle n_k \rangle$ est le nombre moyen de photons d'espèce k, $\hbar\omega_k \langle n_k \rangle$, l'énergie moyenne du k-ième mode de champ et $u_{k\mu}(\mathbf{r})$ sont les fonctions propres du champ satisfaisant à la condition de normalisation

$$\int u^*_{k\mu}(\mathbf{r}) u_{k'\mu'}(\mathbf{r})\, dV = \delta_{kk'}\delta_{\mu\mu'}.$$

($\delta_{pp'} = 1$ pour $p = p'$ et $\delta_{pp'} = 0$ pour $p \neq p'$; le facteur 1/2 apparaît du fait que nous utilisons la forme complexe du champ). Dans cette formule, le moyennage est contenu dans la quantité $\langle n_k \rangle$: le nombre de photons dans chaque mode de champ peut s'exprimer par un entier quelconque, alors que la formule fait intervenir le nombre moyen de photons.

Si le champ est en équilibre thermodynamique (v. chap. 24), ce qui correspond à l'état d'équilibre de la source, la quantité $\langle n_k \rangle$ obéit à la *distribution de Planck* :

$$\langle n_k \rangle = \{\exp[\hbar\omega_k/(k_B T)] - 1\}^{-1}$$

(T étant la température du gaz de photons et k_B, la constante de Boltzmann).

En optique, nous avons affaire en général à un spectre de rayonnement continu et à des longueurs très supérieures à la longueur d'onde de la lumière. Dans de telles conditions, $\mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = V^{-1/2}\mathbf{e}\exp(i\mathbf{kr})$ sont des ondes planes, où $\mathbf{e}$ est le vecteur polarisation et V, le volume occupé par le champ. Dans la formule de G la sommation sur les différents modes peut être remplacée par l'intégration : $\sum_k \to$ $\to \int V\, d^3k/(2\pi)^3$, ce qui donne

$$\mathbf{G}_{\mu\nu}(\mathbf{r}_1 t_1, \mathbf{r}_2 t_2) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \sum_\lambda \int d^3k e^{(\lambda)}_\mu e^{(\lambda)*}_\nu \langle n_{k\lambda} \rangle \hbar\omega \exp\{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - i\omega(t_1 - t_2)\},$$

où $\mathbf{e}^{(\lambda)}$ est le vecteur polarisation, ω, la fréquence et $\langle n_{k\lambda} \rangle$, le nombre moyen de photons de mode $\mathbf{k}\lambda$.

La quantité $(2\pi)^{-3} \sum_\lambda \langle n_{k\lambda} \rangle \hbar\omega d^3k$ a un sens physique simple : elle représente la densité d'énergie du champ dans l'intervalle de vecteurs d'onde $(\mathbf{k}, \mathbf{k} + d\mathbf{k})$. Si, après avoir effectué l'intégration sur les angles du vecteur $\mathbf{k}$, on passe à la *densité spectrale énergétique* $w(\omega)$ (c'est-à-dire à la densité d'énergie par unité d'intervalle de fréquences au voisinage de la fréquence ω), nous obtenons à partir

de la formule pour $G_{\mu\nu}$

$$\sum_{\mu} G_{\mu\mu}(\mathbf{r}t_1,\ \mathbf{r}t_2) = \frac{1}{2}\int_0^\infty w(\omega)\exp\{-i\omega(t_1-t_2)\}\,d\omega.$$

Cette dernière formule peut être inversée, et la densité spectrale de rayonnement sera exprimée par l'intermédiaire de la fonction de corrélation :

$$w(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{\mu} G_{\mu\mu}(\mathbf{r}0,\ \mathbf{r}t)\exp(i\omega t)\,dt.$$

Considérons maintenant à titre d'exemple une onde lumineuse plane se propageant le long de l'axe des y et possédant une polarisation déterminée. Supposons que le champ est indépendant des coordonnées x et z. Dans ce cas, la fonction de corrélation dépend uniquement de la coordonnée y et peut être notée $G(y_1t_1,\ y_2t_2)$. Dans la représentation intégrale, la fonction G ne contient en fait que l'intégration sur k_y, alors que l'intégration sur k_x et k_z se ramène simplement à la multiplication par $(2\pi)^2L^{-2}$ (L étant la dimension transversale du faisceau lumineux). On peut donc écrire

$$G(y_1t_1,\ y_2t_2) = \frac{1}{4\pi L^2}\int \langle n_k\rangle \hbar\omega \exp\{ik_y(y_1-y_2) - i\omega(t_1-t_2)\}\,dk_y,$$

où $\omega = ck_y$. La quantité $\langle n_k\rangle\hbar\omega$ qui entre dans cette expression représente l'énergie du k_y-ième mode de champ. Elle est une certaine fonction de la fréquence $W(\omega)$, et nous supposerons que cette fonction a un maximum aigu pour une fréquence déterminée ω_0 et se décrit par la formule

$$W(\omega) = \frac{1}{\pi}\,2\gamma\,[(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2]^{-1}$$

(on dit dans ce cas que la raie spectrale a une *forme lorentzienne*). Le maximum de la fonction W est égal à $2(\pi\gamma)^{-1}$, alors qu'aux points de $\omega = \omega_0 \pm \gamma$ la valeur de cette fonction est la moitié de la valeur maximale (pour cette raison on convient de considérer la quantité 2γ comme une *largeur efficace de la raie spectrale*). La fonction W est normée à l'unité, c'est-à-dire que

$$\int_0^\infty W(\omega)\,d\omega = 1.$$

En posant maintenant

$$\frac{\langle n_k\rangle\,\hbar\omega_k}{cL^2} = U\,\frac{2\gamma}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2}$$

(U étant une certaine constante), on peut dire que U caractérise l'intensité du faisceau lumineux considéré. En introduisant cette expression dans la formule de G et en considérant que $\gamma \ll \omega_0$, nous obtenons

$$G(y_1t_1, y_2t_2) = \frac{\gamma}{2\pi} U e^{i\omega_0 s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega' s}}{\omega'^2+\gamma^2} d\omega',$$

où $s = t_2 - t_1 - (y_2 - y_1)/c$ et $\omega' = \omega - \omega_0$ (pour $\gamma \ll \omega_0$ les limites d'intégration peuvent être considérées comme infinies). L'intégration donne

$$G(y_1t_1, y_2t_2) = \frac{1}{2} U \exp(i\omega_0 s - \gamma |s|).$$

Nous voyons que G ne dépend que d'une seule variable s. Pour $s = 0$ la fonction de corrélation passe par son maximum égal à $\frac{1}{2} U$. Cette quantité est égale à la valeur moyenne du carré du champ complexe $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$.

Avant de clore ce paragraphe, indiquons quelques propriétés générales de la fonction de corrélation. C'est tout d'abord l'hermiticité : $G_{\mu\nu}(x_1, x_2)^* = G_{\nu\mu}(x_2, x_1)$ (x étant la notation en abrégé d'un point spatio-temporel : $x \equiv \mathbf{r}, t$; de ce fait, les quantités $G_{\mu\mu}(x, x)$ sont réelles). Puis

$$|G_{\mu\nu}(x_1, x_2)|^2 \leqslant G_{\mu\mu}(x_1, x_1) G_{\nu\nu}(x_2, x_2).$$

§ 15.7. Degré de cohérence

Proposons-nous maintenant de montrer que la notion de cohérence est liée très intimement à la fonction de corrélation. Nous avons dit que les rayons lumineux sont cohérents s'ils interfèrent. Il s'agit donc d'expliquer comment l'interférence est liée à la fonction de corrélation. A cet effet, le plus simple est de se reporter à l'expérience de Young (v. fig. 15.2). Si les dimensions des trous S_1 et S_2 sont petites et les distances de S_1 et S_2 au point d'observation P sont grandes devant la longueur d'onde, le champ $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ au point P à un instant t peut être représenté par une superposition des champs $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}_1, t_1)$ et $\mathbf{E}_2(\mathbf{r}_2, t_2)$ aux points S_1 et S_2 à des instants antérieurs $t_1 = t - s_1/c$, $t_2 = t - s_2/c$ (v. chap. 21) :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = K_1\mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1) + K_2\mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t_2),$$

où K_1 et K_2 sont des constantes dépendant de la géométrie du dispositif de l'expérience.

L'intensité lumineuse au point P se détermine par le carré du module du champ $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$. Si on place en ce point un détecteur de photons idéal qui réagit, comme nous l'avons vu, à la fonction de

corrélation du champ $G(\mathbf{r}t, \mathbf{r}t)$, le taux de comptage de cet appareil sera

$$G(\mathbf{r}t, \mathbf{r}t) = |K_1|^2 G(\mathbf{r}_1 t_1, \mathbf{r}_1 t_1) + \\ + |K_2|^2 G(\mathbf{r}_2 t_2, \mathbf{r}_2 t_2) + 2 \operatorname{Re} [K_1 K_2^* G(\mathbf{r}_1 t_1, \mathbf{r}_2 t_2)]$$

(nous supposons pour simplifier que le champ se caractérise par une polarisation déterminée et écrivons G sans indiquer les indices μ, ν). Le premier terme est ici proportionnel au nombre de photons enregistrés par le compteur dans le cas où seul le trou S_1 est ouvert, alors que le trou S_2 est fermé ; le second terme a un sens analogue : il détermine le taux de comptage des photons lorsque n'est ouvert que le deuxième trou. Enfin, le troisième terme, qui détermine la différence entre le résultat enregistré par le détecteur et le résultat qui serait obtenu si les nombres de photons en provenance des deux trous étaient simplement additionnés, correspond à l'interférence des ondes issues des deux trous. Comme nous l'avons vu, ce terme (qu'on peut appeler terme d'interférences) se détermine par la fonction de corrélation $G(\mathbf{r}_1 t_1, \mathbf{r}_2 t_2)$. C'est précisément cette fonction qui décrit la cohérence.

Nous pouvons maintenant oublier les faisceaux lumineux puisque la fonction de corrélation $G(\mathbf{r}_1 t_1, \mathbf{r}_2 t_2)$ se détermine uniquement par le champ et par ses propriétés statistiques. On peut donc parler de la cohérence du champ lui-même et le caractériser par la fonction $G(x_1, x_2)$ où $x \equiv (\mathbf{r}, t)$. Plus exactement, nous introduirons la notion de *degré de cohérence du champ* en entendant par là la grandeur

$$g(x_1, x_2) = \frac{G(x_1, x_2)}{\sqrt{G(x_1, x_1)\, G(x_2, x_2)}}.$$

Cette grandeur, de même que $G(x_1, x_2)$, est dans le cas général une grandeur complexe représentable sous la forme $g(x_1, x_2) = |g(x_1, x_2)| \exp[i\varphi(x_1, x_2)]$, où φ est la phase du degré de cohérence. Puisque $G(x_1, x_2) \leqslant \sqrt{G(x_1, x_1)\, G(x_2, x_2)}$, $g(x_1, x_2) \leqslant 1$. La grandeur $g(x_1, x_2)$ s'appelle encore *degré de cohérence complexe* ou *fonction de corrélation normée.*

Pour expliquer le nom de degré de cohérence donné à la fonction $g(x_1, x_2)$, lions-lui le *contraste de franges d'interférences.* Par raison de simplification, supposons que les coefficients K_1 et K_2 sont identiques. Alors le taux de comptage des photons est proportionnel à

$$I = G(x_1, x_1) + G(x_2, x_2) + \\ + 2\sqrt{G(x_1, x_1)\, G(x_2, x_2)}\, |g(x_1, x_2)| \cos\varphi(x_1, x_2).$$

Les grandeurs $G(x_1, x_1)$, $G(x_2, x_2)$ et $g(x_1, x_2)$ varient lentement lorsque le compteur se déplace, si bien qu'elles peuvent être considérées tout simplement comme constantes. Aussi, les maximums et les minimums d'indications du compteur correspondent-ils aux

valeurs du $\cos \varphi(x_1, x_2) = \pm 1$:

$$I_{max} = G(x_1, x_1) + G(x_2, x_2) + 2\sqrt{G(x_1, x_1)G(x_2, x_2)}\,|g(x_1, x_2)|,$$
$$I_{min} = G(x_1, x_1) + G(x_2, x_2) - 2\sqrt{G(x_1, x_1)G(x_2, x_2)}\,|g(x_1, x_2)|.$$

Un paramètre qui pourrait caractériser le contraste de franges d'interférences peut s'exprimer sous la forme

$$v = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

(on l'appelle *visibilité des franges*). Dans le cas le plus simple, lorsque $G(x_1, x_1) = G(x_2, x_2)$,

$$v = \frac{2\,|g(x_1, x_2)|}{1 + |g(x_1, x_2)|}.$$

Ainsi, le paramètre v se détermine par le module du degré de cohérence. Si ce dernier est égal à l'unité, $v = 1$. Dans ce cas l'intensité (c'est-à-dire le nombre de photons enregistrés par le compteur) varie dans les limites de zéro à $4G(x_1, x_1)$. Nous avons dit que c'est précisément dans ce cas que les faisceaux sont cohérents, mais il est plus exact de dire que pour $|g(x_1, x_2)| = 1$ il y a *cohérence totale* ou *parfaite* et de caractériser quantitativement la cohérence par son degré.

La fonction de corrélation $G(x_1, x_2)$ et donc le degré de cohérence traduisent les propriétés statistiques du champ.

Pour un champ parfaitement déterminé la nécessité de moyennage dans la définition de la fonction de corrélation se trouve supprimée: $G(x_1, x_2) = E(x_1) E^*(x_2)$. Il est évident que dans ce cas le degré de cohérence est égal en module à l'unité, c'est-à-dire que le champ est totalement cohérent. La réciproque est elle aussi vraie : si $|g(x_1, x_2)| = 1$, la fonction de corrélation se factorise, c'est-à-dire qu'elle peut être représentée sous la forme $G(x_1, x_2) = A(x_1) A^*(x_2)$. Dans ce cas les grandeurs $A(x_1)$, $A^*(x_2)$ représentent précisément les valeurs du champ aux points x_1 et x_2 respectivement.

En parlant au cours de ce paragraphe de la cohérence du champ, nous n'avons pas considéré le champ comme monochromatique. Or, en examinant les faisceaux cohérents dans les paragraphes précédents, nous avons souligné qu'ils devaient être monochromatiques. Il n'y a pourtant aucune contradiction. Le fait est que l'on considère d'habitude des sources de champ stationnaires. Dans ce cas $G(x_1, x_2)$ est une fonction de la différence de temps $t_1 - t_2$ et non des temps t_1 et t_2 pris séparément : $G(x_1, x_2) = G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1 - t_2)$. Supposons maintenant qu'il y a factorisation, c'est-à-dire que $G(t_1 - t_2) = E(t_1) E^*(t_2)$ (les coordonnées spatiales ne sont pas indiquées). Il est facile de montrer que la seule fonction satisfaisant à cette relation fonctionnelle est celle de l'onde monochromatique : $E(t) \sim \exp(-i\omega t)$.

Pour mieux mettre en évidence la structure de la grandeur $g(x_1, x_2)$, déterminons le degré de cohérence pour un faisceau dont la raie a une forme lorentzienne. Au paragraphe précédent nous avons trouvé pour ce cas la fonction de corrélation: $G(x_1, x_2) = \frac{1}{2} U \exp(i\omega_0 s - \gamma |s|)$, où $s = t_2 - t_1 - (y_2 - y_1)/c$ (rappelons que la lumière est supposée se propager le long de l'axe des y). Puisque $G(x_1, x_1) = G(x_2, x_2) = \frac{1}{2} U$, le degré de cohérence a pour valeur

$$g(x_1, x_2) = \exp(i\omega_0 s - \gamma |s|),$$

si bien que $|g(x_1, x_2)| = \exp(-\gamma |s|)$. Nous voyons que $|g|$ est voisin de l'unité si $\gamma |s| \ll 1$; c'est précisément à cette condition qu'on observe des franges d'interférences nettes. Mais nous connaissons déjà la condition $\gamma |s| \ll 1$. En effet, la quantité γ représente la largeur de la raie spectrale, c'est-à-dire le degré de non-chromaticité du faisceau, aussi, pouvons-nous écrire, pour la longueur de cohérence introduite au § 15.2, $l_c \sim c/\gamma$. Mais dans le cas considéré la quantité s représente la différence de chemins optiques entre deux faisceaux qui interfèrent, de sorte que la condition $\gamma |s| \ll 1$ coïncide avec la condition, obtenue au § 15.2, d'observation d'une frange d'interférence bien nette.

Remarquons que pour des sources lumineuses utilisant une décharge dans les gaz, $\gamma \sim 10^9$ s^{-1}, à quoi correspond une longueur de cohérence $l_c \sim 0{,}3$ m. Pour les lasers γ peut atteindre jusqu'à environ 10 s^{-1}, ce qui correspond à une longueur de cohérence $l_c \sim \sim 30\,000$ km (1/10 de distance de la Terre à la Lune !).

Si $\gamma |s| \ll 1$, $g \simeq \exp(i\omega_0 s)$, c'est-à-dire que $|g| = 1$, dans ce cas la fonction G se factorise:

$$G(x_1, x_2) = \frac{1}{2} U f(x_1) f^*(x_2),$$

$$f(x) = \exp\{-i\omega_0 (t - y/c)\}.$$

Cet exemple montre que les deux conditions de cohérence : $|g| = 1$ et la factorisabilité de la fonction de corrélation sont équivalentes. Mais la condition $|g| = 1$ n'est réalisée ici que de façon approchée (lorsque $\gamma |s| \ll 1$) et en fait ne peut être toujours accomplie qu'approximativement de même que la condition de factorisabilité de la fonction de corrélation. Ceci signifie que la cohérence totale est une notion idéalisée dont on ne peut parler que de façon approchée.

Considérons encore un exemple, à savoir l'interférence de la lumière émise par une source étendue. Supposons que la source de lumière est un disque luminescent de rayon ρ. Proposons-nous de déterminer dans quelle mesure sont cohérents les champs en deux

points P_1 et P_2 voisins l'un de l'autre et se trouvant à une grande distance R de la source (fig. 15.9, où α est l'angle sous lequel le rayon de la source est vu des points P_1 et P_2). A cet effet, il nous faut trouver les intensités des champs produits aux points P_1 et P_2 par chaque élément, c'est-à-dire par chaque atome du disque.

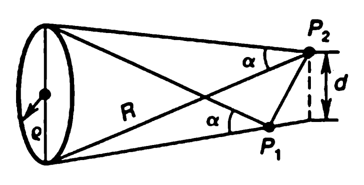


Fig. 15.9. Analyse de la cohérence du champ produit par un disque luminescent

Il est évident que ces champs peuvent s'écrire sous forme d'ondes sphériques :

$$E_M(\mathbf{r}, t) = A_M \frac{\exp\{i\omega(t - |\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|/c)\}}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|},$$

où A_M détermine l'amplitude de l'onde, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ sont les coordonnées des points P_1, P_2 et $\boldsymbol{\rho}$, les coordonnées du point M où se trouve l'atome émetteur (l'origine des coordonnées étant choisie au centre du disque).

Tenons compte maintenant de ce que le rayon du disque est petit par rapport aux distances r_1, r_2. Ceci permet de ramener la combinaison quadratique des champs, nécessaire au calcul de la fonction de corrélation, à la forme suivante :

$$E_M(\mathbf{r}_1, t) E^*_{M'}(\mathbf{r}_2, t) = A_M A^*_{M'} \frac{\exp\left\{i \frac{\omega}{c} (|\mathbf{r}_2 - \boldsymbol{\rho}| - |\mathbf{r}_1 - \boldsymbol{\rho}|)\right\}}{r_1 r_2}.$$

Le champ produit au point $\mathbf{r}$ par tout le disque luminescent vaut la somme des champs créés par tous ses éléments constitutifs. Pour obtenir la fonction de corrélation nous devons donc effectuer la sommation de $E_M E^*_{M'}$ sur M, M' et moyenner la somme sur des paramètres aléatoires (par exemple, les phases initiales aléatoires) qui caractérisent le rayonnement des différents atomes. En effectuant le moyennage, tenons compte du fait que les rayonnements des différents atomes ne sont pas cohérents et donc $\langle A_M A^*_{M'} \rangle = 0$ lorsque $M \neq M'$. Si $M = M'$, il est évident que la quantité $\langle A_M A^*_{M'} \rangle$ traduit l'intensité I_M du rayonnement du M-ième atome. Puisque le nombre d'atomes contenus dans la source est très grand, la sommation sur M peut être remplacée par l'intégration, c'est-à-dire qu'au lieu de la somme $\sum\limits_M I_M$ on peut écrire $\int I(\boldsymbol{\rho})\, d^2\rho$, d'où $d^2\rho$ est l'élément de surface de la source.

Ainsi, nous obtenons finalement pour la fonction de corrélation du champ l'expression suivante :

$$G(\mathbf{r}_1 t; \mathbf{r}_2 t) = \int\limits_S I(\rho) \frac{\exp\left\{i \frac{\omega}{c} (|\mathbf{r}_2 - \boldsymbol{\rho}| - |\mathbf{r}_1 - \boldsymbol{\rho}|)\right\}}{r_1 r_2} d^2\rho.$$

où l'intégration s'effectue sur la surface de la source. Le degré de cohérence complexe peut s'écrire sous la forme

$$g(\mathbf{r}_1 t;\ \mathbf{r}_2 t) = (I_1 I_2)^{-1/2} \int_S I(\rho)\, \frac{\exp\left\{i\frac{\omega}{c}\left(|\mathbf{r}_2-\rho)-|\mathbf{r}_1-\rho|\right)\right\}}{r_1 r_2}\, d^2\rho,$$

où

$$I_{1,2} = \int_S I(\rho)\, r_{1,2}^2\, d^2\rho.$$

Les quantités $I_{1,2}$ représentent évidemment les intensités des champs aux points P_1 et P_2.

Les formules donnant les fonctions G, g ont la même structure que celle des formules exprimant les champs diffractés par une ouverture (v. chap. 21). Ainsi,

le problème de la détermination de la fonction de corrélation dans le cas d'une source étendue se ramène au problème de la diffraction par un corps ayant la forme et les dimensions de la source (*théorème de De Sitter-Zernicke*).

Les calculs correspondants donnent le résultat suivant:

$$g(\mathbf{r}_1 t;\ \mathbf{r}_2 t) = \frac{2J_1(\xi)}{\xi}\, e^{i\psi}, \qquad \xi = \frac{2\pi\rho d}{\lambda R}, \qquad \psi = \frac{\pi d^2}{\lambda R},$$

où J_1 est la fonction de Bessel, λ, la longueur d'onde et d, la projection du segment P_1P_2 sur le plan du disque. Cette formule est

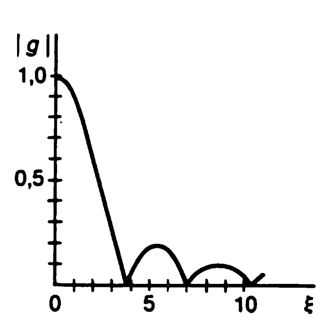


Fig. 15.10. Variation du module du degré de cohérence en fonction du paramètre

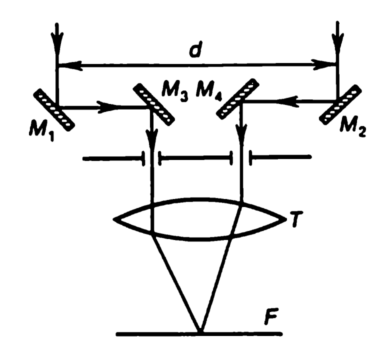


Fig. 15.11. Schéma de l'interféromètre stellaire de Michelson

valable si $d^2/R \ll c/\Delta\omega$, où $\Delta\omega$ est la non-monochromaticité de la lumière.

La figure 15.10 montre la variation du module du degré de cohérence en fonction du paramètre ξ. Pour $\xi = 3{,}83$, le degré de

cohérence s'annule, c'est-à-dire que les champs aux points P_1 et P_2 sont totalement incohérents. Cela correspond à $d = 3{,}83\lambda/(2\pi\alpha)$, où $\alpha = \rho/R$ est l'angle sous lequel le rayon de la source est vu des points P_1 ou P_2.

Cette formule montre qu'en observant les franges d'interférences dues à une source étendue, on peut en principe déterminer les dimensions angulaires de cette source, en particulier, on peut déterminer la dimension angulaire des étoiles (ainsi que mesurer la distance angulaire des deux composantes d'une étoile double). Ceci a été fait pour la première fois par Michelson à l'aide d'un *interféromètre* dit *stellaire* dont le schéma est représenté par la figure 15.11. Cet interféromètre est constitué par deux paires de miroirs: une mobile (M_1, M_2) et une fixe (M_3, M_4). Après la réflexion sur ces miroirs la lumière provenant d'une étoile lointaine se dirige dans le télescope T. La frange d'interférence est observée dans le plan focal F du télescope. En faisant varier la distance d entre les miroirs M_1 et M_2, on mesure le rayon angulaire de l'étoile.

En pratique, cette méthode de mesure des distances angulaires des étoiles est peu utilisée parce que les gros interféromètres sont d'un emploi peu commode. Le fait est que pour pouvoir mesurer de très petits angles on doit assurer une très grande différence entre les chemins des rayons et donc une grande distance d entre les miroirs. Or, en pratique cette distance ne peut pas dépasser environ 2 m; pour des dimensions plus grandes de l'interféromètre la frange d'interférence devient floue par suite des variations aléatoires de l'indice de réfraction le long du chemin optique.

§ 15.8. Interférence des intensités

La fonction de corrélation $G(x_1, x_2)$ traduit, de même que le degré de cohérence $g(x_1, x_2)$ qu'elle détermine, les propriétés statistiques du rayonnement, mais, généralement parlant, elle ne suffit pas à elle seule pour décrire complètement ces propriétés. Pour comprendre ceci, comparons un champ désordonné, qu'on peut considérer comme un système dynamique très complexe, à un autre système dynamique qui est un gaz parfait. A la fonction de corrélation du champ, c'est-à-dire à la valeur moyenne du produit des composantes du champ, correspond, de toute évidence, la valeur moyenne des produits des composantes de la vitesse de la molécule ou, en disant de façon plus simple, la valeur moyenne du carré de la vitesse de la molécule. Cette dernière grandeur est proportionnelle à la température T du gaz, ce qui signifie qu'à la fonction de corrélation correspond la température du gaz. Mais la température ne détermine pas entièrement les propriétés statistiques du gaz. Une description complète de ces propriétés exige que l'on connaisse encore la fonction de distribution $f(\mathbf{v})$ des molécules selon leurs

vitesses v. La connaissance de la valeur moyenne du carré de la vitesse $\langle v^2 \rangle = \int v^2 f(\mathbf{v})\, d^3v$ est suffisante dans le cas où il est connu que la distribution des particules est maxwellienne: $f(\mathbf{v}) \sim \sim \exp[-mv^2/(2T)]$, où m est la masse des particules, et la température s'exprime en unités énergétiques. Alors, $m\langle v^2 \rangle/2 = 3T/2$, si bien que pour $\langle v^2 \rangle$ donné la température T, qui détermine entièrement la distribution de Maxwell, se trouve donnée elle aussi.

Mais dans le cas général $\langle v^2 \rangle$ ne détermine pas encore la forme de la fonction $f(\mathbf{v})$: il est nécessaire de connaître l'ensemble tout entier des quantités

$$\langle v^n \rangle = \int v^n f(\mathbf{v})\, d^3v \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

qui sont appelées *moments de la fonction de distribution*. Pour la distribution maxwellienne elles s'expriment toutes moyennant la température T et donc $\langle v^2 \rangle$, alors que pour d'autres distributions ce sont des grandeurs indépendantes.

C'est de façon analogue à la distribution maxwellienne que se comporte la *distribution* générale *de Gauss* pour des grandeurs réelles aléatoires $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La probabilité pour que ces grandeurs se situent dans des intervalles $(x_1, x_1 + dx_1)$, $(x_2, x_2 + dx_2)$, ..., se détermine par la formule

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \\ = \sqrt{\frac{|A|}{(2\pi)^n}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i,j} A_{ij}x_ix_j\right\} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

où A_{ij} est l'ensemble des grandeurs réelles dont la matrice $A_{ij}x_ix_j \geqslant \geqslant 0$ et $|A|$ est le déterminant de cette matrice (les valeurs moyennes de x_i sont supposées nulles). Les produits moyennés des grandeurs x s'expriment par la formule

$$\langle x_1x_2 \ldots \rangle = \int x_1x_2 \ldots p(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Il en résulte en particulier que $\langle x_ix_j \rangle = (A^{-1})_{ij}$, où A^{-1} est une matrice inverse de A et $(A^{-1})_{ij}$, son ij-ième élément.

La distribution gaussienne a une propriété remarquable suivante:

$$\langle x_1x_2 \ldots x_{2k} \rangle = \sum \langle x_{i_1}x_{i_2} \rangle \langle x_{i_3}x_{i_4} \rangle \ldots \langle x_{i(2k-1)}x_{i_{2k}} \rangle,$$

où $i_1, i_2, \ldots, i_{2k}$ est toute permutation des nombres $1, 2, \ldots, 2k$ et la sommation est étendue sur toutes les combinaisons possibles des paires de ces nombres. Ainsi, tous les moments pour la distribution de Gauss s'expriment par l'intermédiaire des moments quadratiques $\langle x_ix_j \rangle$ (les valeurs moyennes des produits de tout nombre impair de grandeurs x_i sont nulles). La formule indiquée

pour $\langle x_1 \ldots x_{2k} \rangle$ n'est valable que pour la distribution de Gauss. Pour les autres distributions les différents moments (les moments d'ordres différents) sont indépendants et ils sont tous nécessaires pour caractériser une distribution.

Revenons maintenant aux propriétés statistiques du champ électromagnétique. La fonction de corrélation du champ $\langle E_\mu (x_1) E_\nu^* (x_2) \rangle$ peut être assimilée au moment quadratique $\langle x_i x_j \rangle$ de l'ensemble des grandeurs aléatoires $x_1, \ldots, x_n$. Mais comme il vient d'être expliqué, pour une caractéristique complète de l'ensemble des grandeurs aléatoires il faut encore connaître les moments d'ordres plus élevés. D'une manière analogue, pour caractériser les propriétés statistiques du champ on doit connaître en plus des grandeurs $\langle E_\mu (x_1) E_\nu^* (x_2) \rangle$ encore les grandeurs $\langle E_{\mu_1} (x_1) \ldots$ $\ldots E_{\mu_n} (x_n) E_{\nu_1}^* (x_1') \ldots E_{\nu_n}^* (x_n') \rangle$ pour $n > 1$. Toutes ces grandeurs portent le nom commun de fonctions de corrélation et sont désignées par $G^{(n)}_{\mu_1 \ldots \mu_n \nu_1 \ldots \nu_n} (x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n')$. Les fonctions $G^{(n)}$ s'appellent *fonctions de corrélation d'ordre n*. La fonction de corrélation que nous avons étudiée jusqu'ici doit maintenant être notée $G^{(1)}_{\mu\nu} (x_1, x_1')$ et appelée fonction de corrélation du premier ordre. Si la polarisation du champ est parfaitement précisée, les indices de polarisation $\mu_1 \ldots, \nu_1 \ldots$ deviennent inutiles et la fonction de corrélation du n-ième ordre peut être définie tout simplement par

$$G^{(n)} (x_1 \ldots x_n ; x_1' \ldots x_n') = \langle E (x_1) \ldots E (x_n) E^* (x_1') \ldots \ldots E^* (x_n') \rangle .$$

Les fonctions de corrélation d'ordres supérieurs permettent de généraliser la notion de cohérence.

Le fait est que cette notion est liée à la régularité du rayonnement. Si le champ est régulier, la fonction de corrélation du premier ordre se factorise: $G^{(1)} (x_1, x_2) = E (x_1) E^* (x_2)$. Une situation analogue caractérise aussi les fonctions de corrélation d'ordre plus élevé:

$$G^{(n)} (x_1 \ldots x_n ; \; x_1' \ldots x_n') = E (x_1) \ldots E (x_n) E^* (x_1') \ldots E^* (x_n').$$

Si une telle factorisation (d'une seule et même fonction $E (x)$) a lieu pour tous les n aussi élevés que l'on veut, on peut considérer que le champ est parfaitement régulier ou bien déterminé et donc totalement cohérent, mais il se peut aussi que pour $n \leqslant M$ il y a factorisation, alors que pour $n > M$ il n'y en a pas. On dit dans ce cas que le rayonnement possède une *cohérence d'ordre M*.

Ainsi, de ce point de vue, la cohérence totale dont il s'agissait dans le paragraphe précédent doit être appelée cohérence du premier ordre. Cette notion est suffisante pour la description, en optique, des phénomènes d'interférences élémentaires mais pour la description des phénomènes d'interférences plus compliqués que nous allons

analyser ci-dessous il est nécessaire de faire usage de la notion de cohérence d'ordres plus élevés.

La factorisation de la fonction de corrélation est équivalente à ce que la quantité

$$g^{(n)}(x_1 \ldots x_n\,;\, x_1' \ldots x_n') = \frac{G^{(n)}(x_1 \ldots x_n\,;\, x_1' \ldots x_n')}{\sqrt{G^{(1)}(x_1x_1)\,G^{(1)}(x_2x_2) \ldots G^{(1)}(x_n'x_n')}}$$

soit égale en module à l'unité. Cette quantité s'appelle *degré de cohérence d'ordre n*. Elle constitue une généralisation de la quantité $g(x_1x_2)$ que nous avons considérée au paragraphe précédent et que nous devons maintenant appeler degré de cohérence du premier ordre. Alors, si le champ possède une cohérence d'ordre n, cela signifie que

$$|G^{(n)}(x_1 \ldots x_n\,;\, x_1' \ldots x_n')|^2 = G^{(1)}(x_1,\ x_1) \ldots G^{(1)}(x_n',\ x_n').$$

Considérons maintenant un champ suffisamment désordonné, par exemple un champ pouvant être traité comme gaussien. Dans ce cas, d'après ce qui a été dit plus haut à propos des moments de la distribution gaussienne, toutes les fonctions de corrélation s'expriment moyennant la fonction de corrélation du premier ordre. Par exemple, la fonction de corrélation du deuxième ordre est de la forme

$$G^{(2)}(x_1x_2\,;\, x_1'x_2') = G^{(1)}(x_1, x_1')\,G^{(1)}(x_2, x_2') + G^{(1)}(x_1, x_2')\,G^{(1)}(x_1', x_2).$$

Cela signifie que si un champ, même gaussien, possède une cohérence du premier ordre il ne peut pas posséder une cohérence du deuxième ordre. En effet, dans ce cas la fonction de corrélation du deuxième ordre devrait avoir la forme $G^{(2)}(x_1x_2\,;\, x_1'x_2') = E(x_1)\,E(x_2) \times$ $\times\, E^*(x_1')\,E^*(x_2')$, c'est-à-dire qu'elle ne contiendrait pas le facteur 2. A plus forte raison le champ gaussien ne peut pas posséder une cohérence du troisième ordre ou d'ordre plus élevé.

Il nous reste à expliquer comment on peut observer pour un champ la présence ou l'absence de la cohérence du deuxième ordre et des ordres suivants. A cet effet, il faut disposer d'un appareil réagissant à la fonction de corrélation d'ordre correspondant. Nous avons déjà dit plus haut que le compteur de photons, dont le fonctionnement est basé sur l'effet photoélectrique, réagit à la fonction de corrélation $G^{(1)}(x_1, x_2)$. Si nous imaginons un appareil idéalisé dont l'élément sensible est constitué par un seul atome, la lumière tombant sur cet atome peut lui arracher un électron et ceci avec une probabilité égale à

$$W^{(1)}(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} G^{(1)}(\mathbf{r}t', \mathbf{r}t')\,dt',$$

où t_0 et t sont les instants de commencement et de fin de l'illumination de l'atome par la lumière et $\mathbf{r}$ est la coordonnée de l'atome.

Envisageons maintenant un dispositif plus complexe, mais toujours idéalisé, comportant deux éléments sensibles constitués par deux atomes situés aux points $\mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}_2$. On peut se demander quelle sera la probabilité pour que pendant l'intervalle de temps (t_0, t) chacun des atomes absorbe un photon? La réponse est que cette probabilité aura pour valeur

$$W^{(2)}(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t} G^{(2)}(\mathbf{r}_1 t_1', \mathbf{r}_2 t_2'; \mathbf{r}_2 t_2', \mathbf{r}_1 t_1')\, dt_1'\, dt_2'.$$

Si nous désirions trouver la probabilité pour que le premier atome absorbe un photon pendant l'intervalle de temps (t_0, t_1), et le second atome, pendant l'intervalle (t_0, t_2), nous obtiendrions la formule suivante:

$$W^{(2)}(t_0, t_1; t_0, t_2) = \int_{t_0}^{t_1} dt_1' \int_{t_0}^{t_2} dt_2' G^{(2)}(\mathbf{r}_1 t_1', \mathbf{r}_2 t_2'; \mathbf{r}_2 t_2', \mathbf{r}_1 t_1').$$

Ainsi, la fonction de corrélation $G^{(2)}$ détermine la probabilité du processus d'absorption de deux photons par deux atomes soit à un même instant, soit pendant des intervalles de temps donnés. Cela signifie que pour pouvoir mesurer la fonction de corrélation $G^{(2)}$ il est nécessaire de construire un appareil utilisant deux détecteurs de photons et ne réagissant qu'à des événements où les deux photons sont absorbés à des instants donnés (plus exactement, pendant des intervalles de temps donnés). De tels appareils peuvent être appelés *compteurs de coïncidences photoniques* (ou *retardées*). D'une manière analogue, si l'on réalise un appareil comportant n détecteurs de photons et enregistrant la coïncidence des processus d'absorption de n photons, le taux de comptage de cet appareil servira de mesure de la fonction de corrélation $G^{(n)}$.

Calculons, par exemple, le taux de comptage des coïncidences retardées par un compteur à deux photons en supposant que le rayonnement est un processus gaussien. Si la lumière se propage le long de l'axe des x, le taux de comptage est proportionnel à la quantité $G^{(2)}(x_1 t_1, x_2 t_2; x_2 t_2, x_1 t_1)$ qui s'exprime, vu que le processus est gaussien, par

$$G^{(2)} \equiv G^{(2)}(x_1 t_1, x_2 t_2; x_2 t_2, x_1 t_1) =$$
$$= G^{(1)}(x_1 t_1, x_1 t_1)\, G^{(1)}(x_2 t_2, x_2 t_2) + |G^{(1)}(x_1 t_1, x_2 t_2)|^2.$$

Mais de par la définition même du degré de cohérence du premier ordre

$$|G^{(1)}(x_1 t_1, x_2 t_2)|^2 = G^{(1)}(x_1 t_1, x_1 t_1)\, G^{(1)}(x_2 t_2, x_2 t_2)\, |g^{(1)}(x_1 t_1, x_2 t_2)|^2.$$

C'est pourquoi $G^{(2)} = G^{(1)}(1)\, G^{(1)}(2)\, [1 + |g^{(1)}(x_1 t_1, x_2 t_2)|^2]$, où $1 \equiv x_1 t_1$, $2 \equiv x_2 t_2$. On remarquera que le rayonnement considéré

ne possède pas la cohérence du deuxième ordre, car dans ce cas l'expression de $G^{(2)}$ ne contiendrait pas de facteur entre crochets.

Nous voyons que la mesure de la quantité $G^{(2)}$ donne en fait le module du degré de cohérence du premier ordre. En particulier, comme nous le savons, lorsque la raie d'émission a une forme lorentzienne, $|g| = e^{-\gamma|s|}$, où $s = t_1 - t_2 - (x_1 - x_2)/c$ et

$$G^{(2)} = \frac{U^2}{4}(1 + e^{-2\gamma|s|}).$$

De ce fait, la probabilité ou la fréquence $W(s)$ d'enregistrement de deux photons aux points x_1 et x_2 aux instants t_1 et t_2 est proportionnelle à $1 + e^{-2\gamma|s|}$. La variation de la fonction $W(s)$ avec s est représentée par la figure 15.12.

Ainsi, pour une émission présentant les propriétés statistiques d'un processus gaussien il y a corrélation entre les temps d'enregis-

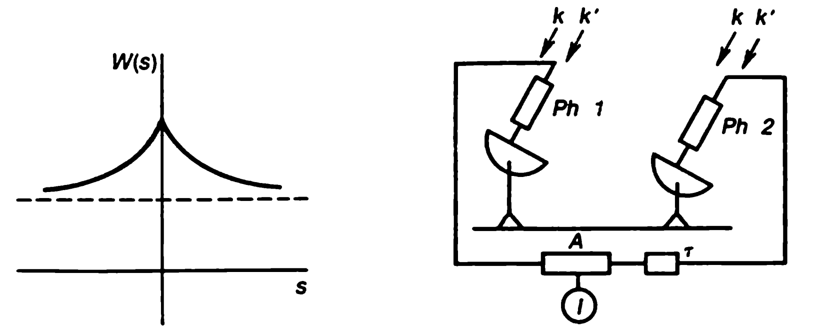


Fig. 15.12. Explication de l'effet Hunbury Brown-Twiss

Fig. 15.13. Interféromètre d'intensités

trement des photons. Ce phénomène est connu sous le nom d'*effet Hunbury Brown-Twiss*. En observant cet effet, on peut déterminer le degré de cohérence du premier ordre dont la connaissance permet à son tour, comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, de mesurer les dimensions angulaires de la source de rayonnement. Un tel programme a été réalisé par Hunbury Brown et Twiss qui ont construit à cet effet un appareil spécial qu'on peut appeler *interféromètre d'intensités* (fig. 15.13). Dans cet appareil la lumière (plus exactement, le rayonnement hertzien) en provenance d'une étoile lointaine (radio-étoile) est focalisée sur deux photodétecteurs *Ph1* et *Ph2*. Les signaux issus de ces derniers sont envoyés, après avoir passés par la ligne à retard τ et l'amplificateur A, dans l'intégrateur I. Ici, les photocourants sont multipliés et leur produit est moyenné dans le temps et enregistré suivant le temps de retard (c'est-à-dire la quantité s/c). Cette quantité est proportionnelle à $|g|$, si bien qu'en déterminant $|g|$ en fonction de la dimension angulaire de l'étoile

(plus exactement, de la radio-étoile), on peut mesurer cette dimension angulaire. Puisque cet appareil effectue le moyennage des produits des courants, c'est-à-dire des intensités, et non des champs comme par exemple dans l'interféromètre de Michelson, l'installation de Hunbury Brown-Twiss peut être appelée, comme il a déjà été dit, interféromètre d'intensités.

L'interféromètre d'intensités présente de grands avantages par rapport à l'interféromètre stellaire de Michelson. Ils sont dus à ce que l'installation de Hunbury Brown-Twiss ne comporte pas en fait des oscillations à haute fréquence, mais seulement des photocourants de fréquence relativement basse. Cela permet de les transmettre sans distorsion à des distances sensiblement plus grandes que les dimensions limites de l'interféromètre de Michelson. Cela permet à son tour d'augmenter considérablement la différence s de marche des rayons sans que la frange d'interférences s'en trouve floue.

FORMULES FONDAMENTALES

Relation entre le degré de non-monochromaticité et la durée de vie de l'état	$\Delta\omega \sim \frac{1}{\tau}$
Longueur de cohérence	$l_c = \frac{c}{\Delta\omega}$
Différence de phase entre les rayons	$\varphi_I - \varphi_{II} = \frac{\omega}{c}\left(\sum_{(I)} nrN - \sum_{(II)} nrN\right)$
Fonctions de corrélation	$G_{\mu\nu}(\mathbf{r}_1 t_1, \mathbf{r}_2 t_2) = \langle E_\mu(\mathbf{r}_1 t_1) E_\nu^*(\mathbf{r}_2 t_2)\rangle$
Fonction de corrélation d'ordre n	$G^{(n)}(x_1 x_2 \ldots x_n; x_1' x_2' \ldots x_n') = \langle E(x_1) \ldots E(x_n) E^*(x_1') \ldots E^*(x_n')\rangle$
Champ totalement cohérent à condition de factorisation	$G^{(n)}(x_1 x_2 \ldots x_n; x_1' x_2' \ldots x_n') = E(x_1) \ldots E(x_n) E^*(x_1') \ldots E^*(x_n')$

CHAPITRE 16

ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LA MATIÈRE

§ 16.1. Ondes planes dans un diélectrique isotrope homogène

Nous avons montré aux chapitres 6 et 14 que les ondes électromagnétiques transversales peuvent se propager dans le vide et que leur vitesse ne dépend ni de la fréquence, ni de l'amplitude de l'onde. En passant maintenant à l'étude des ondes électromagnétiques dans la matière, commençons par les ondes se propageant dans un diélectrique isotrope homogène.

Nous partirons des équations de Maxwell pour un milieu matériel en l'absence de charges et de courants extérieurs:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0.$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Nous savons que dans le cas des champs statiques et des milieux isotropes les inductions **D** et **B** sont liées aux intensités **E** et **H** des champs par les relations $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$, où ε et μ sont respectivement la permittivité électrique et la perméabilité magnétique du milieu. Ces grandeurs sont des constantes matérielles qui peuvent dépendre de la température ainsi que (comme, par exemple, pour des ferromagnétiques et des ferroélectriques) de l'amplitude des champs. Dans ce qui suit nous considérons le cas le plus simple sans tenir compte de la variation de ε et μ en fonction de l'amplitude ; de telles variations conduisent à la non-linéarité des équations du champ, l'étude de cette question est réservée pour le chapitre 22. Mais l'hypothèse principale que nous adoptons est que les relations entre **D**, **E** et **B**, **H** dans le cas des champs variables sont les mêmes que dans le cas des champs constants, c'est-à-dire que les propriétés des champs variables dans le milieu se caractérisent par les mêmes constantes matérielles que les propriétés des champs constants. Comme il sera montré plus loin, cette hypothèse ne correspond pas généralement parlant à la réalité et, si elle peut être utilisée, c'est seulement dans un domaine de fréquences bien limité qu'il s'agit de spécifier chaque fois. Néanmoins, il est raisonnable d'étudier d'abord les ondes dans un milieu hypothétique caractérisé par des constantes matérielles ε et μ qui ne dépendent d'aucun paramètre

de l'onde parce qu'une telle étude permet de mettre en évidence de nombreuses lois qui régissent les milieux réels.

Ainsi, nous admettons d'abord que dans le cas des champs variables eux-mêmes sont valables les relations $\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_0\mu\mathbf{H}$, où ε et μ ne dépendent ni de la fréquence, ni de l'amplitude de l'onde. En outre, nous supposons que le milieu est homogène, si bien que les valeurs de ε et μ sont indépendantes des coordonnées spatiales. Enfin, en supposant le milieu isotrope, nous considérons que **D** est parallèle à **E** et **B** l'est à **H**.

Avec toutes ces hypothèses on peut faire disparaître les vecteurs inductions dans les équations de Maxwell et n'utiliser que les intensités des champs:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\mu_0\mu\,\partial\mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{E} = 0,$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon\,\partial\mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0.$$

Appliquons à la première de ces équations l'opération rot. En utilisant la formule

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E} - \Delta\mathbf{E}$$

et en tenant compte que $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$, nous obtenons

$$-\Delta\mathbf{E} = -\mu_0\mu\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{H}.$$

Puis, en exprimant, à l'aide de la seconde équation, rot **H** moyennant $\partial\mathbf{E}/\partial t$, nous obtenons une équation qui ne contient que **E**:

$$\Delta\mathbf{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

(nous avons tenu compte que $\varepsilon_0\mu_0 = c^{-2}$). Si nous avions appliqué l'opération rot d'abord à la seconde équation et ensuite utilisé la première équation, nous serions conduits à une même équation pour l'intensité du champ magnétique:

$$\Delta\mathbf{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} = 0.$$

Nous avons obtenu pour les champs dans la matière les équations d'onde qui ne diffèrent de celles pour les champs dans le vide que par la grandeur $c^2/(\varepsilon\mu)$ intervenant au lieu de c^2. Nous concluons de là que

les ondes électromagnétiques peuvent se propager également dans des milieux matériels mais avec une vitesse égale non à c mais à $v_{ph} = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, et ces ondes sont transversales comme dans le vide.

Examinons avec plus de détails la classe la plus simple d'ondes électromagnétiques, à savoir les *ondes planes monochromatiques* dont

les intensités des champs électrique et magnétique varient dans le temps et dans l'espace suivant les lois

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}; \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)},$$

où ω est la fréquence, $\mathbf{k}$, le vecteur d'onde et $\mathbf{E}_0$ et $\mathbf{H}_0$ sont les amplitudes complexes des champs électrique et magnétique respectivement. Nous savons que pour une onde plane

$$\text{rot}\,\mathbf{A} = i\,[\mathbf{kA}], \quad \text{div}\,\mathbf{A} = i\mathbf{kA}, \quad \Delta\mathbf{A} = -k^2 A;$$

de plus, pour une onde monochromatique $\partial\mathbf{A}/\partial t = -i\omega\mathbf{A}$. Aussi, les équations d'onde permettent-elles de lier entre eux le nombre d'onde et la fréquence de l'onde:

$$k = \omega/v_{\text{ph}}, \quad v_{\text{ph}} = c/\sqrt{\varepsilon\mu}.$$

En écrivant $\mathbf{k}$ sous la forme $\mathbf{k} = \mathbf{n}k = \mathbf{n}\omega/v_{\text{ph}}$, où $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire orienté dans la direction de propagation de l'onde, et en introduisant cette expression dans les formules reliant $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ et $\mathbf{k}$, nous obtenons $(\omega/v_{\text{ph}})\,[\mathbf{nE}_0] = \omega\mu_0\mu\mathbf{H}_0$ vu que $v_{\text{ph}} = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, il vient

$$[\mathbf{nE}_0] = c\mu_0 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\mathbf{H}_0.$$

D'une manière analogue,

$$[\mathbf{nH}_0] = -c\varepsilon_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathbf{E}_0.$$

Nous voyons que les deux champs sont perpendiculaires l'un à l'autre et à la direction de propagation de l'onde, ce qui signifie que l'onde est transversale. Si $\mathbf{A}$ est perpendiculaire à $\mathbf{n}$, $|\,[\mathbf{nA}]\,| = A$ et donc

$$\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}\,E_0 = \sqrt{\mu_0\mu}\,H_0.$$

La relation reliant les amplitudes des champs a un sens physique simple. Si la permittivité ε et la perméabilité μ sont constantes et indépendantes des paramètres des champs, les densités d'énergies électrique et magnétique ont pour valeurs respectives $\varepsilon_0\varepsilon E^2/2$ et $\mu_0\mu H^2/2$. Cette relation signifie donc que dans une onde monochromatique plane les deux densités d'énergie sont égales: $\varepsilon_0\varepsilon E^2/2 = \mu_0\mu H^2/2$.

Nous savons que le vecteur flux d'énergie électromagnétique est donné par la formule $\mathbf{S} = [\mathbf{EH}]$. Dans le cas d'une onde plane cette expression peut se mettre sous la forme

$$\mathbf{S} = EH\mathbf{n},$$

et comme $H = c\varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon/\mu}\, E$, il vient

$$\mathbf{S} = c\varepsilon_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, E^2\mathbf{n} = c\mu_0 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, H^2\mathbf{n}.$$

Enfin, en tenant compte que la densité d'énergie électromagnétique

$$w = \frac{1}{2}(\varepsilon_0\varepsilon E^2 + \mu_0\mu H^2),$$

on peut récrire l'expression de S sous la forme

$$\mathbf{S} = v_{\text{ph}} w\mathbf{n},$$

où $v_{\text{ph}} = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ est la vitesse de phase de l'onde électromagnétique. Cette formule a un sens physique simple:

la densité de flux d'énergie est égale au produit de la densité d'énergie par la vitesse de propagation d'onde.

§ 16.2. Dispersion de la permittivité et de la perméabilité

Au paragraphe précédent nous avons considéré les ondes électromagnétiques dans un milieu dont la permittivité électrique ε et la perméabilité magnétique μ sont indépendantes des paramètres de l'onde qui s'y propage. Or, en réalité de tels milieux n'existent pas, comme il a déjà été dit, de sorte que la permittivité et la perméabilité se trouvent dépendantes avant tout de la fréquence de l'onde et, dans beaucoup de cas, aussi du vecteur d'onde. Ces variations sont désignées sous le terme commun de *dispersion de la permittivité et de la perméabilité*. Si la permittivité (ou la perméabilité) varie avec la fréquence, on dit que la *dispersion* est *temporelle*, si elle dépend du vecteur d'onde, on dit que l'on a affaire à une *dispersion spatiale.*

Mathématiquement, la dispersion peut se décrire de la façon suivante. Les vecteurs intensités **E** et **H** et inductions **D** et **B**, dépendant des coordonnées spatiales **r** et du temps t, peuvent être représentés par des superpositions des ondes planes monochromatiques du type $\exp(i\mathbf{kr} - i\omega t)$, c'est-à-dire moyennant des intégrales de Fourier du type

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \int \mathbf{f}_{\mathbf{k}\omega} \exp(i\mathbf{kr} - i\omega t)\, d^3k\, d\omega,$$

où $\mathbf{f}_{\mathbf{k}\omega}$ sont les amplitudes des ondes constitutives dépendant de la fréquence ω et du vecteur d'onde **k** (ces amplitudes sont appelées *composantes de Fourier* de la fonction $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$). Pour des milieux isotropes, les composantes de Fourier des inductions et des intensités des champs sont reliées par les relations

$$\mathbf{D}_{\mathbf{k}\omega} = \varepsilon_0\varepsilon(\omega, \mathbf{k})\, \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega}, \quad \mathbf{B}_{\mathbf{k}\omega} = \mu_0\mu(\omega, \mathbf{k})\, \mathbf{H}_{\mathbf{k}\omega},$$

où les grandeurs $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$ et $\mu(\omega, \mathbf{k})$ dépendent de la fréquence et du vecteur d'onde de l'onde ainsi que des paramètres du milieu. Ces grandeurs portent toujours le nom de permittivité électrique et de perméabilité magnétique. On remarquera que

les vitesses de propagation des ondes ayant ω et $\mathbf{k}$ différents sont, en cas de dispersion, différentes :

$$v_{\text{ph}} \equiv v_{\text{ph}}(\omega, \mathbf{k}) = c\,[\varepsilon(\omega, \mathbf{k})\,\mu(\omega, \mathbf{k})]^{-1/2}.$$

Si la dispersion est nulle, c'est-à-dire si ε et μ du milieu sont constantes, les inductions se déterminent à chaque instant t et en tout point $\mathbf{r}$ de l'espace par les valeurs des intensités des champs au même instant et au même point : $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0\mu\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$. Pour comprendre ce que signifie de ce point de vue la dispersion de la permittivité et de la perméabilité, effectuons une transformation inverse des relations de Fourier qui expriment les inductions par l'intermédiaire des intensités. Si nous introduisons les fonctions

$$\varepsilon(\mathbf{r}, t) = \int \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) \exp(i\mathbf{kr} - i\omega t)\, d^3k\, d\omega/(2\pi)^4 ;$$

$$\mu(\mathbf{r}, t) = \int \mu(\omega, \mathbf{k}) \exp(i\mathbf{kr} - i\omega t)\, d^3k\, d\omega/(2\pi)^4,$$

nous obtiendrons

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \int \varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')\, \mathbf{E}(\mathbf{r}', t')\, dV'\, dt',$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \int \mu(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')\, \mathbf{H}(\mathbf{r}', t')\, dV'\, dt'.$$

Ainsi,

la dispersion temporelle signifie que l'induction se détermine à un instant t par les intensités non seulement à cet instant mais également à d'autres instants t'. D'une manière analogue, la dispersion spatiale signifie que l'induction en un point $\mathbf{r}$ de l'espace se détermine non seulement par les intensités en ce point mais aussi par celles en d'autres points $\mathbf{r}'$ de l'espace (on dit dans ce cas que la liaison entre les inductions et les intensités n'est pas locale).

Fait significatif, l'induction à un instant t peut se déterminer par les valeurs des intensités à des instants précédents (mais non à des instants suivants !). En effet, comment un objet physique peut-il savoir ce qui l'attend à l'avenir ? C'est pourquoi les fonctions $\varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$ et $\mu(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$ sont pour $t > t'$ nécessairement nulles. Cette propriété de ces fonctions est une conséquence d'un *principe* physique général dit *de causalité*.

Les fonctions $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$ et $\mu(\omega, \mathbf{k})$ varient d'une substance à l'autre. Leur détermination exige que l'on connaisse la structure de la substance et son comportement dans le champ de l'onde. Pour

déterminer la permittivité et la perméabilité dans le cas le plus simple d'un gaz parfait, il faut savoir comment se comporteront des atomes distincts et les molécules dans un champ électromagnétique variable extérieur. Ce comportement se détermine tant par la structure que par la dynamique des atomes et des molécules qui ne peuvent être étudiées et décrites d'une manière conséquente que dans le cadre de la mécanique quantique. Ainsi, la détermination de la permittivité ε (ω, **k**) et de la perméabilité μ (ω, **k**) est en général un problème de la mécanique quantique.

Une exception doit être faite pour le problème de la détermination de la permittivité électrique en haute fréquence du plasma, c'est-à-dire d'un gaz de particules chargées, électriquement neutre dans son ensemble, ainsi que pour le problème de la détermination de la perméabilité magnétique en haute fréquence des ferromagnétiques (et d'autres cristaux dont les moments magnétiques atomiques sont ordonnés). Ces problèmes peuvent être résolus, sans avoir recours à la mécanique quantique, sur la base de la seule mécanique classique. Ils seront traités aux chapitres 17 et 19, alors qu'ici nous nous arrêterons sur la théorie classique de la dispersion de la permittivité électrique d'un gaz monoatomique qui a pour base le modèle classique de l'atome.

Suivant ce modèle les électrons de l'atome effectuent des oscillations harmoniques autour du noyau, c'est-à-dire que l'atome peut être considéré comme un ensemble d'oscillateurs harmoniques. Envisageons un de tels oscillateurs. Si **r** est le déplacement de l'électron par rapport au noyau, la variation dans le temps de cette grandeur se détermine par la loi de mouvement de l'oscillateur:

$$m_e\ddot{\mathbf{r}} + m_e\gamma\dot{\mathbf{r}} + m_e\omega_0^2\mathbf{r} = \mathbf{f}.$$

où **f** est une force extérieure exercée sur l'électron, m_e, la masse de l'électron, ω_0, la fréquence propre de ses oscillations et γ, le coefficient d'amortissement qui devra, comme il sera montré plus loin, obligatoirement introduit. (L'introduction du coefficient d'amortissement correspond à ce que l'équation écrite décrit l'état excité de l'atome dont la durée de vie est inversement proportionnelle à γ.) Notre problème consiste maintenant à établir comment l'oscillateur se comporte dans le champ d'une onde électromagnétique plane monochromatique $\mathbf{f} = e\mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{kr} - i\omega t)$ (la vitesse d'un électron atomique étant petite par rapport à la vitesse de la lumière, nous n'avons pris en compte ici que la force que l'électron subit de la part du champ électrique de l'onde). En supposant que les dimensions a de l'atome sont très petites devant la longueur d'onde λ, c'est-à-dire que $\lambda \gg a$, on peut négliger la quantité **kr** dans l'exponentielle, car $\mathbf{kr} \sim 2\pi\,(a/\lambda) \ll 1$. Aussi, peut-on considérer que le champ électrique ne dépend que du temps, si bien que $\mathbf{f} = e\mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)$, et l'équation de mouvement de l'électron lié au noyau prend la forme

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{e}{m_e}\,\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}.$$

Nous devons nous intéresser seulement à la solution « forcée » de cette équation

$$\mathbf{r} = \frac{\dfrac{e}{m_e}\,\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}}{-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2},$$

qui s'annule pour $E_0 = 0$ (comme nous utilisons la méthode symbolique, seule la partie réelle de cette expression doit être prise). Connaissant cette solution, on peut trouver le vecteur polarisation **P** du gaz dans le champ variable de l'onde. Ce vecteur est donné par la formule $\mathbf{P} = n\mathbf{d}$, où **d** est le moment dipolaire de l'atome induit par le champ et n, la densité d'atomes (d'électrons). Il est clair que c'est la valeur trouvée pour le rayon **r** de déplacement qui détermine $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$. En nous rappelant que $\mathbf{P} = \alpha\mathbf{E}$, où α est la polarisabilité, cherchons la polarisation du gaz dans le champ variable:

$$\alpha = \frac{e^2 n}{\varepsilon_0 m_e} (-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2)^{-1}.$$

Maintenant nous pouvons déterminer la permittivité électrique du gaz dans le champ variable: elle est liée à α par la relation $\varepsilon = 1 + \alpha$ et donc

$$\varepsilon = 1 + \frac{e^2 n}{\varepsilon_0 m_e} (-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2)^{-1}.$$

Si l'atome est constitué par des électrons situés sur des couches différentes, c'est-à-dire des électrons oscillant avec des fréquences différentes ω_i, cette formule doit être remplacée par la suivante:

$$\varepsilon = 1 + \sum_i \frac{e^2 n_i}{\varepsilon_0 m_e} (-\omega^2 - i\gamma_i\omega + \omega_i^2)^{-1},$$

où n_i est la densité d'électrons de la i-ième couche et γ_i, le coefficient d'amortissement correspondant (dans le système de Gauss $1/\varepsilon_0$ est remplacé par le facteur 4π).

Nous voyons que le modèle classique de l'atome conduit à la variation de la permittivité électrique du gaz en fonction de la fréquence ou, autrement dit, à la dispersion temporelle de la permittivité. C'est seulement dans le domaine des basses fréquences $\omega \ll \omega_i$ que la permittivité peut être considérée comme indépendante de la fréquence, ce qui nous conduit au cas examiné dans le paragraphe précédent. Quant à la dispersion spatiale, nous ne l'avons pas obtenue parce que nous avons supposé que la longueur d'onde est très supérieure aux dimensions de l'atome. Le fait est que le vecteur d'onde ne peut intervenir dans l'expression de la permittivité que sous la forme d'une combinaison ka sans dimension, où a est une grandeur qui caractérise l'atome ou le milieu tout entier et a les dimensions d'une longueur. Dans le cas d'un gaz monoatomique que nous considérons, la seule grandeur ayant les dimensions d'une longueur et pouvant entrer dans l'expression de ε est la dimension linéaire a de l'atome. En examinant les ondes longues pour lesquelles $ka \ll 1$, nous n'obtenons naturellement aucune dispersion spatiale.

Revenons à l'expression la plus simple donnant la permittivité ε dans le cas d'une seule fréquence atomique et étudions sa variation en fonction de la fréquence. Remarquons tout d'abord que si le coefficient d'amortissement γ est nul, la permittivité pour $\omega \approx \omega_0$ devient infiniment grande. C'est pour cette raison que nous avons introduit l'amortissement de l'oscillateur. Dans ces con-

ditions, la permittivité ε devient une grandeur complexe et donc la vitesse de phase v_{ph} de l'onde devient elle aussi complexe.

Nous avons exposé la théorie de la dispersion d'un gaz monoatomique en considérant l'atome comme un oscillateur classique. Or, en réalité l'atome obéit à la mécanique quantique et non classique, de sorte que le concept d'électron atomique comme un oscillateur classique est faux. D'après la mécanique quantique, si l'atome est à un certain i-ième état d'énergie $\mathscr{E}_i$, sa polarisabilité se détermine par la formule

$$\alpha'_i = \frac{e^2}{\varepsilon_0 m_e} \sum_s f_{is} (\omega_{is}^2 - \omega^2)^{-1},$$

où $\omega_{is} = (\mathscr{E}_i - \mathscr{E}_s)/\hbar$ est la fréquence de transition de l'atome de l'état i à l'état s et f_{is} sont certaines constantes caractéristiques de l'atome qui sont indépendantes de la fréquence ω du champ extérieur. On les appelle *forces de l'oscillateur*. La sommation est étendue à tous les états s différents de i. (La formule indiquée pour la polarisabilité de l'atome ne tient pas compte de l'amortissement lié à la valeur finie de la durée de vie de l'état excité de l'atome.) Connaissant α'_i, il est facile de déterminer la permittivité électrique du gaz en fonction de la fréquence:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + n\alpha'_i = 1 + \frac{e^2 n}{\varepsilon_0 m_e} \sum_s f_{is} (\omega_{is}^2 - \omega^2)^{-1}.$$

La force f_{is} de l'oscillateur se détermine par l'élément matriciel $\mathbf{d}_{is}$ du moment dipolaire $\mathbf{d}$ de l'atome et par la fréquence ω_{is} de transition:

$$f_{is} = 2m_e\omega_{is} \mid d_{is} \mid^2 / (e^2\hbar).$$

§ 16.3. Vitesse de phase complexe

Expliquons maintenant la nature complexe de la vitesse v_{ph} de l'onde. En introduisant la notation $N = \sqrt{\varepsilon(\omega, \mathbf{k})\, \mu(\omega, \mathbf{k})}$, nous avons $v_{ph} = c/N$. La grandeur complexe N (on l'appelle *indice de réfraction complexe*) peut s'écrire sous la forme $N = N' + iN''$, où N' et N'' sont des grandeurs réelles. Envisageons une onde plane monochromatique $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp [i\omega (z/v_{ph} - t)]$ se propageant dans le sens des z positifs et substituons à la vitesse v_{ph} son expression par l'intermédiaire de l'indice de réfraction:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega(z/v'_{ph} - t)} e^{-\varkappa z},$$

où $v'_{ph} = c/N'$ et $\varkappa = (\omega/c) N''$.

Il est évident que ce sont les grandeurs

$$\varphi(z, t) \equiv \omega \left(\frac{z}{v'_{ph}} - t \right), \quad \mathbf{E}_0(z) \equiv \mathbf{E}_0 e^{-\varkappa z}$$

qui ont le sens de la phase φ de l'onde et de son amplitude. Ainsi, l'amplitude de l'onde plane monochromatique cesse d'être la même en tous les points de l'espace et commence à décroître le long de la direction de propagation de l'onde, c'est-à-dire suivant l'axe z.

Quant à la phase de l'onde, elle reste constante pour un observateur qui se déplace le long de l'axe z à la vitesse $dz/dt = v'_{ph}$; la grandeur réelle v'_{ph} a donc le sens de la vitesse de phase de l'onde et la grandeur v_{ph} est appelée *vitesse de phase complexe.*

La grandeur $\varkappa$, qu'on peut appeler *coefficient d'amortissement,* détermine la profondeur de pénétration de l'onde dans le milieu considéré. En effet, à une profondeur $\delta \sim 1/\varkappa$ l'amplitude de l'onde devient e fois plus petite et la densité d'énergie s'en trouve affaiblie de $e^2 \sim 10$ fois. Il est évident que dans la direction de propagation de l'onde le champ ne peut que décroître, sinon pour un corps de dimensions suffisamment grandes il pourrait devenir aussi fort que l'on veut (il s'agit des milieux ne comportant aucune source d'énergie). C'est pourquoi il est obligatoire que $\varkappa > 0$ et donc $N'' > 0$, c'est-à-dire que

la partie imaginaire de l'indice de réfraction complexe est forcément positive.

Nous avons examiné comment décroît dans l'espace l'amplitude d'une onde plane monochromatique. Posons-nous maintenant un autre problème : soit une onde excité à un instant $t = 0$ et ayant partout une même amplitude ; comment se comportera cette amplitude avec le temps ? Si nous écrivons le champ de cette onde sous la forme $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp [ik (z - v_{ph}t)]$ et exprimons la vitesse de phase complexe moyennant l'indice de réfraction, nous aurons (pour $N'' \ll N'$)

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 (t) \exp [ik (z - v'_{ph}t)], \quad \mathbf{E}_0 (t) = \mathbf{E}_0 \exp (-\varkappa v'_{ph}t).$$

Il est évident que c'est la grandeur $\mathbf{E}_0 (t)$ qui a maintenant le sens de l'amplitude, mais elle décroît dans le temps suivant une loi exponentielle. La grandeur $\varkappa v'_{ph}$ est appelée *décrément d'amortissement* ; elle détermine le temps $\tau \sim (v'_{ph}\varkappa)^{-1}$ pendant lequel l'énergie de l'onde est affaiblie $e^2 \sim 10$ fois. L'inégalité $N'' > 0$ assure la non-croissance de l'amplitude de l'onde dans le cas d'un système physique en équilibre (plus exactement, d'un système fermé) et par là même l'observation pour un tel système de la loi de conservation de l'énergie.

Remarquons pourtant qu'il existe des systèmes physiques hors d'équilibre pour lesquels la partie imaginaire de l'indice de réfraction complexe est non nécessairement positive, mais peut être négative (dans un domaine de fréquences quelconque) ; de tels systèmes sont utilisés en pratique comme générateurs d'oscillations. Ce sont, par exemple, les masers et le système plasma-faisceau (v. chap. 17 et 23).

Illustrons la dispersion, c'est-à-dire la variation avec la fréquence, de l'indice de réfraction complexe sur l'exemple d'un gaz monoatomique classique, examiné plus haut. Si $\mu = 1$ et si on ne considère

qu'une seule fréquence propre d'oscillations des électrons, alors

$$N=\sqrt{\varepsilon}=\sqrt{1+\frac{e^2n}{\varepsilon_0 m_e(-\omega^2-i\gamma\omega+\omega_0^2)}}.$$

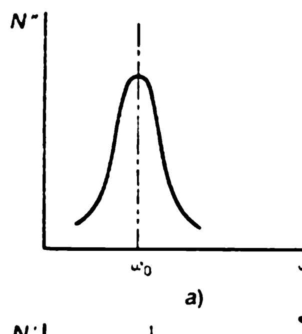
D'où nous tirons, en supposant que le gaz est suffisamment raréfié,

$$N=1+\frac{e^2n}{2\varepsilon_0 m_e(-\omega^2-i\gamma\omega+\omega_0^2)}$$

et donc

$$N'=1+\frac{e^2n(-\omega^2+\omega_0^2)}{2\varepsilon_0 m_e[(-\omega^2+\omega_0^2)^2+\gamma^2\omega^2]},$$

$$N''=\frac{e^2n\gamma\omega}{2\varepsilon_0 m_e[(-\omega^2+\omega_0^2)^2+\gamma^2\omega^2]}.$$



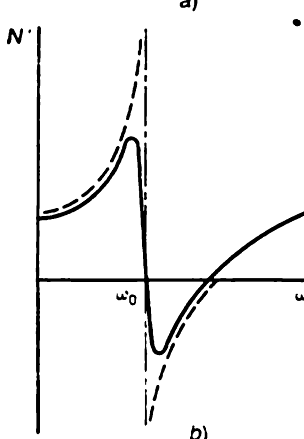


Fig. 16.1. Dispersion de la partie imaginaire (*a*) et de la partie réelle (*b*) de l'indice de réfraction complexe $N = N' + iN''$ pour un gaz monoatomique classique

Les courbes de variation de N'' et N' en fonction de la fréquence sont représentées par les figures 16.1, *a* et *b*. La courbe en traits interrompus de la figure 16.1, *b* se rapporte au cas limite de $\gamma = 0$. Dans ce cas $N'' = 0$ et l'indice de réfraction devient infiniment grand pour $\omega = \omega_0$, c'est-à-dire lorsque la fréquence de l'onde coïncide avec la fréquence d'oscillations de l'électron. Dans ces conditions, $N \to +\infty$ si la fréquence ω s'approche de ω_0 du côté des valeurs plus faibles et $N \to -\infty$ si elle s'en approche du côté des valeurs plus grandes. La situation se modifie essentiellement lorsque γ a une valeur finie : dans ce cas les branches de la courbe ne tendent pas vers $+\infty$ et $-\infty$ mais passent progressivement l'une en l'autre. C'est pourquoi si pour $\gamma = 0$ l'indice de réfraction augmentait toujours en même temps que ω, pour $\gamma \neq 0$ il se forme, au voisinage de $\omega = \omega_0$, une région dans laquelle $dN'/d\omega < 0$. On l'appelle *région de dispersion anormale*, alors que les régions où $dN'/d\omega > 0$ sont dites *de dispersion normale*. La fonction $N''(\omega)$ passe par un maximum au voisinage de $\omega = \omega_0$, de sorte que la région de dispersion anormale correspond à une forte absorption de l'onde.

§ 16.4. Effet de peau

Les résultats obtenus précédemment permettent d'étudier la pénétration des champs alternatifs et des courants alternatifs dans un conducteur, c'est-à-dire l'effet de peau (que l'on appelle encore

effet pelliculaire, effet Kelvin ou « skin effect » (le mot anglais « skin » signifie la peau). Commençons par le problème le plus simple, à savoir examinons la pénétration du champ électromagnétique du vide dans un métal occupant un demi-espace $z > 0$.

Notons au préalable que si on utilise la notion d'indice de réfraction complexe, un métal de conductivité σ ne diffère en rien des diélectriques dont la partie imaginaire de la permittivité (relative) est $\varepsilon''(\omega) = \sigma/(\omega\varepsilon_0)$. En effet, reportons-nous à l'équation de Maxwell pour le milieu matériel

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}$$

et introduisons-y $\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}$ et $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$. Nous obtenons alors une équation

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = (-i\omega\varepsilon_0\varepsilon + \sigma)\,\mathbf{E},$$

qui ne diffère en rien de l'équation pour un diélectrique de permittivité

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon + \frac{i}{\varepsilon_0\omega}\sigma.$$

La conductivité des métaux étant très élevée, de l'ordre de 10^3 S·m^{-1} et plus, l'inégalité $|\varepsilon| \ll \sigma/(\varepsilon_0\omega)$ est vérifiée aux fréquences les plus élevées, ce qui signifie que le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction. De ce fait la partie imaginaire de $\tilde{\varepsilon}$ ne diffère presque pas de $\sigma/(\varepsilon_0\omega)$ et l'indice de réfraction complexe prend la forme

$$N = N' + iN'' = \left(\varepsilon + \frac{i}{\varepsilon_0\omega}\sigma\right)^{1/2} = (1+i)\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0\omega}\right)^{1/2}.$$

Nous avons vu au paragraphe précédent que les amplitudes des champs décroissent de la périphérie vers la profondeur de l'échantillon suivant une loi exponentielle $\exp(-z/\delta)$, où $\delta = c/(\omega N'')$. En y introduisant $N'' = [\sigma/(2\varepsilon_0\omega)]^{1/2}$, nous obtenons

$$\delta = c\,[\sigma/(2\varepsilon_0\omega)]^{-1/2}.$$

A une distance δ les amplitudes des champs sont réduites à la fraction $1/e$ de leur valeur de surface, si bien que cette grandeur peut servir de mesure de la profondeur de pénétration du champ électromagnétique dans le métal. On l'appelle *épaisseur de pénétration* ou *couche de peau*. Nous voyons que la couche de peau décroît avec la fréquence comme $\omega^{1/2}$ et qu'elle est d'autant plus mince (c'est-à-dire que l'effet pelliculaire est d'autant plus marqué) que la conductivité du métal est plus élevée. Si nous prenons, par exemple, le cuivre pour lequel, aux températures ordinaires, $\sigma = 5\cdot10^5$ S·m^{-1}, la couche de peau sera $\delta = 0{,}6$ cm à la fréquence $\omega = 2\pi\cdot50$ s^{-1} et $\delta = 0{,}06$ cm à la fréquence $\omega = 2\pi\cdot500$ s^{-1}.

Jusqu'ici nous avons supposé que le métal remplissait tout le demi-espace $z > 0$. Il est pourtant clair que les résultats obtenus sont également valables pour un échantillon limité pourvu que son épaisseur soit grande par rapport à l'épaisseur de pénétration.

Arrêtons-nous à ce propos au problème du passage d'un courant alternatif dans un conducteur. Les courants alternatifs sont engendrés toujours par des champs alternatifs appliqués aux conducteurs, de sorte que l'effet pelliculaire que nous venons d'examiner a un rapport direct au phénomène, bien connu en pratique, de concentration du courant alternatif près de la périphérie du conducteur. Ce phénomène a pour effet que la résistance d'un conducteur (mais non la résistivité de la substance dont il est fait!) est plus grande en courant alternatif qu'en courant continu.

Evaluons la résistance d'un conducteur métallique en courant alternatif. Nous devons évidemment admettre que le courant ne parcourt pas toute la section transversale du conducteur mais seulement une mince couche de peau d'épaisseur δ (nous supposons que δ est petite par rapport au rayon du conducteur). Cela signifie que l'aire effective de la section transversale par laquelle circule le courant est égale à $L\delta$, où L est le périmètre de la section. Cette aire est $S/(L\delta)$ fois plus petite que l'aire vraie S ; dans la même proportion doit augmenter la résistance en courant alternatif R_ω par rapport à la résistance R en courant continu:

$$R_\omega = R\ (L\delta/S).$$

Comme $\delta \sim \omega^{-1/2}$, la résistance R_ω est proportionnelle à $\sqrt{\omega}$.

La concentration du courant alternatif sur la périphérie du conducteur doit conduire à une diminution (pour une intensité de courant donnée) de la partie de l'énergie du champ magnétique du courant qui est concentrée à l'intérieur du conducteur. Mais l'énergie du champ magnétique du courant, divisée par le carré de l'intensité du courant, détermine le coefficient d'auto-induction du conducteur. Une diminution de l'énergie du champ doit donc entraîner une diminution du coefficient d'auto-induction du conducteur parcouru par un courant alternatif.

En calculant l'épaisseur de la couche de peau, nous avons supposé valable la loi d'Ohm $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, où σ est la conductivité en courant continu. Une expression aussi simple de la densité de courant n'est pourtant valable que dans le cas d'un champ uniforme: le champ ne doit pas subir de variations substantielles sur des distances de l'ordre du libre parcours moyen de l'électron. Or, dans un conducteur le champ alternatif varie sur des distances de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de pénétration δ. Cela signifie qu'en courant alternatif la formule $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ ne peut être appliquée que lorsque $l \ll \delta$. Si $\delta \leqslant l$, le champ devient nettement non uniforme à des distances de l'ordre de l, de sorte que la formule $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ avec une conductivité σ

statique cesse d'être valable. Vu que le libre parcours moyen des électrons augmente lorsque la température baisse, la diminution de la température favorise la réalisation de la condition $\delta \leqslant l$, de même que l'augmentation de la fréquence du champ.

Essayons de comprendre comment le champ électromagnétique pénètre dans le métal dans le cas où l'épaisseur de la couche de peau est petite devant le libre parcours moyen des électrons (ce cas est appelé *effet pelliculaire anormal*). Remarquons à cet effet que pour $l \gg \delta$ l'électron (s'il se déplace sous un angle suffisamment grand par rapport à la surface du métal) reste peu de temps dans le champ électrique et donc n'interagit pratiquement pas avec ce champ. Cela signifie que la conduction est assurée principalement par ceux des électrons qui se déplacent parallèlement à la surface du métal ou sous un petit angle θ à cette surface: $\theta \ll \theta_0$, où $\theta_0 \sim \sim \delta/l$. Le nombre relatif de tels électrons étant proportionnel à θ_0, leur densité dans la couche de peau est de l'ordre de $\tilde{n} \sim n\delta/l$, où n est la densité totale des électrons de conduction.

Tenons compte maintenant que la conductibilité se détermine par la densité des électrons « réagissant » au champ électrique. Il est évident que la conductivité effective $\tilde{\sigma}$ sera de l'ordre de grandeur de

$$\tilde{\sigma} = \frac{\tilde{n}}{n}\sigma \sim \frac{\delta}{l}\sigma.$$

En introduisant cette expression dans la formule générale donnant la couche de peau $\delta = c\,[\sigma\omega/(2\varepsilon_0)]^{-1/2}$, nous obtenons

$$\tilde{\delta} = \left(\frac{2\varepsilon_0 c^2 l}{\sigma\omega}\right)^{1/3}.$$

Nous voyons que dans le cas de l'effet pelliculaire anormal la couche de peau est proportionnelle à $\omega^{-1/3}$ et non à $\omega^{-1/2}$ comme pour l'effet pelliculaire normal.

On remarquera que la conductivité σ entre dans la formule de $\tilde{\delta}$ avec le libre parcours moyen l de l'électron dans la combinaison σ/l. Mais $\sigma = e^2 nl/p_F$, où p_F est l'impulsion limite de Fermi. La formule pour $\tilde{\delta}$ peut donc se récrire sous la forme

$$\tilde{\delta} = \left(\frac{2\varepsilon_0 c^2 p_F}{e^2 n\omega}\right)^{1/3}.$$

Nous voyons qu'en fait $\tilde{\delta}$ ne dépend pas de l: la formule ne comprend que des grandeurs telles que la densité des électrons de conduction et leur impulsion limite (mais non le libre parcours moyen). C'est pour cette raison qu'à la différence de δ la grandeur $\tilde{\delta}$ est indépendante de la température.

Le libre parcours moyen intervient pourtant dans le critère d'applicabilité de la formule de $\tilde{\delta}$. En effet, cette formule est valable

si $\delta \ll l$, c'est-à-dire si $\sigma\omega l^2/(2\varepsilon_0 c^2) \gg 1$. En y introduisant $\sigma = e^2 nl/p_F$, nous obtenons

$$\omega \gg \omega_0\,; \quad \omega_0 = \frac{2\varepsilon_0 c^2 p_F}{e^2 n l^3}.$$

C'est à cette condition que doivent satisfaire les fréquences pour que l'effet pelliculaire anormal puisse se produire. En posant $n \sim 10^{23}$ cm^{-3}, $p_F \sim 10^{14}$ kg·m·s^{-1} et $l \sim 10^{-15}$ m, nous obtenons $\omega_0 \sim 10^7$ s^{-1}.

Il est facile de voir que $\tilde{\delta} = l\,(\omega_0/\omega)^{1/3}$; $\delta = l\,(\omega_0/\omega)^{1/2}$. La première formule est valable pour $\omega > \omega_0$, et la seconde, pour $\omega < \omega_0$. Nous voyons que $\delta > l$, $\tilde{\delta} < l$.

§ 16.5. Vitesse de phase et vitesse de groupe

Revenons à la notion de vitesse de phase. Comme il a déjà été dit, elle se rapporte à une onde plane, parfaitement monochromatique $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{kr} - i\omega t)$. Pour une valeur donnée de t, la phase $\varphi = \mathbf{kr} - \omega t$ d'une telle onde prend des valeurs constantes dans les plans $\mathbf{kr} = C^{te}$, perpendiculaires au vecteur d'onde $\mathbf{k}$ et chacune des valeurs de la phase est transportée dans l'espace avec une vitesse constante égale à

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\omega\mathbf{n}}{k} = \mathbf{v}_{ph},$$

où $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$ est un vecteur unitaire orienté dans le sens du vecteur d'onde $\mathbf{k}$. C'est cette grandeur qui est la vitesse de phase de l'onde plane monochromatique donnée. Puisque pour une telle onde $\omega = ck/\sqrt{\varepsilon\mu}$, $v_{ph} = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, et comme ε et μ dépendent en général de ω et $\mathbf{k}$, la vitesse de phase est dans le cas général une fonction de la fréquence et du vecteur d'onde, cette fonction étant complexe (v. §§ 16.2 et 16.3).

Mais une onde plane monochromatique existe dans tout l'espace et tout le temps et son intensité est partout et toujours la même. Il est clair que de telles propriétés de l'onde ne peuvent pas être considérées autrement qu'une abstraction. Une question doit donc naître : quel rapport cette onde a-t-elle aux ondes réelles ? La réponse est que l'onde plane monochromatique peut être considérée tant dans un milieu matériel que dans le vide, comme un élément ou un « constituant ultime » à l'aide duquel on peut construire une onde réelle qui existe pendant un temps fini dans une région limitée de l'espace.

Considérons pour simplifier un milieu non absorbant mais ayant une permittivité électrique variable en fonction de la fréquence, de sorte que la vitesse de phase $v_{ph} = v_{ph}(\omega)$ dans ce milieu est une certaine fonction réelle de la fréquence. Supposons que l'intensité E

a une direction déterminée et ne dépend que d'une seule coordonnée d'espace, de z par exemple, et du temps: $E = E(z, t)$. D'après le théorème de Fourier elle est représentable par une superposition des ondes planes monochromatiques:

$$E(z, t) = \int E_k e^{i(kz-\omega t)} \, dk,$$

où $\omega = kv_{ph}$. Comme v_{ph} est une certaine fonction de ω, $k = \omega/v_{ph}$ l'est aussi, par conséquent, $\omega = \omega(k)$ peut être considérée comme une certaine fonction de k. Dans l'intégrale écrite ci-dessus qui détermine $E(z, t)$ les limites d'intégration sont en général infinies de sorte que l'expression générale de l'intensité du champ est de la forme

$$E(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} E_k e^{i[kz-\omega(k)t]} \, dk.$$

où ω doit être considérée comme une fonction paire de k (c'est-à-dire que $\omega(-k) = \omega(k)$) parce que les propriétés dispersives du milieu ne peuvent pas dépendre de la direction de propagation de l'onde. En y posant $t = 0$, nous obtiendrons l'intensité du champ à l'instant initial en tant que fonction de z:

$$E(z, 0) \equiv f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} E_k e^{ikz} \, dk.$$

En vertu du théorème de Fourier cette intégrale peut être inversée, ce qui donne

$$E_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{ikz} \, dz.$$

Cette formule permet de trouver la composante de Fourier E_k à partir de la distribution connue de l'intensité du champ $E(z, 0) \equiv f(z)$ à l'instant initial. Mais, connaissant la composante de Fourier E_k, nous pouvons calculer à l'aide du développement de Fourier écrit plus haut le champ à tout instant.

Ainsi, l'onde plane monochromatique constitue réellement l'élément de structure qui permet de représenter le champ de façon unique, par une superposition de ces éléments.

Dans l'intégrale de Fourier les composantes de $k > 0$ correspondent aux ondes se propageant dans le sens des z positifs et les composantes de $k < 0$, aux ondes se propageant dans le sens des z négatifs.

Examinons d'abord le cas le plus simple où il n'y a pas de dispersion, si bien que $\omega = v_{ph} \mid k \mid$, où v_{ph} ne dépend ni de ω, ni de k.

En récrivant l'intégrale de Fourier sous la forme

$$E(z,\ t)=\int_{0}^{\infty} E_k e^{i(kz-kv_{ph}t)}\,dk+\int_{-\infty}^{0} E_k e^{i(kz-|k|v_{ph}t)}\,dk,$$

il est facile de conclure que le premier terme traduit une certaine fonction de $(z-v_{ph}t)$, et le second, une fonction de $(z+v_{ph}t)$:

$$E\,(z,\ t)=f_1\,(z-v_{ph}t)+f_2\,(z+v_{ph}t).$$

Le premier terme décrit l'onde qui se propage dans le sens des z positifs, et le second terme le fait pour l'onde se propageant le long des z négatifs. Lors de leur propagation ces ondes conservent évidemment leur forme inchangée. Si par exemple on donne une impulsion électromagnétique $f\,(z)$ à l'instant $t=0$ et que cette impulsion se propage dans le sens des z positifs, l'intensité du champ au point z à des instants postérieurs sera déterminée par la formule $E\,(z,\ t)=f\,(z-v_{ph}t)$, c'est-à-dire que tout se passe comme si l'impulsion était transportée le long de l'axe z à la vitesse de phase.

Mais une telle situation ne se présente que dans le cas le plus simple et idéalisé d'un milieu sans dispersion de la permittivité. Or, en réalité la dispersion existe toujours et de ce fait, aux différentes composantes de Fourier correspondent des vitesses de phase différentes, de sorte qu'il est impossible de parler d'une vitesse commune de mouvement d'une superposition des ondes planes monochromatiques. Soulignons que

l'existence de dispersion est non seulement un fait expérimental mais également une conséquence des principes physiques généraux.

En effet, quelle que soit la structure de la substance, ses éléments constitutifs élémentaires (par exemple, les atomes) ne peuvent pas avoir le temps de réagir aux oscillations de très haute fréquence, si bien qu'à la limite, quand $\omega\to\infty$, les susceptibilités diélectriques doivent tendre vers zéro et donc les permittivités vers l'unité. En d'autres termes, pour des fréquences supérieures à toutes les fréquences caractéristiques du milieu, tout milieu doit se comporter comme le vide.

En revenant à la question de la propagation d'une superposition des ondes planes monochromatiques, commençons par examiner la superposition de deux ondes de ce type ayant des fréquences et des vecteurs d'onde voisins:

$$E\,(z,\ t)=E_0e^{i(kz-\omega t)}+E_0e^{i(k'z-\omega' t)},$$

où $k=(k_0-\Delta k/2)$; $\omega=(\omega_0-\Delta\omega/2)$; $k'=(k_0+\Delta k/2)$; $\omega'=(\omega_0+\Delta\omega/2)$ et $\Delta k\ll k_0$ et $\Delta\omega\ll\omega_0$ (pour simplifier, les am-

plitudes sont supposées égales l'une à l'autre). Cette expression peut être mise sous la forme

$$E(z,\ t)=A(z,\ t)\,e^{i(k_0z-\omega_0t)};\quad A(z,\ t)=2E_0\cos\frac{1}{2}(\Delta kz-\Delta\omega t).$$

Le deuxième facteur entrant dans l'expression de E correspond à une onde plane monochromatique ayant des valeurs moyennes de la fréquence ω_0 et du vecteur d'onde k_0 (dans le langage de la radiotechnique on peut l'appeler *onde porteuse*). La fonction $A\ (z,\ t)$ peut être considérée comme l'amplitude de cette onde ; elle varie lente-

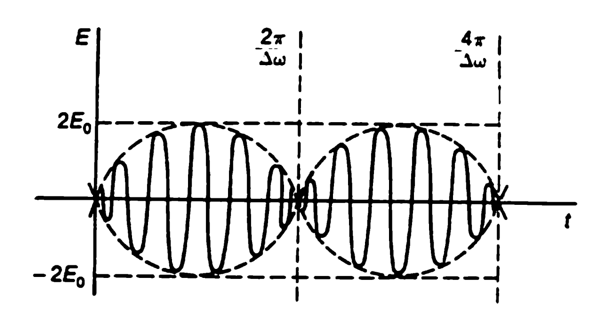


Fig. 16.2. Battements résultant de la superposition de deux ondes de même amplitude

ment, dans l'espace et dans le temps, de zéro au double de l'amplitude de chacune des ondes (dans le cas général où les amplitudes des ondes ne sont pas égales, elle varie de la différence jusqu'à la somme des amplitudes). La fréquence de variation de l'amplitude résultante est égale à $\Delta\omega/2$; elle est nettement inférieure à la fréquence ω_0 de l'onde porteuse. Ainsi, la superposition de deux ondes de fréquences voisines donne lieu à des *battements* d'amplitude lentement variable (fig. 16.2).

L'amplitude de battements reste inchangée si $\Delta kz - \Delta\omega t = C^{te}$ ou $z - (d\omega/dk)\ t = C^{te}$ vu que $\Delta\omega$ et Δk sont petits. Autrement dit, l'amplitude de battements est transportée dans l'espace à une vitesse

$$v_g = d\omega/dk.$$

Cette vitesse est appelée *vitesse de groupe*. Elle ne se confond avec la vitesse de phase $v_{ph} = \omega/k$ que lorsque ω varie en fonction de k suivant une loi linéaire.

Passons maintenant à l'étude d'un cas plus général, celui de la superposition d'une suite continue d'ondes planes monochromatiques dont les fréquences et les vecteurs d'onde varient dans des intervalles étroits $\omega_0 - \Delta\omega/2 < \omega < \omega_0 + \Delta\omega/2$ et $k_0 - \Delta k/2 < k <$

$< k_0 + \Delta k/2$. Dans ce cas

$$E(z,\ t) = \int\limits_{k_0-\Delta k/2}^{k_0+\Delta k/2} E_k \exp\{i(kz-\omega t)\}\,dk.$$

Une telle superposition, que nous avons déjà rencontrée au chapitre 15, porte le nom de *paquet d'ondes* (ou de *train d'ondes*).

Du fait que $\Delta k \ll k$, la fréquence ω peut être remplacée, de façon approchée, par $\omega_0 + (d\omega/dk_0)(k - k_0)$, où $(d\omega/dk) = v_g$ est la valeur de la vitesse de groupe pour $k = k_0$. Il en résulte $E(z, t) = A(z, t) \exp\{i(k_0 z - \omega_0 t)\}$, où

$$A(z,\ t) = \int\limits_{k_0-\Delta k/2}^{k_0+\Delta k/2} E_k \exp\{i(k-k_0)(z-v_g t)\}\,dk.$$

De même que dans le cas examiné précédemment, le facteur exponentiel entrant dans l'expression de E répond à une onde plane monochromatique de valeurs moyennes de la fréquence et du vecteur d'onde, alors que la quantité $A(z, t)$ détermine l'amplitude de l'onde résultante, c'est-à-dire du paquet d'ondes. Cette quantité varie lentement dans l'espace (sur des distances caractéristiques de $\sim 1/\Delta k$) et dans le temps (avec des temps caractéristiques de $1/\Delta\omega$). C'est une fonction d'une variable $z - v_g t$ (et non de deux variables indépendantes z et t), c'est-à-dire que $A(z, t) = f(z - v_g t)$. Ceci permet de dire que l'amplitude est transportée dans l'espace avec une vitesse constante égale en grandeur à la vitesse de groupe au point $k = k_0$. En d'autres termes, le paquet d'ondes se déplace comme un tout unique, sans changement de forme.

La conclusion sur la forme inchangée du paquet d'ondes n'est pas pourtant exacte mais approchée. Le fait est qu'en considérant le paquet d'ondes dans la représentation de Fourier, nous avons remplacé la fréquence ω par $\omega_0 + v_g(k - k_0)$, autrement dit, nous n'avons tenu compte que de deux premiers termes dans le développement de la fréquence en série de Taylor suivant les puissances de $k - k_0$:

$$\omega = \omega_0 + v_g(k-k_0) + \frac{1}{2} v_g'(k-k_0)^2 + \ldots,$$

où $v_g' = dv_g/dk$. Pour évaluer le rôle du terme suivant rejeté (du troisième) notons que dans l'exponentielle il est multiplié par t ; il n'est négligeable qu'à la condition que $v_g'(\Delta k)^2 t \ll 1$. La distance parcourue par le paquet d'ondes pendant le temps t étant $L = v_g t$, cette condition peut se mettre sous la forme

$$L \ll L_0, \quad L_0 = v_g/[v_g'(\Delta k)^2].$$

C'est seulement sur les distances inférieures à L_0 que le paquet d'ondes se comporte comme un tout unique se déplaçant à la vitesse de

groupe. En se déplaçant, le paquet d'ondes s'étale ; cet étalement devient sensible lorsque le paquet parcourt une distance de l'ordre de L_0. Pour des distances plus grandes la notion de vitesse de groupe perd son sens physique.

Considérons à titre d'illustration un milieu pour lequel la fréquence ω est liée au vecteur d'onde par la relation $\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2} a^2k^2\right)$, où ω_0 et a sont certaines constantes (une telle dispersion est caractéristique des oscillations de plasma et des ondes de spin, v. chap. 17, 19). Soit une impulsion donnée à l'instant initial sous forme d'une onde sinusoïdale modulée dont l'enveloppe de modulation est $\exp[-z^2/(2d^2)]$:

$$E(z, 0) \equiv f(z) = E_0 \cos k_0z \exp[-z^2/(2d^2)].$$

Quel est le temps pendant lequel cette impulsion se déplacera comme un tout unique sans changer en forme ? Pour répondre à cette question, développons $f(z)$ en intégrale de Fourier $f(z) = \int E_k \exp(ikz)\, dk$ et considérons le paquet d'ondes

$$E(z, t) = \int E_k \exp(ikz - i\omega t)\, dk.$$

Le temps d'existence d'un paquet non étalé se détermine alors par la quantité $t_0 \sim (\Delta k)^{-2} (dv_g/dk)^{-1}$ (en toute rigueur, il doit être grand par rapport à t). Dans le cas considéré, la dispersion des vecteurs d'onde autour des valeurs de $k = k_0$ est de l'ordre de grandeur de $\Delta k \sim d^{-1}$, et la vitesse de groupe $v_g = d\omega/dk = \omega_0 a^2 k$. Ainsi, $t_0 \sim d^2/(\omega_0 a^2)$, c'est-à-dire que le paquet ne s'étale pas si $t \ll d^2/(a^2\omega_0)$.

Un calcul correct montre que pour $t \neq 0$ de même que pour $t = 0$, le paquet d'ondes présente la forme d'une onde sinusoïdale modulée dont l'enveloppe de modulation se détermine par une courbe gaussienne $\exp[-z^2/(2d_t^2)]$, où d_t est la largeur effective de la courbe qui n'est plus constante mais variable dans le temps :

$$d_t^2 = d^2 (1 + \omega_0 a^2 t/d^2).$$

Elle augmente avec le temps, de sorte que le paquet s'étale. Si $\omega_0 a^2 t/d^2 \ll 1$, $d_t \simeq d$ et donc le paquet d'ondes a la même forme que celle de l'impulsion initiale.

Mais la dispersion de la permittivité électrique n'est pas la seule cause à provoquer un changement de forme du paquet d'ondes dans un milieu réel. Jusqu'ici nous avons supposé que le milieu était non absorbant, c'est-à-dire totalement transparent, alors que l'absorption de l'énergie du champ conduit elle aussi au changement de forme du paquet d'ondes. C'est pourquoi, dans les conditions d'une forte absorption la notion de vitesse de groupe cesse en général d'avoir un sens physique.

Nous avons entendu par paquet d'ondes une superposition des ondes à faible dispersion des vecteurs d'onde (par rapport à la valeur moyenne du vecteur d'onde). Voyons maintenant quelle est la région de l'espace occupée par un paquet d'ondes. Considérons à cet effet l'exemple le plus simple, celui d'un train d'ondes de longueur finie Δz. Dans ce cas

$$E(z,\ 0) \equiv f(z) = \begin{cases} E_0 \exp(ik_0 z) & (|z| \leqslant \Delta z/2), \\ 0 & (|z| > \Delta z/2) \end{cases}$$

et la composante de Fourier a pour expression

$$E_k = \frac{1}{2\pi} E_0 \int_{-\Delta z/2}^{\Delta z/2} \exp\{i(k_0 - k) z\} \, dz = \frac{E_0}{\pi (k - k_0)} \sin \frac{(k - k_0)\Delta z}{2}.$$

Notons $(k - k_0)\Delta z/2 = \xi$, alors E_k est proportionnelle à $(\sin \xi)/\xi$. La courbe représentative de cette fonction est montrée à la figure 16.3. Cette fonction n'est pas petite (c'est-à-dire de l'ordre de l'unité) pour ξ compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$. La largeur de cet intervalle étant égale à π, la largeur Δk de l'intervalle de vecteurs d'onde, où E_k n'est pas petite, est $\Delta k \sim 2\pi/\Delta z$. Ainsi,

$$\Delta k\ \Delta z \sim 2\pi.$$

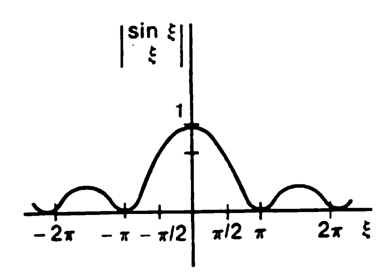


Fig. 16.3. Courbe représentative de la fonction $\frac{\sin \xi}{\xi}$

Une même relation est valable pour tout paquet d'ondes. Nous voyons que plus étroits sont ces intervalles, plus forte est la dispersion des vecteurs d'onde. Dans le cas général d'un paquet d'ondes tridimensionnel dont les dimensions suivant les axes x, y, z sont Δx, Δy, Δz, nous pouvons écrire tout de suite pour les intervalles Δk_x, Δk_y, Δk_z, dans lesquels la composante de Fourier du champ n'est pas petite,

$$\Delta k_x\ \Delta x \sim 2\pi, \quad \Delta k_y\ \Delta y \sim 2\pi, \quad \Delta k_z\ \Delta z \sim 2\pi.$$

Une question se pose : existe-t-il une relation analogue pour la fréquence ? Si nous désignons par Δt l'intervalle de temps que le paquet d'ondes passe en un point donné de l'espace, alors $\Delta t \sim \sim \Delta z/v_g$ et donc $v_g \Delta t\ \Delta k \sim 2\pi$. Mais $v_g\ \Delta k \sim \Delta\omega$, où $\Delta\omega$ est la dispersion en fréquence du paquet. Ainsi,

$$\Delta\omega\ \Delta t \sim 2\pi.$$

Cette relation lie l'intervalle de temps de passage du paquet par un point donné à la dispersion en fréquence du paquet. Mais elle a un

autre sens, plus général et profond, à savoir : elle lie la durée de vie de chaque état de tout système physique à la dispersion en fréquence correspondant à cet état.

Soit, par exemple, une impulsion $f(t)$ (électromagnétique ou d'une autre nature quelconque) existant pendant un temps τ fini. Dans le cas le plus simple une telle impulsion s'évanouit exponentiellement au bout du temps τ :

$$f(t) = Ae^{-t/\tau} \quad (t \geqslant 0);$$

et donc $f(t) = 0$ si $t < 0$. Alors la composante de Fourier s'exprime par

$$f_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty f(t) e^{i\omega t} dt = \frac{\tau}{2\pi} (1 - i\omega\tau)^{-1}.$$

En module, f_ω n'est pas petite dans l'intervalle de fréquences $-\Delta\omega/2 \leqslant \omega \leqslant \Delta\omega/2$ où $\Delta\omega \sim 2\pi/\tau$. Autrement dit, la dispersion de fréquences dans l'impulsion est inversement proportionnelle à la durée de vie et sa valeur est de l'ordre de $\Delta\omega\tau \sim 2\pi$.

Nous voyons sur l'exemple d'un paquet d'ondes qu'en utilisant la relation $\Delta\omega \, \Delta t \sim 2\pi$, il est très important de préciser ce qu'on entend par Δt. En effet, la dispersion de fréquences $\Delta\omega \sim v_g \, \Delta k$ caractérise l'inverse du temps mis par le paquet pour passer par un point donné de l'espace. Quant à la durée de vie du paquet, on entend généralement par là un temps beaucoup plus long : de la création du paquet jusqu'à son étalement, c'est-à-dire le temps au cours duquel l'amplitude du champ n'est pas petite dans un référentiel se déplaçant avec le paquet. Il est aisé de voir qu'au passage à un référentiel se déplaçant à la vitesse $\mathbf{v}$ correspond le changement $\omega \to (\omega - \mathbf{kv})$. En effet, si $f(\mathbf{r}, t)$ est une grandeur quelconque dépendant des coordonnées et du temps, dans un référentiel en mouvement la même grandeur sera $f(\mathbf{r} - \mathbf{v}t, t)$. Mais dans la transformation inverse de Fourier, c'est le changement $\omega \to \omega - \mathbf{kv}$ qui est équivalent au déplacement $\mathbf{r} \to \mathbf{r} - \mathbf{v}t$, parce que

$$\int f(\mathbf{r} - \mathbf{v}t, \; t) \exp(-i\mathbf{kr} + i\omega t) \, d^3r \, dt =$$
$$= \int f(\mathbf{r}, \; t) \exp\{-i\mathbf{kr} + i(\omega - \mathbf{kv}) t\} \, d^3r \, dt.$$

Dans un référentiel en mouvement à la vitesse de groupe la dispersion des fréquences dans le paquet n'est plus égale à $\Delta\omega \sim v_g \, \Delta k$: en première approximation suivant Δk le terme contenant $(\Delta\omega - - v_g \, \Delta k)$ disparaît, de sorte que $\Delta\omega = \frac{1}{2} v'_g (\Delta k)^2$. Si nous nous rappelons que la durée de vie du paquet est égale à $L_0/v_g \sim v'^{-1}_g (\Delta k)^{-2}$, nous verrons que dans un référentiel en mouvement la relation

$\Delta\omega\ \Delta t \sim 2\pi$ prend un sens physique plus profond, à savoir: $\Delta\omega$ est une dispersion en fréquence (beaucoup plus faible que dans un système de laboratoire), et Δt est la durée de vie du paquet (beaucoup plus grande que $(v_g\ \Delta k)^{-1}$).

Lions la vitesse de groupe à l'indice de réfraction N. En différentiant la relation $\omega = ck/N$, nous avons

$$v_g \equiv \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k = \frac{c}{N} - \frac{ck}{N^2}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k},$$

d'où

$$v_g = c\left[N\left(1 + \frac{ck}{N^2}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\omega}\right)\right]^{-1} = c\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(N\omega)\right]^{-1}.$$

Dans le domaine de dispersion normale (v. paragraphe précédent), par définition, $\mathrm{d}N/\mathrm{d}\omega > 0$. Puis, dans les exemples analysés au paragraphe précédent, dans le domaine de dispersion normale $N > 1$ (dans le domaine de dispersion normale cette inégalité est valable pour la plupart des milieux, bien qu'elle ne soit pas obligatoire). C'est pour cette raison que les inégalités $v_g < v_{ph} < c$ sont vérifiées dans le domaine de dispersion normale.

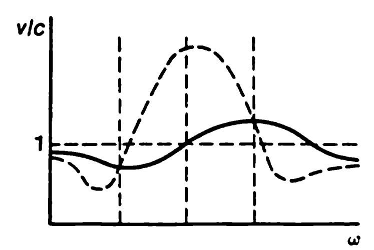


Fig. 16.4. Variations de la vitesse de phase (courbe en traits pleins) et de la vitesse de groupe (courbe en traits interrompus) en fonction de la fréquence dans le domaine de la dispersion anormale

Dans le domaine de dispersion anormale, $\mathrm{d}N/\mathrm{d}\omega < 0$ et $|\mathrm{d}N/\mathrm{d}\omega|$ peut être très grand. Dans ce cas la vitesse v_g peut devenir supérieure à c (et même infiniment grande). La vitesse de groupe peut aussi prendre une valeur négative: l'amplitude lentement variable peut être transportée dans le sens opposé au transport de la phase de l'onde. Dans tous ces cas ce n'est qu'avec une extrême prudence qu'il faut utiliser la notion de vitesse de groupe et pour résoudre le problème du mouvement d'un paquet d'ondes il convient d'avoir recours à la représentation de Fourier initiale et d'analyser son comportement.

Les courbes de variation de v_g et v_{ph} en fonction de la fréquence dans le domaine de dispersion anormale sont représentées par la figure 16.4.

Ainsi, tant la vitesse de phase que la vitesse de groupe peuvent dépasser la vitesse de la lumière dans le vide c. Mais

quelles que soient les valeurs de v_{ph} et v_g et quelle que soit la forme de l'impulsion initiale de champ, le bord avant du front d'onde se déplace toujours à la vitesse c.

Ce résultat est d'une application universelle: il est indépendant non seulement de la forme de l'impulsion ou du signal mais égale-

ment des propriétés du milieu qui peut être transparent ou opaque (dans un domaine de fréquences quelconque), diélectrique ou conducteur.

Le fait est que lors du passage du front d'onde les oscillateurs, à partir desquels est construit le milieu et qui déterminent la dispersion de la permittivité et de la perméabilité, n'ont pas le temps de se déplacer, de sorte que leur mouvement est sans effet sur la vitesse du front. Le front de tout signal passe par le milieu comme par un espace vide, et l'action du milieu ne se fait sentir que derrière le front. Cette circonstance amène l'accord avec la théorie de la relativité qui stipule que la vitesse du signal ne peut pas excéder la vitesse de la lumière c (v. chap. 7). La conclusion que la vitesse du front d'onde ne peut pas être supérieure à c peut être démontrée mathématiquement en toute rigueur: elle est une conséquence de ce que pour tout milieu, comme il a été indiqué plus haut, $\varepsilon(\omega) \to 1$, lorsque $\omega \to \infty$.

§ 16.6. Energie du champ dans les milieux dispersifs

Comme il a été dit précédemment (v. chap. 2 et 5), pour faire varier les inductions électrique et magnétique **D** et **B** respectivement de d**D** et de d**B** il faut, dans un volume unité, effectuer un travail

$$dA = \frac{1}{2}(\mathbf{E}\, d\mathbf{D} + \mathbf{H}\, d\mathbf{B}).$$

Dans le cas des champs statiques l'induction électrique **D** ne dépend que du champ électrique **E** (et peut dépendre, par l'intermédiaire de la permittivité électrique, aussi de la température), alors que l'induction magnétique **B** ne dépend que de **H** (et peut dépendre, par l'intermédiaire de la perméabilité magnétique, aussi de la température; dans un type particulier de cristaux **D** dépend aussi de **H**, et **B** de **E**). C'est pourquoi, à une température constante, dA est la différentielle totale d'une fonction thermodynamique F appelée *énergie libre*:

$$dA = dF, \quad F = \int (\mathbf{E}\, d\mathbf{D} + \mathbf{H}\, d\mathbf{B}),$$

où l'intégration s'effectue depuis les valeurs nulles jusqu'aux valeurs données des intensités **E** et **H**. Dans le cas le plus simple des relations linéaires $\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}$ et $\mathbf{B} = \mu_0\mu\mathbf{H}$ l'énergie libre s'exprime par la formule

$$F = \frac{1}{2}(\mathbf{ED} + \mathbf{HB}) = \frac{1}{2}(\varepsilon_0\varepsilon E^2 + \mu_0\mu H^2)$$

(la première de ces égalités est également valable pour les relations linéaires plus générales, à savoir lorsque le milieu est anisotrope et

$D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_{ik} E_k$, $B_i = \mu_0 \mu_{ik} H_k$, où ε_{ik} et μ_{ik} sont les tenseurs de permittivité et de perméabilité du milieu).

La grandeur F représente la densité totale d'énergie libre du champ dans la matière, c'est-à-dire qu'elle comprend tant l'énergie du champ lui-même que l'énergie libre de la substance liée au champ.

En tenant compte de la relation thermodynamique générale $F = W - TS$, où W et S sont les densités d'énergie et d'entropie, on peut, connaissant F, déterminer $W = F - T\,(\partial F/\partial T)$. Si ε et μ ne dépendent pas de la température, $F = W$. Ce que nous venons de dire pour F s'applique intégralement à W, à savoir : W représente la somme des densités d'énergie électromagnétique proprement dite, c'est-à-dire de $(\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2)/2$, et d'énergie de la substance liée au champ considéré.

La situation se complique lorsque nous passons des champs statiques aux champs variables. Ceci s'explique par le fait que dans le cas des champs variables les vecteurs **D** et **B** pris à un certain instant dépendent en règle générale, comme nous l'avons vu au § 16.2, des valeurs de **E** et **H** non seulement à cet instant mais aussi de leurs valeurs à des instants antérieurs. Cette propriété du milieu (dispersion temporelle) a pour effet que la grandeur $dA = \mathbf{E}d\mathbf{D} + \mathbf{H}d\mathbf{B}$, tout en conservant son sens physique du travail accompli pour des variations des inductions, cesse en règle générale d'être une différentielle totale d'une fonction quelconque des champs qu'on pourrait interpréter comme l'énergie du champ et l'énergie liée au champ (ou l'énergie libre) de la substance. Une telle situation ne peut se présenter que dans un cas spécial où les relations $\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}$ et $\mathbf{B} = \mu_0\mu\mathbf{H}$ avec la permittivité ε et la perméabilité μ constantes sont valables pour le champ variable lui-même (dans le domaine de fréquences considéré), tout comme pour un champ statique.

Mais, suivant le premier principe de la thermodynamique, pour tout système physique le travail effectué sur le système est égal à la somme de la variation d'énergie interne W et de la quantité de chaleur dégagée dans le système. On peut donc écrire pour le champ dans la substance la relation suivante :

$$dA = \mathbf{E}d\mathbf{D} + \mathbf{H}d\mathbf{B} = dW + dQ,$$

où dQ est la chaleur dégagée dans l'unité de volume de la substance lors de la variation de $d\mathbf{D}$ et $d\mathbf{B}$ des vecteurs inductions électrique et magnétique (soulignons que le symbole dQ utilisé pour la chaleur dégagée ne représente pas la différentielle d'une fonction quelconque). Il est clair que la connaissance de la seule dA ne permet pas de déterminer séparément les deux grandeurs dW et dQ. Pour cela il est nécessaire de connaître encore la dynamique de la substance elle-même parce que l'énergie totale W contient tant l'énergie du champ, c'est-à-dire $(\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2)/2$, que l'énergie de la substance

dans ce champ, et cette dernière ne peut être trouvée que si les lois de mouvement des particules de la substance dans le champ sont connues.

Considérons à titre d'exemple un gaz d'oscillateurs. Dans ce cas on doit entendre par W la grandeur

$$W = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) + K + U,$$

où K et U sont les densités d'énergies cinétique et potentielle du système d'oscillateurs dans le champ électromagnétique:

$$K = n\frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2}, \quad U = n\frac{m\omega_0^2\mathbf{r}^2}{2}.$$

Ici, m et ω_0 sont la masse et la fréquence propre d'oscillations de l'oscillateur, $\mathbf{r}$ est son rayon vecteur (par rapport à la position d'équilibre) et n, la densité d'oscillateurs.

Si e est la charge de l'oscillateur et γ, le coefficient d'amortissement, nous avons

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{e}{m}\mathbf{E}.$$

Après avoir déterminé $\mathbf{r}$ à partir de cette équation, on peut calculer la densité d'énergie W. En outre, on peut trouver la quantité de chaleur Q dégagée en 1 s dans le volume unité du gaz d'oscillateurs:

$$Q = nm\gamma\dot{\mathbf{r}}^2.$$

Si le champ est monochromatique, c'est-à-dire si $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)$,

$$\mathbf{r} = -\frac{e}{m}E_0 \exp(-i\omega t)(\omega^2 - \omega_0^2 + i\gamma\omega)^{-1}.$$

En y posant $\omega_0 = 0$, nous serons conduits au cas de plasma, pour lequel les calculs sont particulièrement simples. A savoir: dans ce cas la densité d'énergie s'exprime par

$$W = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}\left\{\left[1 - \frac{\omega_e^2(\omega^2 - \gamma^2)}{(\omega^2 + \gamma^2)^2}\right]\cos^2\omega t + \right.$$
$$\left. + \frac{\gamma\omega\omega_e^2}{(\omega^2 + \gamma^2)^2}\sin 2\omega t + \frac{\omega^2\omega_e^2}{(\omega^2 + \gamma^2)^2}\right\},$$

où $\omega_e^2 = e^2 n/(\varepsilon_0 m)$ (le terme magnétique $\mu_0 H^2/2$ est omis). La chaleur dégagée en 1 s dans l'unité de volume a pour valeur

$$Q = \omega_e^2\gamma\left[\frac{1}{\omega^2 + \gamma^2} - \frac{\omega^2 - \gamma^2}{(\omega^2 + \gamma^2)^2}\cos 2\omega t + \frac{2\gamma\omega}{(\omega^2 + \gamma^2)^2}\sin 2\omega t\right]\frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}.$$

Les grandeurs W et Q sont évidemment des fonctions du temps; leurs valeurs moyennes pendant une période du champ ont pour

expressions

$$\langle W\rangle = \left(1+\frac{\omega_e^2}{\omega^2+\gamma^2}\right)\frac{\varepsilon_0\,|E_0|^2}{4}, \quad \langle Q\rangle = \frac{\omega_e^2\gamma}{\omega^2+\gamma^2}\,\frac{\varepsilon_0\,|E_0|^2}{2}.$$

Indiquons aussi les formules pour $\langle W\rangle$ et $\langle Q\rangle$ pour le cas général d'un gaz d'oscillateurs où $\omega_0 \neq 0$:

$$\langle W\rangle = \left[1+\frac{\omega_e^2(\omega^2+\omega_0^2)}{(\omega^2-\omega_0^2)+\omega^2\gamma^2}\right]\frac{\varepsilon_0\,|E_0|^2}{4},$$

$$\langle Q\rangle = \frac{\omega_e^2\gamma\omega^2}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\omega^2\gamma^2}\,\frac{\varepsilon_0\,|E_0|^2}{2}.$$

Revenons maintenant à l'expression obtenue au § 16.2 pour la permittivité électrique du gaz d'oscillateurs et écrivons-la sous la forme

$$\varepsilon = 1-\frac{\omega_e^2(\omega^2-\omega_0^2-i\gamma\omega)}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\gamma^2\omega^2}.$$

Nous voyons que $\langle Q\rangle$ s'exprime par l'intermédiaire de la partie imaginaire ε'' de la permittivité électrique:

$$\langle Q\rangle = \varepsilon_0\omega\varepsilon''(\omega)\,|E_0|^2/2.$$

Il se trouve que cette formule importante est valable non seulement pour un gaz d'oscillateurs mais également pour tout milieu:

les pertes d'énergie d'un champ variable par échauffement du milieu sont toujours liées par une même relation à la partie imaginaire de la permittivité électrique du milieu

(si la perméabilité magnétique est elle aussi importante, comme par exemple dans le cas d'un ferromagnétique, il faut encore ajouter le terme $\mu_0\mu''(\omega)\,|H_0|^2/2$).

Pour ce qui est de la densité moyenne d'énergie du champ $\langle W\rangle$, elle ne s'exprime généralement pas par la permittivité électrique du milieu. C'est seulement dans le cas où les pertes d'énergie par échauffement du milieu sont nulles ($\langle Q\rangle = 0$) que la densité d'énergie moyenne $\langle W\rangle$ peut être exprimée moyennant $\varepsilon(\omega)$.

Dans le cas d'un gaz d'oscillateurs, en posant $\gamma = 0$ et en comparant les formules pour $\langle W_e\rangle$ et pour $\varepsilon(\omega)$, il est aisé de s'assurer de la validité de la relation

$$\langle W_e\rangle = \frac{\varepsilon_0}{4}\,\frac{d}{d\omega}[\omega\varepsilon(\omega)]\,|\mathbf{E}_0|^2.$$

Une telle relation est également valable pour d'autres milieux si $\langle Q\rangle = 0$. Dans ce cas on peut dire que pour un milieu transparent ou, plus exactement, dans la région de transparence du milieu, c'est-à-dire pour un intervalle de fréquences où $\langle Q\rangle = 0$ la densité

moyenne d'énergie du champ électrique est proportionnelle à $d(\omega\varepsilon)/d\omega$ (et naturellement au carré de l'intensité de champ). A l'expression écrite pour W_e nous devons ajouter l'énergie moyenne du champ magnétique qui est égale pour $\mu = 1$ à $\langle W_m \rangle = |H_0|\mu_0/4$, et comme $\sqrt{\mu_0\mu}H_0 = \sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}E_0$, il vient $\langle W_m \rangle = \varepsilon_0\varepsilon\,|E_0|^2/4$. Par suite, la densité moyenne d'énergie du champ électromagnétique tout entier dans un milieu dispersif (pour $\mu = 1$) s'exprime par la formule

$$\langle W \rangle = \langle W_e \rangle + \langle W_m \rangle = \left\{ \frac{d}{d\omega} [\omega\varepsilon(\omega)] + \varepsilon(\omega) \right\} \frac{\varepsilon_0 |E_0|^2}{4}.$$

Nous avons supposé le champ monochromatique, mais la formule obtenue est également valable pour un paquet d'ondes monochromatiques dont les fréquences sont comprises dans un intervalle étroit centré sur une certaine fréquence ω. Pour nous en convaincre, rappelons que la vitesse d'un paquet d'ondes, considéré comme un tout unique, se détermine par la vitesse de groupe $v_g = c/\left[\frac{d}{d\omega}(\omega N)\right]$, où $N = \sqrt{\varepsilon(\omega)}$ est l'indice de réfraction (nous supposons que $\mu = 1$). Si nous multiplions v_g par la densité moyenne d'énergie électromagnétique $\langle W \rangle$, nous obtiendrons, de toute évidence, la valeur moyenne $\langle S \rangle$ de la densité de flux d'énergie $\mathbf{S} = [\mathbf{EH}]$. Comme $\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}E = \sqrt{\mu_0\mu}H$, il vient

$$\langle S \rangle = c\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon(\omega)}\,|E_0|^2.$$

Ainsi, $\langle S \rangle = v_g \langle W \rangle$, d'où $\langle W \rangle = \langle S \rangle / v_g$. En y introduisant l'expression donnant $\langle S \rangle$ et en tenant compte que

$$\frac{1}{2}\left[\frac{d}{d\omega}(\omega N^2) + N^2\right] = N\frac{d}{d\omega}(\omega N).$$

nous retrouvons la formule obtenue pour $\langle W \rangle$ plus haut.

Cet établissement de la formule pour $\langle W \rangle$ souligne une fois de plus l'importance de l'hypothèse où le milieu est transparent ou, plus exactement, où l'absorption de l'énergie dans le milieu est très faible ; dans le cas contraire, la notion de vitesse de groupe cesse d'avoir un sens, comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, et donc la définition de $\langle W \rangle$ l'est aussi.

§ 16.7. Réflexion et réfraction des ondes

Comme nous l'avons vu, les ondes planes monochromatiques peuvent se propager dans un milieu homogène illimité. Si le milieu est inhomogène, les ondes monochromatiques n'y sont plus en général planes. Mais il existe un cas très important où les ondes planes monochromatiques peuvent se propager dans un milieu non homogène,

c'est celui de deux milieux semi-infinis dont la surface de séparation est plane. Ce paragraphe est consacré à l'étude d'un tel cas.

Les ondes planes satisfont aux équations de Maxwell à l'intérieur de chacun des demi-espaces rempli d'un milieu homogène. Le problème se ramène donc à la satisfaction des conditions aux limites sur la surface de séparation entre deux milieux :

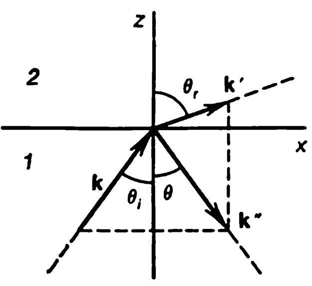


Fig. 16.5. Etablissement de la loi de Snellius (pour fixer les idées on a représenté le cas de $N > N'$)

$$\mathbf{E}_t^{(1)} = \mathbf{E}_t^{(2)}, \quad \mathbf{H}_t^{(1)} = \mathbf{H}_t^{(2)},$$

$$D_n^{(1)} = D_n^{(2)}, \quad B_n^{(1)} = B_n^{(2)}$$

(les indices (1), (2) désignent les deux milieux, t désigne les composantes tangentielles et n, les composantes normales des champs). Ces conditions peuvent être satisfaites, comme nous allons nous en convaincre, à l'aide de trois ondes planes monochromatiques (ayant une seule et même fréquence) dont deux se propagent dans un des milieux et la troisième, dans l'autre.

Soit une onde plane monochromatique définie par

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{kr} - i\omega t); \quad \mathbf{B} = \sqrt{\mu\varepsilon}\, k^{-1} [\mathbf{kE}] \sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$$

et venant de l'infini qui se propage dans le milieu *1* vers la surface frontière (plan $z = 0$ de la figure 16.5) entre les deux milieux. Alors, dans le milieu *2* se propage, depuis la surface frontière, une onde

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}_0' \exp(i\mathbf{k}'\mathbf{r} - i\omega t), \quad \mathbf{B}' = \sqrt{\mu'\varepsilon'}\, (k')^{-1} [\mathbf{k}'\mathbf{E}'] \sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$$

et, en outre, dans le milieu *1* il apparaît une onde réfléchie

$$\mathbf{E}'' = \mathbf{E}_0'' \exp(i\mathbf{k}''\mathbf{r} - i\omega t), \quad \mathbf{B}'' = \sqrt{\mu\varepsilon}\, (k'')^{-1} [\mathbf{k}''\mathbf{E}''] \sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$$

se propageant elle aussi depuis la surface frontière. Ici, **k**, **k**′, **k**″ sont les vecteurs d'onde des ondes incidente, transmise (on dit aussi réfractée), et réfléchie et ε, μ, ε', μ', les permittivités électriques et les perméabilités magnétiques des deux milieux (qu'il convient de ne pas confondre avec les parties réelles des permittivités et des perméabilités ayant les mêmes désignations dans les autres paragraphes).

Montrons que ces trois ondes, prises ensemble, satisfont aux conditions aux limites imposées. Ce faisant, il convient d'entendre, par exemple, par $\mathbf{E}^{(1)}$ la somme des intensités des ondes incidente et réfléchie, et par $\mathbf{E}^{(2)}$, l'intensité de l'onde réfractée :

$$\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{E} + \mathbf{E}''; \quad \mathbf{H}^{(1)} = \mathbf{H} + \mathbf{H}''; \quad \mathbf{D}^{(1)} = \mathbf{D} + \mathbf{D}''; \quad \mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{B} + \mathbf{B}'';$$
$$\mathbf{E}^{(2)} = \mathbf{E}'; \quad \mathbf{H}^{(2)} = \mathbf{H}'; \quad \mathbf{D}^{(2)} = \mathbf{D}'; \quad \mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{B}' \ (z = 0).$$

Tout d'abord il est clair que la réalisation des conditions aux limites sur la surface de séparation exige que soient égaux les facteurs exponentiels $\exp(ik_x x - i\omega t)$, $\exp(ik'_x x - i\omega t)$ et $\exp(ik''_x x - i\omega t)$, sinon il sera impossible d'assurer l'égalité des composantes tangentielles des intensités et celle des composantes normales des inductions (le vecteur d'onde **k** de l'onde incidente se situe dans le plan xz, de sorte que $k_y = 0$ et donc $k'_y = k''_y = 0$; fig. 16.5). Autrement dit, $k'_x = k''_x = k_x$. Ces relations signifient que *les vecteurs d'onde des ondes incidente, réfractée et réfléchie, ainsi que la normale* **n** *à la surface de séparation, sont dans un même plan*. Ce plan est appelé *plan d'incidence*.

En remarquant que $k_x = k \sin\theta_i$, $k'_x = k' \sin\theta_r$, $k''_x = k'' \sin\tilde{\theta}$, où θ_i, θ_r, $\tilde{\theta}$ sont les angles d'incidence, de réfraction et de réflexion (fig. 16.5), et en tenant compte que $k = k'' = \omega/v_{\text{ph}}$, $k' = \omega/v'_{\text{ph}}$, où $v_{\text{ph}} = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ et $v'_{\text{ph}} = c/\sqrt{\varepsilon'\mu'}$ sont les vitesses de phase des ondes dans les deux milieux, nous avons

$$\sin\theta_i/v_{\text{ph}} = \sin\theta_r/v'_{\text{ph}}, \quad \tilde{\theta} = \theta_i.$$

L'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence et le rapport du sinus de l'angle de réfraction au sinus de l'angle d'incidence est égal au rapport des vitesses de phase des ondes dans les milieux correspondants.

Cette dernière relation, connue sous le nom de *loi de la réfraction de Snellius*, peut être mise sous la forme

$$\sin\theta_i/\sin\theta_r = N'/N,$$

où $N = c/v_{\text{ph}}$ et $N' = c/v'_{\text{ph}}$ sont les indices de réfraction des deux milieux.

Nous voyons que $\theta_r > \theta_i$ si $N' < N$.

Le milieu d'indice de réfraction plus grand est dit optiquement plus dense. Ainsi, le vecteur d'onde se situe plus près de la normale n de celui des milieux qui est optiquement plus dense. Le sens du vecteur d'onde étant celui du faisceau, on peut dire que le faisceau dévie vers la normale à la surface de séparation lorsqu'il pénètre dans un milieu optiquement plus dense et dans le sens opposé lorsqu'il entre dans un milieu optiquement moins dense.

Si $N > N'$, en augmentant l'angle d'incidence θ_i, nous pouvons réaliser un angle de réfraction $\theta_r = \pi/2$ (fig. 16.6). L'angle d'incidence correspondant à ce cas, que nous désignerons par θ_c, se détermine par la condition

$$\sin\theta_c = N'/N.$$

On l'appelle *angle de réflexion interne totale*. Cette appellation est liée à ce que pour $\theta > \theta_c$ le sinus de l'angle de réfraction devient formellement supérieur à l'unité, ce qui signifie que pour $\theta > \theta_c$ l'onde réfractée n'existe pas et donc l'onde incidente est réfléchie en totalité.

Une telle conclusion n'est pas pourtant tout à fait vraie : l'onde réfractée existe même pour $\theta_i > \theta_c$, mais, en pénétrant à l'intérieur du deuxième milieu, elle s'affaiblit fortement. En effet, considérons la variation spatiale du champ de l'onde dans le deuxième milieu : $E' \sim \exp(ik'_x x + ik'_z z)$. Puisque $k'_x = k_x = k \sin \theta_i$, cette grandeur est réelle. Quant à $k'_z = \sqrt{(kN'/N)^2 - k'^2_x}$, cette grandeur

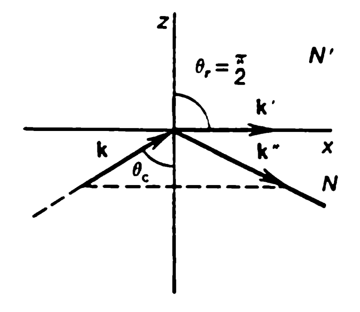


Fig. 16.6. Détermination de l'angle θ_c de réflexion interne totale

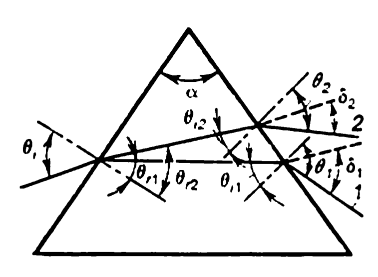


Fig. 16.7. Dispersion de la lumière blanche par un prisme

sera purement imaginaire parce que $N'/N = \sin \theta_c$ et donc $k'_z = ik \sqrt{\sin^2 \theta_i - \sin^2 \theta_c}$. Toutes les composantes des champs dans le deuxième milieu se comportent comme $\exp\{-kz\sqrt{\sin^2 \theta_i - \sin^2 \theta_c} + ikx \sin \theta_i\}$, c'est-à-dire décroissent au fur et à mesure que z augmente. On peut dire que dans la réflexion interne totale l'onde pénètre dans le deuxième milieu à une profondeur de

$$l \sim \lambda (\sin^2 \theta_i - \sin^2 \theta_c)^{-1/2},$$

où $\lambda = 2\pi/k$ est la longueur d'onde de l'onde dans le premier milieu, et que cette profondeur dépend fortement du rapport entre θ_i et θ_c.

Le long de l'axe des x l'onde se propage avec son vecteur d'onde égal à $k \sin \theta_i$ sans s'amortir. C'est pourquoi pour $\theta_i > \theta_c$ l'onde réfractée se manifeste en fait comme une onde superficielle. Notons que

dans la réflexion interne totale (dans le cas où les deux milieux sont transparents) l'énergie du champ ne décroît pas avec le temps. Ainsi, la réflexion interne totale n'est pas un amortissement mais la non-transmission de l'onde.

L'indice de réfraction dépend de la fréquence ou, ce qui revient au même, de la longueur d'onde. Par conséquent, le rapport du sinus de l'angle d'incidence au sinus de l'angle de réfraction dépend lui aussi de la longueur d'onde. Il en résulte que si le faisceau incident est une superposition de différentes ondes monochromatiques, ces dernières se réfractent différemment de sorte que le faisceau incident

se transforme en une série (continue ou discontinue) de rayons réfractés, séparés dans l'espace, dont chacun est monochromatique.

En partant de cette idée, Newton a décomposé (en 1666) un faisceau de lumière naturelle en ses composantes. A cet effet, Newton a utilisé un prisme de verre dans lequel le faisceau lumineux subissait une double réfraction (fig. 16.7). Il est clair qu'à l'entrée du faisceau dans le prisme $\sin\theta_{r1} = \sin\theta_i/N_1$, $\sin\theta_{r2} = \sin\theta_i/N_2$, où N_1, N_2 sont les indices de réfraction du verre pour deux couleurs différentes *1* et *2*, θ_{r1}, θ_{r2}, les angles de réfraction correspondants (θ_i étant l'angle d'incidence du faisceau initial). Si α est l'angle au sommet du prisme, les normales à ses faces font un angle de $\pi - \alpha$, si bien que $\theta_{i1} = \alpha - \theta_{r1}$, $\theta_{i2} = \alpha - \theta_{r2}$, il en résulte que

$$\sin\theta_1 = \sin\theta_{i1}N_1 = \sin(\alpha - \theta_{r1})\,N_1,$$

$$\sin\theta_2 = \sin\theta_{i2}N_2 = \sin(\alpha - \theta_{r2})\,N_2$$

(θ_{i1}, θ_{i2} étant les angles d'incidence et θ_1, θ_2, les angles de réfraction à la sortie du faisceau du prisme). Il est aisé de s'assurer que l'angle δ formé entre les directions du rayon lumineux incident et le rayon doublement réfracté (angle de déviation du rayon) est d'autant plus grand que l'indice de réfraction de la substance du prisme est plus élevé. Pour le verre N augmente avec la fréquence si bien que la déviation vers la base du prisme est plus grande pour un rayon violet que pour un rayon rouge.

La valeur de l'angle δ est minimale si $\theta = \theta_i$ (θ étant n'importe lequel des angles θ_1, θ_2 ; δ, l'angle correspondant de déviation du rayon après une double réfraction). Si nous désignons par $\delta_{\min}$ la valeur minimale de δ, il n'est pas difficile de montrer que

$$\sin\frac{\delta_{\min}+\alpha}{2}\Big/\sin\frac{\alpha}{2} = N.$$

Cette formule peut servir à la détermination expérimentale de l'indice de réfraction.

Jusqu'ici toutes nos conclusions n'ont été fondées que sur la loi de Snellius qui découle de l'égalité des exponentielles du type $\exp(ik_x x - i\omega t)$ pour les différentes ondes sur la surface de séparation de deux milieux. Mais nous devons utiliser en totalité les conditions aux limites, en égalant à cet effet entre elles les composantes normales des inductions et les composantes tangentielles des intensités des champs de part et d'autre de la surface frontière. Nous obtenons ainsi des relations entre les amplitudes des ondes, qui permettent d'exprimer les amplitudes des ondes réfractée et réfléchie par l'intermédiaire de l'amplitude de l'onde incidente. Ces relations dépendent pour une large part de l'orientation des champs de l'onde incidente par rapport au plan d'incidence. Dans le cas où les intensités et les inductions sont liées par des relations linéaires,

c'est-à-dire lorsque la permittivité et la perméabilité ne dépendent pas des champs, il suffit de considérer deux orientations ou, autrement dit, deux polarisations: lorsque l'intensité du champ électrique de l'onde incidente est perpendiculaire au plan (**k**, **n**) et lorsqu'elle est parallèle à ce plan. Pour le premier cas nous obtenons

$$E'' = \frac{\sin(\theta_r - \theta_i)}{\sin(\theta_r + \theta_i)} E, \qquad E' = \frac{2\sin\theta_r \cos\theta_i}{\sin(\theta_r + \theta_i)} E.$$

Dans le second cas il est plus commode de calculer l'intensité de champ magnétique (dirigée alors suivant la normale au plan d'incidence).

Il est aisé de s'assurer que

$$H'' = \frac{\operatorname{tg}(\theta_i - \theta_r)}{\operatorname{tg}(\theta_i + \theta_r)} H, \qquad H' = \frac{\sin 2\theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_r)\cos(\theta_i - \theta_r)} N$$

(rappelons que E, H sont les intensités de champ de l'onde incidente, E', H', celles de l'onde réfractée et E'', H'', celles de l'onde réfléchie).

Ces relations sont dites *formules de Fresnel*. Elles permettent de déterminer le *coefficient* (ou *facteur*) *de réflexion* R par lequel on entend le rapport des projections du vecteur de Poynting sur la normale à la surface de séparation des ondes réfléchie et incidente. Pour la première des polarisations considérées le coefficient de réflexion s'exprime par la formule

$$R_\perp = \frac{\sin^2(\theta_r - \theta_i)}{\sin^2(\theta_r + \theta_i)},$$

et pour la seconde, par la formule

$$R_\parallel = \frac{\operatorname{tg}^2(\theta_r - \theta_i)}{\operatorname{tg}^2(\theta_r + \theta_i)}.$$

Cette dernière formule montre que $R_\parallel = 0$ si $\theta_r + \theta_i = \pi/2$. Cette condition signifie que $\cos\theta_r = \sin\theta_i$, et comme $\sin\theta_i/\sin\theta_r = N'/N$, le coefficient $R_\parallel$ s'annule pour $\theta_i = \theta_0$, où

$$\operatorname{tg}\theta_0 = N'/N.$$

Pour $\theta_i = \theta_0$ une des polarisations est complètement absente dans l'onde réfléchie; en d'autres termes, la lumière réfléchie est totalement polarisée (l'intensité de son champ électrique est normale au plan d'incidence). C'est pour cette raison que l'angle θ_0 est appelé *angle de polarisation totale* (ou *angle de Brewster* en l'honneur du savant qui a découvert ce phénomène en 1815). Notons que pour $\theta_i = \theta_0$ les rayons réfracté et réfléchi sont perpendiculaires entre eux.

FORMULES FONDAMENTALES

Relation entre les amplitudes des intensités des champs dans une onde plane	$\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}\, E_0 = \sqrt{\mu_0\mu}\, H_0$. $\mathbf{E}_0 \perp \mathbf{H}_0$
Indice de réfraction complexe	$N = \sqrt{\varepsilon(\omega,\ \mathbf{k})\,\mu(\omega,\ \mathbf{k})}$
Vitesse de phase complexe	$v_{\text{ph}} = c/N$
Couche de peau dans l'effet pelliculaire normal	$\delta = c\left(\frac{2\varepsilon_0}{\sigma\omega}\right)^{1/2}$
Couche de peau dans l'effet pelliculaire anormal	$\tilde{\delta} = \left(\frac{2\varepsilon_0 c^2 p_F}{e^2 n\omega}\right)^{1/3}$
Vitesse de groupe de l'onde électromagnétique	$v_g \equiv \frac{d\omega}{dk} = c\left[\frac{d}{d\omega}(N\omega)\right]^{-1}$
Relations d'incertitude en optique	$\Delta k_x\,\Delta x \sim 2\pi$, $\Delta k_y\,\Delta y \sim 2\pi$, $\Delta k_z\,\Delta z \sim 2\pi$, $\Delta\omega\,\Delta t \sim 2\pi$
Densité moyenne d'énergie électromagnétique dans un milieu dispersif	$W = \frac{\varepsilon_0}{4}\left[\frac{d}{d\omega}(\omega\varepsilon(\omega)) + \varepsilon(\omega)\right]\lvert E_0\rvert^2$
Loi de Snellius	$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r} = \frac{N_r}{N_i}$
Sinus de l'angle de réflexion interne totale	$\sin\theta_c = N_r/N_i$
Angle de polarisation totale (angle de Brewster)	$\theta_0 = \operatorname{arctg}(N_r/N_i)$

CHAPITRE 17

OSCILLATIONS DE PLASMA

§ 17.1. Oscillations de Langmuir

En plus des états solide, liquide et gazeux, la substance peut encore se trouver dans un état particulier, sous forme d'un *plasma ionisé* qui représente un mélange de deux gaz chargés : du gaz formé par les électrons et du gaz formé par les ions, entre lesquels s'exercent des forces électriques. A l'état d'équilibre, le plasma est en moyenne électriquement neutre : les charges des électrons et celles des ions se neutralisent mutuellement. Mais, si en déplaçant une partie des électrons, on produit dans le plasma une perturbation de densité de charge, le plasma devient le siège des ondes électrostatiques à haute fréquence particulières que l'on appelle *oscillations de Langmuir*.

Les oscillations de Langmuir sont effectuées principalement par les électrons ; quant aux ions, ils peuvent être considérés comme étant au repos et formant un fond uniforme de charge positive. La charge électronique ρ non neutralisée produit un champ électrique **E** d'intensité telle qu'en vertu du théorème de Poisson

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0.$$

Sous l'effet de ce champ les électrons acquièrent une accélération

$$\dot{\mathbf{v}} = (e/m_e)\,\mathbf{E},$$

où e et m_e sont la charge et la masse de l'électron. Si nous voulions tenir compte des collisions entre les particules, nous pourrions introduire dans cette équation une force de frottement proportionnelle à la vitesse **v**. Nous n'allons pas le faire parce que le cas qui nous intéresse est celui d'un plasma sans collisions dans lequel le temps de libre parcours moyen des particules est grand par rapport à la période d'oscillations.

La perturbation sera supposée faible ; la densité de courant pourra alors s'écrire sous la forme $\mathbf{j} = en_0\mathbf{v}$, où n_0 est la densité d'équilibre des électrons. Il vient donc $\partial\mathbf{j}/\partial t = e^2n_0\mathbf{E}/m_e$ si bien que

$$\operatorname{div}\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \frac{e^2 n_0}{m_e}\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 m_e}\rho.$$

D'un autre côté, la loi de conservation de la charge conduit à l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0,$$

ce qui permet d'écrire pour $\partial \mathbf{j}/\partial t$ une autre expression

$$\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}.$$

Le rapprochement entre ces deux expressions permet d'obtenir l'équation différentielle des petites oscillations sous la forme

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 m_e} \rho = 0.$$

Cette équation décrit évidemment les oscillations d'un oscillateur de fréquence ω_e égale à

$$\omega_e = \sqrt{\frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 m_e}}.$$

Cette fréquence est dite *de Langmuir* (ou *de plasma*).

La fréquence ω_e est très haute même dans un plasma de faible densité. Par exemple, pour une densité d'électrons $n_0 = 10^{20}$ m^{-3} nous avons $\omega_e = 5{,}6 \cdot 10^{11}$ s^{-1} ; dans le vide, une onde électromagnétique correspondante de cette fréquence a une longueur d'onde de 3 mm.

§ 17.2. Permittivité électrique du plasma électronique-ionique

Jusqu'ici nous n'avons pas tenu compte de l'agitation thermique des électrons du plasma. Dans ces conditions, les oscillations de Langmuir sont non amorties et exemptes de dispersion : leur fréquence est indépendante du vecteur d'onde. Si l'on tient compte de l'agitation thermique des électrons, il apparaît une dispersion de ces oscillations et il se produit encore un phénomène très intéressant, à savoir l'amortissement des oscillations même en l'absence de collisions entre les particules.

Dans un plasma pas trop dense, la distribution d'équilibre en vitesse des électrons est une distribution maxwellienne :

$$f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) = f_M(v) = A \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2T}\right), \quad A = \frac{n_0}{4\pi}\left(\frac{m_e}{2\pi T}\right)^{3/2}$$

(la fonction de distribution est supposée normée à la condition $\int f d^3v = n_0$, la température est supposée exprimée en unités énergétiques). Si le plasma est très dense, la statistique régissant la distribution des électrons est celle de Fermi, c'est-à-dire la même que pour les électrons dans le métal (v. chap. 9). Mais nous n'allons pas considérer un plasma si dense ou, comme on dit, un *plasma dégénéré*.

Imaginons maintenant qu'à un certain instant la distribution des électrons subit une variation de telle sorte que leur fonction de distribution cesse d'être maxwellienne et commence à dépendre non seulement de la vitesse mais encore du temps t et des coordonnées $\mathbf{r}$ de l'électron. Comment peut-on trouver la fonction de distribution hors d'équilibre $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$? On peut le faire à l'aide de l'équation cinématique que nous avons déjà rencontrée au chapitre 9 à propos de l'étude des électrons dans le métal. En reprenant les raisonnements qui y ont été développés, on peut dire que par suite des collisions le nombre d'électrons dans un élément de volume $d^3v d^3r$ de l'espace de phase à l'instant $t + dt$ sera égal à $[f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) - (\partial f/\partial t)^{\text{coll}}\, dt]\, d^3v d^3r$, où $(\partial f/\partial t)^{\text{coll}}$ est l'intégrale des collisions, et comme les particules ne sont ni créées, ni annihilées, cette grandeur doit être égale à $f(\mathbf{v} + \dot{\mathbf{v}}\, dt, \mathbf{r} + \mathbf{v}\, dt, t + dt)\, d^3v d^3r$. En tenant compte que

$$f(\mathbf{v} + \dot{\mathbf{v}}\, dt, \mathbf{r} + \mathbf{v}\, dt, t + dt) = f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) + \\ + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \dot{\mathbf{v}}\, dt + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{v}\, dt + \frac{\partial f}{\partial t}\, dt,$$

où $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}$ est la force exercée sur la particule, et en égalant entre elles les deux expressions, nous obtenons

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m_e} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^{\text{coll}}.$$

C'est cette expression qui donne l'équation cinématique pour la détermination de la fonction de distribution des électrons. L'intégrale des collisions qui y figure dépend pour une large part des propriétés du système considéré et dans le cas du plasma sa structure est différente de celle du métal. Nous n'allons pas examiner ici cette structure parce que dans ce qui suit nous ne nous intéresserons qu'à un plasma dit sans collisions pour lequel les collisions peuvent être en général négligées. Dans ce cas l'équation cinématique prend la forme

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m_e} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0.$$

Cette *équation*, dite *de Vlassov*, peut être utilisée dans le cas de perturbations de haute fréquence lorsque $\omega\tau \gg 1$, où ω est la fréquence de perturbation de la fonction de distribution des électrons et τ, le temps moyen entre les collisions. Les ordres de grandeur étant $\partial f/\partial t \sim \omega \delta f$, $(\partial f/\partial t)^{\text{coll}} \sim \delta f/\tau$, où δf est la perturbation de la fonction de distribution, l'inégalité $\omega\tau \gg 1$ permet de négliger l'intégrale des collisions devant le terme $\partial f/\partial t$.

Faisons usage de l'équation de Vlassov pour déterminer la susceptibilité électrique en haute fréquence du plasma. Introduisons à cet effet un faible champ électrique, perturbateur du plasma, que

nous supposerons irrotationnel (mais non statique !). Nous supposerons également que le potentiel a la forme d'une onde plane monochromatique $\varphi = \varphi_0 \exp\{i\mathbf{kr} - i\omega t\}$, où φ_0 est l'amplitude complexe du potentiel, $\mathbf{k}$ et ω sont le vecteur d'onde et la fréquence de l'onde. L'intensité de champ électrique étant liée à φ par la relation $\mathbf{E} = -\text{grad}\,\varphi$, nous avons

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp\{i\mathbf{kr} - i\omega t\}, \quad \mathbf{E}_0 = -i\mathbf{k}\varphi_0.$$

Le champ est dirigé le long de $\mathbf{k}$, c'est-à-dire qu'il est longitudinal.

Cherchons la perturbation $\delta f = f - f_M$ de la fonction de distribution également sous la forme d'une onde plane monochromatique. En négligeant les termes quadratiques en amplitude de perturbation et en posant $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$, nous obtenons à partir de l'équation de Vlassov

$$(-i\omega + i\mathbf{kv})\,\delta f - i\frac{e}{m}\varphi_0\mathbf{k}\frac{\partial f_M}{\partial \mathbf{v}} = 0.$$

Comme $\partial f_M/\partial \mathbf{v} = -m\mathbf{v} f_M/T$, il vient

$$\delta f = \frac{e\varphi_0}{T} f_M \frac{\mathbf{kv}}{\omega - \mathbf{kv}}.$$

A δf est liée la perturbation de la densité de charge $\delta\rho$:

$$\delta\rho = e\int \delta f\, d^3v = \frac{e\varphi_0}{T}\int \frac{\mathbf{kv}}{\omega - \mathbf{kv}} f_M(v)\, d^3v.$$

Cherchons maintenant le vecteur polarisation électrique $\mathbf{P}$. Comme il a été établi au chapitre 6, $\text{div}\,\mathbf{P} = \delta\rho$, et puisque toutes les grandeurs sont proportionnelles à $\exp\{i\mathbf{kr} - i\omega t\}$, il vient $\text{div}\,\mathbf{P} = i\mathbf{kP}$. Le vecteur $\mathbf{P}$ (de même que les vecteurs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{D}$) est dirigé le long de $\mathbf{k}$, c'est-à-dire que $\mathbf{P} = \mathbf{k}P/k$. Par conséquent,

$$P = \frac{\delta\rho}{ik} = -\frac{e^2E}{Tk^2}\int \frac{\mathbf{kv}}{\omega - \mathbf{kv}} f_M(v)\, d^3v.$$

En nous rappelant que $P = \varepsilon_0\alpha E$, où α est la susceptibilité diélectrique et $\varepsilon = 1 + \alpha$ exprime la permittivité électrique, nous obtenons

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \alpha(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \frac{e^2}{\varepsilon_0 Tk^2}\int \frac{\mathbf{kv}}{\omega - \mathbf{kv}} f_M(v)\, d^3v.$$

Connaissant la permittivité électrique, nous pouvons déterminer la fréquence des oscillations propres du plasma. En effet, en l'absence de charges extérieures le théorème de Poisson donne $\mathbf{D} = 0$. Mais $\mathbf{D} = \varepsilon_0\,\varepsilon\mathbf{E}$, ce qui signifie que

pour qu'un champ électrique non nul existe dans un milieu en l'absence de charges extérieures, il est nécessaire que s'annule la permittivité électrique de ce milieu :

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 0.$$

Cette relation permet en principe de déterminer ω en fonction de $\mathbf{k}$. C'est cette valeur de ω qui représente précisément la fréquence propre des oscillations du plasma.

Considérons d'abord un plasma « froid » dans lequel la vitesse thermique moyenne des électrons est suffisamment faible. Dans ce cas l'expression sous le signe l'intégration dans la formule de α peut être développée en série suivant les puissances de $\mathbf{kv}$:

$$\frac{\mathbf{kv}}{\omega-\mathbf{kv}}=\frac{\mathbf{kv}}{\omega}\left[1+\frac{\mathbf{kv}}{\omega}+\left(\frac{\mathbf{kv}}{\omega}\right)^2+\dots\right].$$

L'intégration sur les vitesses fait disparaître les termes impairs, alors que les contributions du deuxième et du quatrième termes sont faciles à calculer, si bien que finalement nous obtenons pour ε l'expression suivante:

$$\varepsilon(\omega,\ \mathbf{k})=1-\frac{e^2n_0}{\varepsilon_0 m_e\omega^2}\left(1+\frac{3Tk^2}{m_e\omega^2}\right).$$

Mais la grandeur $\sqrt{e^2n_0/(\varepsilon_0 m_e)}=\omega_e$ n'est rien d'autre que la fréquence de Langmuir introduite au paragraphe précédent ; alors, si nous posons $T=0$, l'équation $\varepsilon=0$ donne $\omega=\omega_e$. Au second terme, entre parenthèses, ω^2 peut être remplacé par ω_e^2 ; en remarquant que $[T\varepsilon_0/(e^2n_0)]^{1/2}\equiv r_D$ est le rayon de Debye introduit au chapitre 10, nous trouverons

$$\omega=\omega_e\sqrt{1+3r_D^2k^2}\approx\omega_e\left(1+\frac{3}{2}r_D^2k^2\right).$$

Cette formule exprime la loi de la dispersion des oscillations de plasma. Elle est applicable si $kr_D\ll 1$ et, puisque $k=2\pi/\lambda$, où λ est la longueur d'onde, l'inégalité $\lambda\gg r_D$ est réalisée.

§ 17.3. Son ionique

La distribution maxwellienne d'équilibre s'établit dans le gaz par suite des collisions entre les particules, ce qui explique pourquoi un plasma sans collisions dans lequel le temps de libre parcours moyen des particules est très grand peut se trouver pendant longtemps hors d'équilibre. C'est l'état à deux températures, lorsque la distribution des particules est maxwellienne alors que la température T_e des électrons n'est pas égale à la température T_i des ions, qui peut subsister pendant un temps particulièrement long. Dans les expériences on a généralement $T_e\gg T_i$, c'est-à-dire que les électrons sont chauds, et les ions sont froids. Ceci tient à ce que dans la plupart des méthodes de chauffage du plasma ce sont les électrons qui s'échauffent les premiers et ensuite l'énergie passe progressivement des électrons aux ions. Si nous écrivons les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion pour les collisions entre les particules constitutives du plasma, nous pouvons nous convaincre que l'échan-

ge d'énergie entre les particules de même espèce est m_i/m_e fois plus rapide que celui entre les électrons et les ions (m_e et m_i sont les masses de l'électron et de l'ion). C'est pourquoi la distribution maxwellienne arrive à s'établir le plus vite séparément dans chacun des gaz (électronique et ionique), après quoi les températures T_e et T_i s'égalisent lentement, aussi longtemps que le plasma ne passe pas à l'état d'équilibre total avec une même température pour les électrons et les ions.

Dans un plasma sans collisions constitué par les électrons chauds et les ions froids il existe en plus des oscillations à haute fréquence de Langmuir encore des oscillations à basse fréquence auxquelles participent non seulement les électrons mais également les ions. La vitesse de phase ω/k des oscillations de basse fréquence est beaucoup plus petite que la vitesse thermique des électrons $\langle v_e \rangle = \sqrt{T_e/m_e}$ mais beaucoup plus grande que la vitesse thermique des ions $\langle v_i \rangle = \sqrt{T_i/m_i}$: $\langle v_i \rangle \ll \omega/k \ll \langle v_e \rangle$.

Puisque les oscillations s'effectuent à basse fréquence, les électrons arrivent à chaque instant à « s'accorder » au champ existant à cet instant, c'est-à-dire qu'on peut considérer qu'ils se trouvent à l'état d'équilibre. C'est pourquoi leur densité se détermine par la distribution de Boltzmann: $n_e(\mathbf{r}, t) = n_0 \exp[-e\varphi(\mathbf{r}, t)/T_e]$, où φ est le potentiel du champ. Dans un champ de faible intensité

$$n_e(\mathbf{r}, t) = n_0 [1 - e\varphi(\mathbf{r}, t)/T_e].$$

La grandeur n_0 a évidemment le sens de la densité non perturbée des électrons (égale à la densité non perturbée des ions ; pour simplifier, la charge de l'ion est supposée unitaire). Il en résulte que la perturbation de la densité électronique a pour valeur

$$\delta n_e = -(en_0/T_e)\,\varphi.$$

Déterminons maintenant la perturbation δn_i de la densité ionique. La densité ionique satisfait évidemment à l'équation de continuité

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div} n_i \mathbf{u}_i = 0,$$

où $\mathbf{u}_i$ est la vitesse hydrodynamique des ions satisfaisant à l'équation $d\mathbf{u}_i/dt = \frac{e}{m_i}\operatorname{grad}\varphi$. Si l'amplitude des oscillations est faible et toutes les grandeurs varient suivant la loi $\exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)]$, $\mathbf{u}_i = -e\mathbf{k}\varphi/(m_i\omega)$, ce qui donne pour δn_i

$$\delta n_i = n_0 \mathbf{k}\mathbf{u}_i/\omega = -ek^2 n_0 \varphi/(m_i\omega^2).$$

Reportons-nous maintenant à l'équation de Poisson $\Delta\varphi = -\rho/\varepsilon_0$ et tenons compte que la densité de charge non perturbée est nulle de sorte que $\Delta\varphi = e(\delta n_e - \delta n_i)/\varepsilon_0$. En y introduisant les expressions

obtenues pour δn_e et δn_i et en remarquant que $\Delta\varphi = -k^2\varphi$, nous obtenons

$$-k^2\varphi = \frac{e^2 n_0 \varphi}{\varepsilon_0 T_e}\left(1 - \frac{T_e}{m_i}\frac{k^2}{\omega^2}\right),$$

d'où

$$\omega \equiv \omega_s(k) = \frac{kv_s}{\sqrt{1+k^2r_D^2}}, \quad v_s = \sqrt{\frac{T_e}{m_i}}.$$

Nous avons obtenu des oscillations de fréquence $\omega_s(k)$. Leur vitesse de phase ω_s/k est, comme il a été affirmé, petite par rapport à $\langle v_e \rangle$ parce que $m_e \ll m_i$. Quant à la condition $\omega_s/k \gg \langle v_i \rangle$, elle est réalisée dans le cas d'un plasma fortement hors d'équilibre lorsque $T_e \gg T_i(1 + k^2r_D^2)$. Si cette inégalité n'est pas vérifiée, la vitesse de phase des oscillations est de l'ordre de la vitesse thermique des ions et les oscillations s'amortissent fortement du fait de l'absorption de résonance par les ions (v. § 17.4).

Dans le domaine des ondes longues ($kr_D \ll 1$) ces oscillations se caractérisent par une loi de la dispersion linéaire $\omega_s(k) = kv_s$, ce qui explique le nom de *son ionique* qu'on leur donne, la grandeur v_s étant appelée *vitesse du son ionique*. Dans le domaine des ondes courtes ($kr_D \gg 1$) la fréquence du son ionique est proche de la fréquence de plasma ionique $\omega_i = \sqrt{e^2n_0/(\varepsilon_0 m_i)}$.

Signalons toutefois qu'entre le son ionique et le son ordinaire il existe une différence substantielle. La fréquence du son ordinaire est petite devant la fréquence des collisions ; les oscillations se produisent adiabatiquement et leur vitesse de phase est égale à $\sqrt{\gamma T/m_i}$, où γ est l'indice d'adiabatique. Au contraire, la fréquence des oscillations du son ionique (bien que petite par rapport à celle de Langmuir, ce qui permet de les qualifier d'oscillations à basse fréquence) est grande devant la fréquence des collisions ; de ce fait, ces oscillations se produisent isothermiquement.

§ 17.4. Interaction par résonance entre les ondes et les particules. Amortissement de Landau

Le plasma est, comme tout autre gaz, le siège des collisions entre les particules constitutives. Ces collisions conduisent naturellement à l'amortissement des oscillations des particules et donc à l'amortissement des ondes électromagnétiques se propageant dans le plasma, notamment, des oscillations de Langmuir et des oscillations du son ionique.

Mais les collisions ne sont pas le seul mécanisme à provoquer l'amortissement des oscillations de plasma. Dans un plasma raréfié son rôle est infime alors qu'un rôle prépondérant est joué par un autre mécanisme qui n'intervient pas dans un gaz ordinaire consti-

tué d'atomes neutres. Ce mécanisme agissant dans un plasma sans collisions est l'interaction entre les particules et le champ de l'onde. Cette interaction est particulièrement efficace dans le cas où la vitesse de phase $v_{ph} = \omega(k)/k$ de l'onde est égale (ou presque) à la projection v_k de la vitesse de la particule sur la direction du vecteur d'onde ($v_{ph} = v_k$), c'est-à-dire lorsque

$$\omega(k) = v_k k = \mathbf{kv}.$$

Les particules qui satisfont à cette condition sont dites *de résonance*, et l'interaction de telles particules avec l'onde s'appelle *interaction par résonance*.

Examinons de plus près l'interaction par résonance entre les particules et l'onde de Langmuir $\varphi = \varphi_0 \cos(kx - \omega t)$, où φ est le potentiel de champ de l'onde et φ_0, son amplitude (l'onde se propage le long de l'axe des x). Par suite de cette interaction le champ s'amortit, comme nous allons nous en convaincre, c'est-à-dire que φ_0 varie dans le temps suivant la loi $\exp(-\gamma t)$, où γ est le coefficient d'amortissement, mais cet amortissement est très faible de sorte que nous commencerons par le négliger.

Passons à un système de référence en mouvement à une vitesse égale à la vitesse de phase v_{ph} de l'onde. Dans ce référentiel le champ a la forme $\varphi(x') = \varphi_0 \cos kx'$, où $x' = x - v_{ph}t$ et représente un ensemble de puits et de bosses statiques. Pour les électrons se déplaçant dans un tel champ la loi de conservation de l'énergie donne

$$mv'^2/2 + e\varphi(x') = W = \mathrm{C^{te}},$$

où $v' = (v_k - v_{ph})$ est la projection de la vitesse de la particule sur l'axe des x dans le référentiel considéré.

Cette relation montre comment l'énergie est échangée entre les particules et le champ. Il est clair que pour des particules dont l'énergie cinétique $mv'^2/2$ est considérablement plus grande que l'énergie potentielle $e\varphi_0$, l'échange d'énergie est en moyenne nul. Au contraire, les particules de faible énergie (inférieure ou de l'ordre de grandeur de $e\varphi_0$) sont captées dans un puits de potentiel et interagissent fortement avec le champ. Plus exactement, les particules dont l'interaction avec l'onde est forte sont celles dont la vitesse v_k diffère de v_{ph} d'une quantité inférieure ou de l'ordre de $\Delta v_k \equiv \sqrt{e\varphi_0/m}$. Si dans ce cas $v' > 0$, c'est-à-dire que la particule dépasse l'onde, elle lui cède une partie de son énergie ; si, par contre, $v' < 0$, c'est-à-dire que la particule retarde par rapport à l'onde, elle reçoit de l'énergie de l'onde.

Nous pouvons en conclure que le travail du champ sur les particules se détermine par la différence entre les nombres de particules en avance et en retard par rapport à l'onde. Les vitesses des particules sont proches de la vitesse v_{ph} à la résonance, et comme la

quantité Δv_k est petite, cette différence est proportionnelle à la dérivée par rapport à v_k de la fonction de distribution des électrons pour $v_k = v_{ph}$. A cette même dérivée est proportionnel le décrément d'amortissement de l'onde

$$\gamma \sim -\frac{\partial f}{\partial v_k}\bigg|_{v_k = v_{ph}}.$$

Cette formule importante montre que l'effet résultant de l'interaction par résonance dépend essentiellement du signe de la dérivée de la fonction de distribution pour $v_k = v_{ph}$.

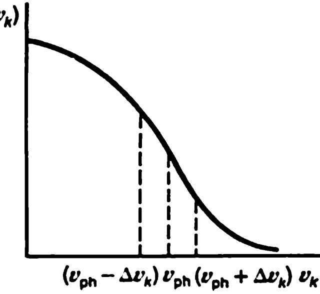


Fig. 17.1. Distribution en vitesse des particules dans le cas des oscillations amorties

Si la fonction de distribution $f(v_k)$ décroît pour $v_k = v_{ph}$, le nombre de particules rapides est inférieur à celui de particules lentes et les oscillations s'amortissent (fig. 17.1). Au contraire, si la distribution des particules est telle que pour $v_k = v_{ph}$ la fonction de distribution s'accroît, le nombre de particules en avance sur l'onde est supérieur à celui des particules en retard par rapport à l'onde, les oscillations du plasma ne s'amortissent pas mais s'intensifient.

Le premier cas se présente, par exemple, dans un plasma en équilibre dont la distribution des électrons est maxwellienne, et le second, lorsqu'un flux de particules chargées passe par un plasma (v. le paragraphe suivant).

L'amortissement qui se produit dans le premier cas s'appelle *amortissement de Landau.* Dans le cas de la distribution maxwellienne des électrons le décrément d'amortissement s'exprime par la formule

$$\gamma_L(k) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\,\frac{\omega_e}{(kr_D)^3}\exp\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}k^2r_D^2\right).$$

Cette formule est valable si $kr_D \ll 1$, alors $\gamma_L \ll \omega_e$.

Dans le cas des oscillations de Langmuir dans un plasma à distribution maxwellienne des électrons pour $v_{ph} \gg v_e \sim \sqrt{T_e/m_e}$, les électrons de résonance appartiennent à la « queue » de la distribution maxwellienne où leur nombre est exponentiellement petit, de sorte que le décrément d'amortissement est lui aussi exponentiellement petit. Lorsque le vecteur d'onde augmente, la vitesse de phase des oscillations de Langmuir diminue, le nombre d'électrons de résonance interagissant effectivement avec l'onde augmente et de ce fait l'amortissement de Landau devient plus fort. Pour $kr_D \sim 1$ la vitesse de phase des oscillations de Langmuir devient égale à la vitesse thermique des électrons et le nombre d'électrons de résonance

se trouve si élevé que le décrément d'amortissement devient de l'ordre de grandeur de la fréquence.

Soulignons que le mécanisme considéré de l'absorption des oscillations par les électrons de résonance se rapporte au cas des champs suffisamment faibles. A savoir, il est nécessaire que pendant le temps

$$\Delta t = (kv_k)^{-1} = [m_e/(ek^2\varphi_0)]^{1/2},$$

au cours duquel la particule captée traverse le puits de potentiel, l'amplitude du champ arrive à s'amortir, c'est-à-dire il est nécessaire que soit vérifiée l'inégalité

$$\gamma\Delta t = \gamma\left(\frac{m_e}{ek^2\varphi_0}\right)^{1/2} \gg 1.$$

En effet, dans le cas contraire, la particule de résonance arrive à effectuer plusieurs oscillations dans le puits de potentiel avant que l'amplitude de champ varie. Si dans une collision avec la « paroi » du puits une telle particule reçoit de l'énergie de la part du champ, au cours de la collision suivante elle cède de l'énergie, etc. Il en résulte que l'échange d'énergie entre les particules de résonance et le champ se trouve fortement ralenti et l'amortissement du champ devient nettement plus faible que dans un champ faible considéré plus haut.

Après l'examen de l'amortissement des oscillations de Langmuir étudions sommairement l'amortissement du son ionique. Bornons-nous à examiner le cas des ondes longues ($kr_D \ll 1$). Le décrément d'amortissement s'exprime alors par la formule $\gamma_s \sim (\partial f/\partial v_k)\,|_{v_k=v_s}$; en y introduisant, au lieu de f, la fonction de distribution maxwellienne, nous obtiendrons $\gamma_s \sim (m_e/m_i)^{1/2}kv_s$. La formule exacte est de la forme

$$\gamma_s = \left(\frac{\pi m_e}{8m_i}\right)^{1/2} kv_s.$$

Nous voyons que dans le cas du son ionique le décrément d'amortissement ne contient pas le petit facteur exponentiel. A la différence des oscillations de Langmuir, les électrons de résonance n'appartiennent plus à la « queue » de la distribution maxwellienne. Néanmoins, la condition de faible amortissement $\gamma \ll \omega$ est satisfaite: $\gamma_s/(kv_s) \sim (m_e/m_i)^{1/2} \ll 1$.

§ 17.5. Instabilité de faisceau

Considérons maintenant le second cas où il existe un intervalle de vitesse dans lequel la fonction de distribution des électrons a une dérivée positive et donc la grandeur γ est négative. Pour $\gamma < 0$ l'amplitude des oscillations s'accroît, de sorte que nous pouvons parler de l'excitation des oscillations. La grandeur $-\gamma = |\gamma|$ est

appelée *incrément de croissance* des oscillations. Comme il a été dit plus haut, une telle situation peut se présenter lorsqu'un faisceau d'électrons (ou d'autres particules chargées) passe par un plasma. Dans le cas le plus simple les électrons du plasma et ceux du faisceau ont des distributions maxwelliennes f et f' et des températures T et T' différentes:

$$f = n_0 \left(\frac{m_e}{2\pi T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_e v^2}{2T}\right), \quad f' = n_0' \left(\frac{m_e}{2\pi T}\right)^{3/2} \exp\left\{\frac{-m_e (\mathbf{v}-\mathbf{u})^2}{2T'}\right\},$$

où n_0 et n_0' sont les densités de particules dans le plasma et le faisceau et $\mathbf{u}$ est la vitesse de mouvement coordonné de l'ensemble des électrons du faisceau. La courbe représentative de la fonction de distribution résultante $f + f'$ est montrée sur la figure 17.2. Il est clair que dans ces conditions l'excitation d'oscillations devient possible. Ce sont les oscillations de Langmuir qui peuvent être excitées, et pour $T_e \gg T_i$, également les oscillations du son ionique.

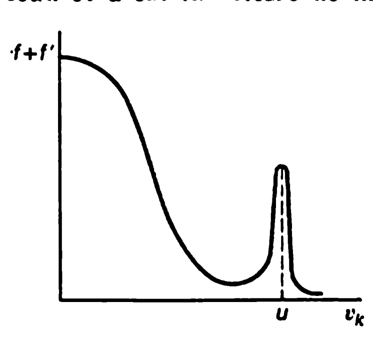


Fig. 17.2. Exemple de distribution non maxwellienne des électrons

Nous supposerons que la densité du faisceau est faible ($n_0' \ll n_0$) et que les électrons du faisceau se caractérisent par une forte dispersion en vitesse (faisceau chaud). Les oscillations de Langmuir sont excitées si $u > \omega_e/k_z$ (l'axe des z est dirigé le long de $\mathbf{u}$). L'incrément de croissance est maximal si $u - v_e' \gg v_e$ (ici, v_e, v_e' sont les vitesses thermiques moyennes des électrons du faisceau et du plasma); ce maximum a pour expression

$$|\gamma| = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \left(\frac{\omega_e'}{kv_e'}\right)^2 \omega_e,$$

où $\omega_e' = \sqrt{e^2 n_0'/(\varepsilon_0 m)}$. Dans ce cas on observe la croissance pratiquement de toutes les oscillations dont le vecteur d'onde est orienté dans le sens de $\mathbf{u}$ ($\cos\theta > 0$, où θ est l'angle formé entre $\mathbf{k}$ et $\mathbf{u}$) et satisfait à l'inégalité $kr_D \ll 1$. Plus exactement, les oscillations croissantes sont celles dont le vecteur d'onde se situe à l'intérieur d'un cône $\theta < \theta_0$ où θ_0 est proche de $\pi/2$. Si la vitesse de l'ensemble des électrons du faisceau diminue, l'angle d'ouverture θ_0 du cône diminue et pour certaine valeur critique de u (égale à plusieurs v_e) l'excitation des oscillations cesse de se produire.

Pour l'excitation des oscillations du son ionique il est nécessaire que la vitesse du faisceau soit supérieure à la vitesse de phase de ces oscillations.

Dans le cas du faisceau chaud que nous venons de considérer chacune des particules de résonance excite des oscillations indépendamment des autres, de sorte que l'incrément se trouve proportionnel à la densité de particules du faisceau. Il n'en est pas de même pour un faisceau froid, monoénergétique, c'est-à-dire pour un faisceau à très faible dispersion en vitesse des électrons. L'incrément de croissance des oscillations de Langmuir se trouve alors proportionnel à $(n_0')^{1/3}$ et non à n_0' (la densité du faisceau est supposée comme précédemment faible). Si de plus $k = \omega_e/u$, il vient

$$|\gamma| = \frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \left(\frac{n_0'}{n_0}\right)^{1/3} \omega_e.$$

Cette formule est valable si $(kv_e'/\omega_e')^2 \ll 1$.

Notons que la croissance des oscillations signifie en fait que le système plasma-faisceau est instable. Une telle instabilité est dite *de faisceau*. Il est clair que la croissance exponentielle des oscillations suivant la loi exp ($|\gamma|\, t$) ne peut pas continuer indéfiniment, sinon l'amplitude des oscillations deviendrait infiniment grande pour $t \to \infty$. Cela signifie que pour des valeurs suffisamment grandes de t nos formules deviennent inapplicables parce qu'elles ont été obtenues sous l'hypothèse de faible perturbation (de petitesse du champ et de petitesse des écarts de la densité des particules par rapport à celle d'équilibre) ou, comme on dit encore, dans le cadre de la théorie linéaire. Aussi, pour mettre en évidence le comportement du système plasma-faisceau pour $t \to \infty$, faut-il se guider d'une théorie essentiellement non linéaire, c'est-à-dire tenant compte des processus non linéaires.

Le plus simple parmi les processus non linéaires est la réaction des oscillations du plasma sur la partie non oscillante de la fonction de distribution des particules qui ne sera plus celle d'équilibre, c'est-à-dire maxwellienne. L'amplitude des oscillations est supposée encore petite, de sorte que l'interaction des ondes, l'une avec l'autre, est négligée. Une telle théorie, qui tient compte de l'action des oscillations sur la partie non oscillante de la fonction de distribution mais suppose valable le principe de superposition des oscillations, porte le nom de théorie *quasi linéaire.*

L'amplitude des oscillations étant supposée suffisamment petite, la théorie quasi linéaire ne considère en fait que l'influence des oscillations du plasma sur la distribution des particules de résonance, c'est-à-dire des particules dont la projection de la vitesse w sur la direction de propagation est proche de la vitesse de phase de l'onde $w \sim \omega/k = v_{ph}$. Ce sont ces particules qui sont responsables tant de l'amortissement des oscillations que de leur croissance parce qu'elles interagissent fortement avec les oscillations du plasma. Les particules non résonnantes n'échangent en moyenne aucune énergie avec les ondes, ce qui permet de considérer que leur

distribution n'est pas affectée par les oscillations du plasma. La partie non oscillante de la fonction de distribution $\bar{f}$ se définit par la moyenne de la fonction de distribution f sur les phases d'oscillations: $\bar{f} = \langle f \rangle$. Cette fonction ne coïncide pas avec la fonction d'équilibre, elle dépend du temps, mais sa variation dans le temps est très lente. En intégrant $\bar{f}$ sur les projections de la vitesse perpendiculaires à **k**, nous obtenons la distribution des particules $\bar{f}(w, t)$ sur w à l'instant t. La dérivée de cette fonction par rapport à w détermine l'incrément de croissance des oscillations à l'instant t

$$\gamma(t) \sim -(\partial\bar{f}/\partial w)_{w=v_{\text{ph}}}.$$

Conformément à la théorie quasi linéaire cette dérivée diminue lentement tout le temps, c'est-à-dire que la fonction $\bar{f}$ s'aplatit pour $w = v_{\text{ph}}$. Il en résulte que la courbe représentative de cette fonction comporte une partie rectiligne avec $\partial\bar{f}/\partial w = 0$ ou, comme on dit, un plateau, l'échange d'énergie entre les particules et les ondes cesse de se produire et l'incrément de croissance des oscillations s'annule.

Le phénomène d'instabilité de faisceau s'observe aussi dans un plasma à deux températures parcouru par un courant. Les ions, possédant une forte masse, peuvent être considérés dans ce cas comme étant au repos. Nous nous bornerons à considérer des oscillations du son ionique de grande longueur d'onde ($kr_{\text{D}} \ll 1$). Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, la vitesse de phase v_{ph} de telles oscillations est indépendante du vecteur d'onde et coïncide avec la vitesse v_s du son ionique. Si **u** est la vitesse moyenne de l'ensemble des électrons, $\partial f/\partial w > 0$ dans l'intervalle de vitesse $0 < w < u$; cela signifie que si $u > v_s$, les oscillations du son ionique s'accroissent. L'incrément de croissance est de la forme

$$|\gamma| = \left(\frac{\pi m_e}{8m_i}\right)^{1/2} k(u\cos\theta - v_s),$$

où θ est l'angle entre **k** et **u**. Nous voyons que les oscillations qui croissent sont celles dont les vecteurs d'onde se situent à l'intérieur d'un cône d'angle d'ouverture θ tel que $\cos\theta = v_s/u$.

§ 17.6. Oscillations du plasma dans un champ magnétique

Passons maintenant à l'étude des oscillations du plasma dans un champ magnétique qui sera supposé constant et uniforme. De même que dans les paragraphes précédents, le plasma est supposé sans collisions, c'est-à-dire que les fréquences de ses oscillations sont très supérieures à la fréquence de collisions. En outre, nous supposons que le plasma est froid, c'est-à-dire que nous négligeons l'agitation thermique des particules. Dans ce cas les vitesses $\mathbf{v}_\alpha$ des

particules constitutives du plasma ($\alpha = e$ pour les électrons et $\alpha = i$ pour les ions) satisfont, en tant que fonctions des coordonnées et du temps, aux équations

$$\frac{d_\alpha \mathbf{v}_\alpha}{dt} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha}(\mathbf{E} + [\mathbf{v}_\alpha(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B})]),$$

où e_α et m_α sont la charge et la masse de la particule de l'espèce α, $\mathbf{B}_0$ est l'induction du champ magnétique extérieur constant, $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ sont l'intensité du champ électrique et l'induction magnétique qui résultent des oscillations et d_α/dt est la dérivée totale par rapport au temps qui tient compte du mouvement des particules de l'espèce α (elle s'exprime par la formule $d_\alpha/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v}_\alpha\nabla$; v. § 17.7). En plus de $\mathbf{v}_\alpha$ il faut encore connaître la densité n_α de particules qui satisfait à l'équation de continuité

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(n_\alpha \mathbf{v}_\alpha) = 0.$$

La densité n_α peut être mise sous la forme $n_\alpha = n_0 + n'_\alpha$, où n_0 est la densité des particules à l'état d'équilibre et n'_α la partie variable de la densité liée aux oscillations (nous admettons pour simplifier que $e_i = -e_e$; il est évident que dans ce cas la densité d'équilibre est la même pour les électrons et pour les ions).

Nous nous bornerons à étudier les oscillations de faible amplitude (oscillations linéaires) et donc négligerons les termes quadratiques en grandeurs $[\mathbf{v}_\alpha\mathbf{B}]$, $(\mathbf{v}_\alpha\nabla)\,\mathbf{v}_\alpha$, $\mathbf{v}_\alpha n'_\alpha$, si bien que les équations de mouvement linéarisées prennent la forme

$$\frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial t} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha}(\mathbf{E} + [\mathbf{v}_\alpha \mathbf{B}_0]), \qquad \frac{\partial n'_\alpha}{\partial t} + n_0 \operatorname{div} \mathbf{v}_\alpha = 0.$$

Cherchons une solution de ces équations sous forme d'ondes planes $\exp\{i(\mathbf{kr} - \omega t)\}$. A cet effet, récrivons ces équations sous la forme

$$i\omega \mathbf{v}_\alpha + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\mathbf{E} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}[\mathbf{v}_\alpha \mathbf{B}_0] = 0, \quad n'_\alpha = n_0 \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha}{\omega}.$$

Il résulte de la première de ces équations que

$$v_{\alpha x} = \frac{e_\alpha (i\omega E_x - \omega_{B\alpha} E_y)}{m_\alpha(\omega^2 - \omega_{B\alpha}^2)}, \quad v_{\alpha y} = \frac{e_\alpha (i\omega E_y + \omega_{B\alpha} E_x)}{m_\alpha(\omega^2 - \omega_{B\alpha}^2)}, \quad v_{\alpha z} = \frac{i e_\alpha E_z}{m_\alpha \omega},$$

où $\omega_{B\alpha} = e_\alpha B_0/m_\alpha$ est la fréquence cyclotronique (gyrofréquence) des particules de l'espèce α (l'axe des z étant choisi dans la direction de $\mathbf{B}_0$).

Si l'on calcule $\mathbf{v}_\alpha$ et n'_α, on peut déterminer les densités de courant et de charge $\mathbf{j} = e_e n_0 (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i)$, $\rho = e_e(n'_e - n'_i)$ et intro-

duire les valeurs obtenues dans les équations de Maxwell:

$$\text{rot}\,\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t, \quad \text{div}\,\mathbf{B} = 0,$$

$$\mu_0^{-1}\,\text{rot}\,\mathbf{B} = \varepsilon_0\partial\mathbf{E}/\partial t + \mathbf{j}, \quad \varepsilon_0\,\text{div}\,\mathbf{E} = \rho.$$

Pour les ondes planes monochromatiques ces équations prendront la forme

$$[\mathbf{kE}] = \omega\mathbf{B}, \quad \mu_0^{-1}\,[\mathbf{kB}]_i = -\varepsilon_0\omega\varepsilon_{ij}E_j.$$

Ici, la sommation se fait sur l'indice $j = 1, 2, 3$ et ε_{ij} désigne la matrice

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & i\varepsilon_2 & 0 \\ -i\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

de composantes

$$\varepsilon_1 = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - \omega_{B\alpha}^2},$$

$$\varepsilon_2 = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2\omega_{B\alpha}}{\omega(\omega^2 - \omega_{B\alpha}^2)},$$

$$\varepsilon_3 = 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2},$$

où $\omega_{p\alpha}^2 = e^2n_0/(\varepsilon_0 m_\alpha)$. La matrice ε_{ij} représente le *tenseur diélectrique du plasma* dans le champ magnétique (on dit dans ce cas que le plasma est *magnétiquement actif*). Pour $\mathbf{B}_0 = 0$ nous obtenons $\varepsilon_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_3$ et serons conduits (en négligeant $1/m_i$ par rapport à $1/m_e$) aux formules établies au § 17.2.

Il s'agit maintenant de faire disparaître **B** dans les équations de Maxwell et d'écrire la condition de solubilité du système d'équations homogènes obtenues pour les composantes de **E**. Nous obtiendrons alors

$$\Lambda \equiv \det \Lambda_{ij} = 0, \quad \Lambda_{ij} = N^2\left(\frac{k_ik_j}{k^2} - \delta_{ij}\right) + \varepsilon_{ij},$$

où $N = ck/\omega$ est l'indice de réfraction. En introduisant ε_{ij}, nous trouverons

$$AN^4 + BN^2 + C = 0;$$

$$A = \varepsilon_1 \sin^2\theta + \varepsilon_3\cos^2\theta; \quad B = -\varepsilon_1\varepsilon_3(1+\cos^2\theta) - (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)\sin^2\theta;$$

$$C = \varepsilon_3(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2),$$

où θ est l'angle que font entre eux **k** et $\mathbf{B}_0$. La relation ainsi obtenue traduit l'*équation* dite *de dispersion* qui lie les fréquences des oscilla-

tions possibles d'un plasma magnétiquement actif au vecteur d'onde. En nous donnant **k**, nous obtiendrons cinq fréquences $\omega_\nu(k)$, $\nu = 1, 2, 3, 4, 5$, ce qui signifie que dans un plasma froid magnétiquement actif (l'agitation thermique des particules étant négligée) il existe cinq branches d'oscillations à haute fréquence.

C'est seulement dans certains cas limites qu'on réussit à représenter la fonction $\omega_\nu(k)$ sous une forme explicite. Nous ne nous arrêterons ici qu'aux ondes longitudinales lorsque le champ **E** est parallèle à **k**. Dans ce cas l'équation de dispersion devient $A = 0$.

Pour $\mathbf{B}_0 = 0$ les oscillations longitudinales sont représentées par les oscillations de Langmuir ou oscillations de plasma. C'est pourquoi, pour $\mathbf{B}_0 \neq 0$ également, les oscillations aux fréquences déterminées par la condition $A = 0$ sont appelées elles aussi oscillations longitudinales du plasma dans le champ magnétique, et les fréquences elles-mêmes sont appelées *résonances de plasma* ou *résonances hybrides* (parce que ces fréquences sont des combinaisons de fréquence de plasma et de fréquence cyclotronique).

L'équation de dispersion pour ces résonances est de la forme

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\cos^2\theta - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{Be}^2}\sin^2\theta - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2}\cos^2\theta - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{Bi}^2}\sin^2\theta = 0.$$

Cette équation cubique par rapport à ω^2 détermine trois fréquences de résonance $\omega_\infty^{(j)}(\theta)$ ($j = 1, 2, 3$) (l'indice ∞ signifie que pour $k \to \infty$ ce sont des fréquences propres).

Si l'on néglige la contribution des ions (par suite de la petitesse du rapport m_e/m_i), les fréquences $\omega_\infty^{(1,2)}$ seront données par les formules

$$\omega_\infty^{(1,\,2)}(\theta) = \left[\frac{1}{2}(\omega_{pe}^2 + \omega_{Be}^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_{pe}^2 + \omega_{Be}^2)^2 - 4\omega_{pe}^2\omega_{Be}^2\cos^2\theta}\right]^{1/2}$$

(les signes « + » et « — » correspondent à $j = 1$ et $j = 2$). Quant à la troisième fréquence $\omega_\infty^{(3)}(\theta)$, elle dépend de la contribution des ions. Si $\omega = \omega_{Bi}$, nous avons

$$\omega_\infty^{(3)}(\theta) = \omega_{Bi}\left(1 - \frac{m_e}{2m_i}\operatorname{tg}^2\theta\right).$$

Les courbes de variation des fréquences de résonance hybride en fonction de l'angle θ sont représentées par la figure 17.3 (max (a, b) et min (a, b) sont la plus grande et la plus petite des quantités a, b).

§ 17.7. Mouvement magnétohydrodynamique

Considérons maintenant des mouvements lents du plasma. Si les temps caractéristiques de tels mouvements (par exemple, les périodes d'oscillations) sont grands par rapport au temps de libre parcours moyen des particules, le plasma ne diffère en rien d'un liquide

ordinaire ou d'un gaz et se décrit comme eux par des équations hydrodynamiques. La spécificité du plasma (qui l'apparente d'ailleurs à des liquides tels que le mercure) se manifeste dans un champ magnétique extérieur et est liée à ce que le plasma est un bon conducteur de l'électricité. C'est pourquoi, dans ce qui suit, nous utilisons pour plus de généralité, au lieu du terme de *plasma* celui de *fluide conducteur*.

Rappelons que si p est la pression du fluide, son volume unité est soumis de la part du fluide environnant à une force égale à $-\nabla p$.

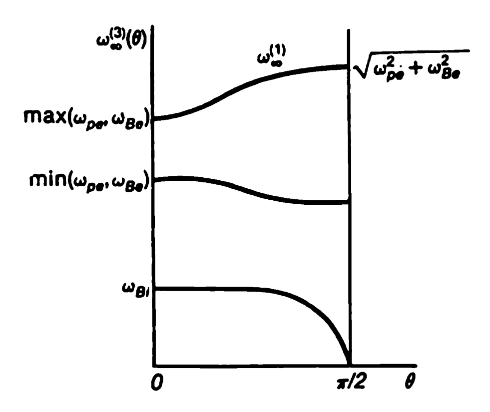


Fig. 17.3. Variation des fréquences des oscillations longitudinales du plasma dans un champ magnétique en fonction de l'angle θ

Si le fluide est placé dans un champ magnétique extérieur, il faut ajouter à cette force la force magnétique $[\mathbf{jB}]$. La masse de l'unité de volume de fluide est évidemment sa densité ρ, si bien que

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + [\mathbf{jB}]$$

(remarquons que dans la partie précédente de ce chapitre on entend par ρ la densité de charge et seulement au cours de deux derniers paragraphes la densité de masse!). Ici, $\mathbf{v}$ est la vitesse d'une particule déterminée de fluide. Mais pour décrire le mouvement d'un fluide il est plus commode de ne pas considérer ses particules distinctes mais d'introduire un champ de vitesses $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Ce faisant, on entend par $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ la vitesse de toute particule de fluide passant à un instant t par un point $\mathbf{r}$ de l'espace et non la vitesse d'une particule déterminée. Dans cette méthode de description du mouvement (on l'appelle *méthode d'Euler* à la différence de la *méthode de Lagrange* qui décrit une particule prise isolément) l'accélération $d\mathbf{v}/dt$ est évidemment égale à $\partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$. En effet, commençons par examiner un champ de vitesses stationnaire lorsque $\partial\mathbf{v}/\partial t = 0$.

Dans un tel champ, si la vitesse au point $\mathbf{r}$ est égale à $\mathbf{v}$ et nous suivons une particule déterminée, il faut tenir compte du fait qu'au bout du temps dt cette particule se trouvera au point $\mathbf{r} + d\mathbf{r} = \mathbf{r} + \mathbf{v}dt$ où le champ de vitesses a pour valeur $\mathbf{v}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = \mathbf{v}(\mathbf{r}) + (d\mathbf{r}\nabla)\mathbf{v}$; la variation de vitesse d'une particule déterminée sera donc égale à $(d\mathbf{r}\nabla)\mathbf{v}$; en divisant cette grandeur par dt, nous obtenons $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$. Si le champ n'est pas stationnaire, il convient d'ajouter $\partial\mathbf{v}/\partial t$ à cette expression. Ainsi,

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{\rho}[\mathbf{jB}].$$

Il est évident que les grandeurs $\mathbf{v}$ et ρ entrant dans l'équation de mouvement hydrodynamique doivent satisfaire à l'équation de continuité

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0,$$

qui exprime la loi de conservation de la masse du fluide.

Reportons-nous maintenant aux grandeurs $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$ qui déterminent le champ électromagnétique dans le fluide. Elles doivent satisfaire aux équations de Maxwell

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j}.$$

Ici, on peut entendre par $\mathbf{j}$ le courant de conduction, en négligeant le courant de déplacement

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}^* = \sigma(\mathbf{E} + [\mathbf{vB}]),$$

où σ est la conductivité électrique et $\mathbf{E}^*$, l'intensité du champ électrique dans un système de référence lié à l'élément en mouvement du fluide. En supposant la conductivité du milieu très élevée, on peut considérer que le champ $\mathbf{E}^* = \mathbf{j}/\sigma$ est nul et donc

$$\mathbf{E} = -[\mathbf{vB}].$$

La première équation de Maxwell prend maintenant la forme

$$\partial\mathbf{B}/\partial t = \operatorname{rot}[\mathbf{vB}].$$

En introduisant $\mathbf{j} = \operatorname{rot}\mathbf{H}$ dans l'équation de mouvement hydrodynamique, nous obtenons

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \frac{1}{\rho}[\mathbf{B}\operatorname{rot}\mathbf{H}].$$

C'est cette équation, jointe à la première équation de Maxwell écrite plus haut, qui détermine la vitesse de mouvement et le champ magnétique dans le milieu.

Il résulte de la première équation que si l'on prend une surface fluide quelconque, c'est-à-dire une surface formée par des particules du milieu, le flux magnétique à travers cette surface ne varie pas

lors du mouvement des particules. En effet, en désignant une telle surface par Σ, nous obtiendrons

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Sigma}\mathbf{B}\,d\mathbf{s}=\int\limits_{\Sigma}\operatorname{rot}[\mathbf{vB}]\,d\mathbf{s}=\int\limits_{L}[\mathbf{vB}]\,d\mathbf{l},$$

où L est le contour sur lequel s'appuie Σ (la dernière égalité est écrite sur la base de la formule de Stokes). Mais $d\mathbf{l} \parallel \mathbf{v}$, ce qui signifie que la dernière expression est nulle et donc

$$\Phi\equiv\int\limits_{\Sigma}\mathbf{B}\,d\mathbf{s}=\mathrm{C^{te}}.$$

Puis, envisageons deux surfaces fluides sur lesquelles à un certain instant $B_n = 0$ ($\mathbf{n}$ est la direction de la normale à la surface). Cette égalité se conservera à tous les autres instants suivants. La ligne d'intersection de ces surfaces est de toute évidence une ligne de force magnétique et puisque la ligne d'intersection des surfaces fluides est une ligne fluide, nous en arrivons à cette conclusion que les lignes de force magnétique sont fixées à des lignes fluides. C'est pour cette raison qu'on parle de la *congélation des lignes de force magnétique.*

Si l'on considère un élément de tube de force fluide suffisamment mince, sa longueur et l'aire de la section Δs varieront avec le temps, mais le flux magnétique restera inchangé, c'est-à-dire que

$$B\Delta s = B_0\Delta s_0$$

(l'indice 0 désigne les valeurs initiales). D'un autre côté, la masse de fluide contenu dans l'élément de tube restera elle aussi inchangée, c'est-à-dire que

$$\rho\Delta s\,\Delta l = \rho_0\,\Delta s_0\,\Delta l_0$$

(Δl, Δl_0, ρ, ρ_0 sont les éléments de longueur du tube et les valeurs de la densité du fluide à l'instant considéré et à l'instant initial). En divisant la première des égalités écrites ci-dessus par la seconde, nous obtenons

$$\frac{B}{\rho\,\Delta l}=\frac{B_0}{\rho_0\,\Delta l_0}=\mathrm{C^{te}}.$$

Ainsi, la grandeur B/ρ varie proportionnellement à la longueur de l'élément de ligne de force magnétique. Si le fluide est incompressible, l'induction magnétique varie proportionnellement à la « dilatation » des lignes de force.

§ 17.8. Ondes magnétohydrodynamiques

On sait qu'une perturbation de densité produite en un endroit quelconque du fluide ne se localise pas en cet endroit mais se propage sous forme d'onde qui est une onde sonore longitudinale dont

le carré de la vitesse v_s est égal à la dérivée adiabatique de la pression par rapport à la densité : $v_s^2 = (\mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho)_S$.

Dans un fluide conducteur, placé dans un champ magnétique, les ondes sonores subissent une modification : il apparaît deux branches des ondes magnétosonores ayant des vitesses différentes dépendant du champ magnétique appliqué. En outre, il apparaît une troisième branche d'oscillations, transversale, non liée à la variation de densité du milieu. On l'appelle *onde d'Alfven* (en l'honneur du savant qui l'a découverte) ; la vitesse de cette onde se détermine par le champ magnétique (et par la densité du milieu). Toutes ces trois ondes sont dites *magnétohydrodynamiques*.

Pour mettre en évidence l'origine de ces ondes et déterminer leurs vitesses reportons-nous aux équations qui décrivent le mouvement magnétohydrodynamique en y posant $\rho = \rho_0 + \rho'$, $p = p_0 + p'$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mu_0\mathbf{h}$, où ρ_0, p_0, $\mathbf{B}_0$ sont les valeurs constantes, indépendantes des coordonnées, des grandeurs correspondant à l'état d'équilibre du milieu et ρ', p', $\mathbf{h}$ sont de petits termes correctifs décrivant la perturbation. La vitesse $\mathbf{v}$ du mouvement qui en résulte est elle aussi faible, si bien qu'en linéarisant les équations, nous avons

$$\rho_0 \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = -\nabla p' + [\mathrm{rot}\,\mathbf{h}\mathbf{B}_0],$$

$$\rho_0 \,\mathrm{div}\,\mathbf{v} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,[\mathbf{v}\mathbf{B}_0].$$

Pour obtenir un système d'équations fermé il nous reste à trouver p'. La pression d'un fluide est fonction de la densité et de la température. Dans l'onde sonore, les variations de densité se produisent rapidement (en ce sens que l'échange de chaleur entre les différents éléments de fluide n'a pas le temps de s'effectuer), en d'autres termes, la perturbation se produit adiabatiquement. Ceci signifie que $p' = (\mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho)_S\rho'$, où $(\mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho)_S = v_s^2$ (l'indice S signifie que la dérivée est prise à l'entropie constante ; remarquons qu'au cours de ce paragraphe v_s désigne la vitesse du son ordinaire et non ionique). En tenant compte de cette relation, nous obtenons sept équations linéaires pour la détermination de sept inconnues : ρ', $\mathbf{v}$, $\mathbf{h}$.

Signalons que ces mêmes équations peuvent être utilisées non seulement pour la description d'un plasma avec collisions mais également pour celle d'un plasma sans collisions à deux températures. Dans ce dernier cas les équations feront intervenir, au lieu de la vitesse ordinaire du son, la vitesse du son ionique isotherme, non adiabatique (de même que dans le paragraphe consacré au son ionique).

Cherchons des solutions de nos équations sous la forme d'ondes planes monochromatiques. Il vient

$$\omega\rho_0\mathbf{v} = v_s^2\mathbf{k}\rho' + [\mathbf{B}_0[\mathbf{k}\mathbf{h}]] ;$$

$$-\rho_0\mathbf{k}\mathbf{v} + \omega\rho' = 0 ; \quad -\omega h = -\mu_0^{-1}[\mathbf{k}[\mathbf{v}\mathbf{B}_0]].$$

En faisant usage de la formule $[\mathbf{a}\,[\mathbf{bc}]] = \mathbf{b}\,(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{ab})$, récrivons ces équations sous la forme

$$\omega\rho_0\mathbf{v} = v_s^2\mathbf{k}\rho' + \frac{1}{\omega\mu_0}\{\mathbf{k}B_0^2\,(\mathbf{kv}) - \mathbf{k}\,(\mathbf{B}_0\mathbf{v})\,(\mathbf{kB}_0) + \mathbf{v}\,(\mathbf{kB}_0)^2 - \mathbf{B}_0\,(\mathbf{kv})\,(\mathbf{kB}_0)\},$$

$$\rho_0\,\mathbf{kv} = \omega\rho', \quad \mu_0\omega\mathbf{h} = -\mathbf{v}\,(\mathbf{kB}_0) + \mathbf{B}_0\,(\mathbf{kv}).$$

Suivant la dernière équation, $\mathbf{kh} = 0$, c'est-à-dire que l'oscillation du champ magnétique est transversale.

En multipliant la première équation scalairement d'abord par $\mathbf{B}_0$ et ensuite par $\mathbf{k}$ et en utilisant la deuxième équation, nous obtenons

$$\omega^2\,(\mathbf{B}_0\mathbf{v}) = v_s^2\,(\mathbf{kB}_0)\,(\mathbf{kv}),$$

$$\omega\rho_0\,(\mathbf{kv}) = v_s^2k^2\rho_0\frac{(\mathbf{kv})}{\omega} + \frac{(\mathbf{kv})}{\mu_0\omega}\left\{k^2B_0^2 - \frac{k^2v_s^2}{\omega^2}\,(\mathbf{kB}_0)^2\right\}.$$

Il résulte de la deuxième équation que si $B_0 = 0$, $\omega = kv_s$, c'est-à-dire qu'il apparaît, comme il fallait s'y attendre, une onde sonore ordinaire.

Lorsque $\mathbf{B}_0 \neq 0$, deux cas peuvent se présenter : $\rho' \neq 0$ et $\rho' = 0$. Dans le premier cas lorsqu'il apparaît une onde de densité, $\mathbf{kv} \neq 0$ si bien que la deuxième des relations écrites peut être simplifiée par $\mathbf{kv}$. Il en résulte

$$\omega^2 = v_s^2k^2 + \frac{1}{\mu_0\rho_0}\left\{B_0^2k^2 - v_s^2\,\frac{k^2}{\omega^2}\,(\mathbf{kB}_0)^2\right\},$$

d'où

$$v^4 - v_s^2v^2 - v_A^2\,(v^2 - v_s^2\cos^2\theta) = 0,$$

où $v = \omega/k$, θ est l'angle entre $\mathbf{k}$ et $\mathbf{B}_0$ et $v_A^2 = B_0^2/(\mu_0\rho_0)$. Le sens de la grandeur v_A sera expliqué un peu plus loin.

L'équation quadratique obtenue pour v^2 possède deux racines:

$$v_\pm^2 = \frac{1}{2}\,\{v_s^2 + v_A^2 \pm \sqrt{(v_s^2 + v_A^2)^2 - 4v_s^2v_A^2\cos^2\theta}\}.$$

L'onde ayant la vitesse de phase v_+ est dite *magnétosonore rapide*, et l'onde de vitesse de phase v_- est *magnétosonore lente*. Pour $\mathbf{B}_0 = 0$, l'onde magnétosonore rapide se transforme en onde sonore ordinaire, alors que l'onde magnétosonore lente disparaît.

Considérons maintenant le cas de $\rho' = 0$. D'après l'équation de continuité, dans ce cas $\mathbf{kv} = 0$. De la relation $\omega^2\,(\mathbf{B}_0\mathbf{v}) = v_s^2(\mathbf{kB}_0)\,(\mathbf{kv})$ il s'ensuit que $(\mathbf{B}_0\mathbf{v}) = 0$. En d'autres termes, pour $\rho' = 0$ la vitesse du fluide est perpendiculaire tant au vecteur d'onde $\mathbf{k}$ qu'au vecteur $\mathbf{B}_0$. Les équations pour $\mathbf{v}$ et $\mathbf{h}$ prennent la forme

$$\omega\rho_0\mathbf{v} = \frac{1}{\mu_0\omega}\,(\mathbf{kB}_0)^2\,\mathbf{v}\,; \quad \mu_0\omega\mathbf{h} = -\mathbf{v}\,(\mathbf{kB}_0).$$

Les équations obtenues possèdent des solutions non triviales si

$$\omega = kv_A \cos\theta, \quad v_A = B_0/\sqrt{\mu_0\rho_0}.$$

Cette branche d'oscillations magnétohydrodynamiques est appelée *onde d'Alfven*, et la grandeur v_A est la *vitesse d'Alfven*. Notons que dans l'onde d'Alfven $\mathbf{h} = -\mathbf{v}/\sqrt{\mu_0\rho_0}$, de sorte que $\frac{1}{2}\mu_0 h^2 = \frac{1}{2}\rho_0 v^2$; autrement dit, *la densité d'énergie magnétique est égale à la densité d'énergie cinétique du fluide.*

FORMULES FONDAMENTALES

Equation de Vlassov	$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m_e}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0$
Permittivité électrique du plasma (en haute fréquence)	$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \frac{\omega_e^2}{\omega^2}\left(1 + \frac{3Tk^2}{m_e\omega^2}\right)$, $\omega_e = \sqrt{e^2 n_0/(\varepsilon_0 m_e)}$
Loi de dispersion des oscillations de plasma	$\omega = \omega_e\left(1 + \frac{3}{2} r_D^2 k^2\right)$, $r_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 T}{e^2 n_0}}$
Décrément d'amortissement de Landau	$\gamma_L = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\frac{\omega_e}{(kr_D)^3}\exp\left\{-\frac{3}{2} + \frac{1}{2k^2r_D^2}\right\}$
Fréquence du son ionique dans le plasma	$\omega_s(k) = \frac{kv_s}{\sqrt{1+k^2r_D^2}}$, $v_s = \sqrt{\frac{T_e}{m_i}}$
Fréquences de résonance hybride	$\omega^{(1,2)}(\theta) = \left[\frac{1}{2}(\omega_{pe}^2 + \omega_{Be}^2) \pm \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_{pe}^2+\omega_{Be}^2)^2 - 4\omega_{pe}^2\omega_{Be}^2\cos^2\theta}\right]^{1/2}$
Fréquence de l'onde d'Alfven	$\omega_A = kv_A\cos\theta$, $v_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0\rho_0}}$
Vitesses des ondes magnétosonores rapide et lente	$v_\pm^2 = \frac{1}{2}\{v_s^2 + v_A^2 \pm \pm \sqrt{(v_s^2+v_A^2)^2 - 4v_s^2v_A^2\cos^2\theta}\}$

CHAPITRE 18

OPTIQUE DES CRISTAUX

§ 18.1. Tenseur diélectrique

En examinant les ondes électromagnétiques dans les milieux matériels, nous avons supposé jusqu'ici que le milieu était isotrope, c'est-à-dire qu'il avait des propriétés physiques uniformes dans toutes les directions. Les liquides, les gaz, le plasma (en l'absence de champs extérieurs) sont des milieux isotropes, mais les corps solides cristallins ne le sont pas:

les cristaux ont les propriétés physiques qui varient suivant la direction ou, comme on dit, sont des corps anisotropes.

En passant à l'étude des ondes électromagnétiques dans les milieux anisotropes, nous supposerons comme précédemment que les inductions et les intensités des champs sont liées entre elles par des relations linéaires. Mais dans un milieu anisotrope les inductions ne sont pas nécessairement parallèles aux intensités correspondantes. Cela signifie que

la permittivité électrique et la perméabilité magnétique des milieux anisotropes ne sont plus des grandeurs scalaires, elles sont des grandeurs tensorielles.

Mais de même que dans le cas isotrope, elles dépendent en général tant de la fréquence que du vecteur d'onde (dispersions temporelle et spatiale). Nous concluons de là que par rapport aux ondes électromagnétiques les propriétés d'un milieu isotrope se caractérisent par deux tenseurs, c'est-à-dire par dix-huit fonctions ordinaires, scalaires: $\varepsilon_{ij} \equiv \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ et $\mu_{ij} \equiv \mu_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ ($i, j = 1, 2, 3$ ou $i, j = x, y, z$), à l'aide desquels les inductions s'expriment par les intensités des champs

$$D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} E_j, \quad B_i = \mu_0 \mu_{ij} H_j$$

(rappelons qu'avec une telle écriture la sommation se fait sur des indices qui se répètent ; un tenseur à deux indices est appelé *tenseur d'ordre deux*).

Dans ce chapitre vont être étudiées des milieux anisotropes par rapport aux propriétés électriques mais non magnétiques vu que c'est précisément dans cette catégorie de corps que se rangent la plu-

part des cristaux. Autrement dit, nous admettrons que $\mathbf{B} = \mu_0\mu\mathbf{H}$, où μ est une fonction ordinaire (scalaire) de ω et $\mathbf{k}$, c'est-à-dire que $\mu_{ij} = \mu\delta_{ij}$.

L'anisotropie des propriétés électriques (de même que magnétiques) est loin d'être propre à tous les cristaux. En effet, si le cristal présente une symétrie cubique, il est impossible de construire pour lui un tenseur d'ordre deux non proportionnel au tenseur unitaire δ_{ij}. C'est pourquoi par ses propriétés électromagnétiques un cristal cubique ne diffère en rien des liquides et des gaz, c'est-à-dire que pour lui $\varepsilon_{ij} = \varepsilon\delta_{ij}$.

La densité de flux d'énergie du champ dans un milieu anisotrope se détermine par la même formule que dans un milieu isotrope: $\mathbf{S} = [\mathbf{EH}]$. Pour la densité d'énergie W et sa variation en 1 s, c'est-à-dire la chaleur dégagée Q, dans le cas d'un milieu isotrope, sont valables les formules

$$W = \frac{\varepsilon_0}{4}\frac{d}{d\omega}(\omega\varepsilon_{ij})E_i^*E_j, \qquad Q = \frac{i\varepsilon_0\omega}{2}(\varepsilon_{ij}^* - \varepsilon_{ji})E_iE_j^*,$$

qui sont analogues aux formules applicables aux milieux isotropes (v. § 16.6; pour simplifier, nous omettons l'énergie magnétique). La formule donnant W est valable pour un milieu transparent ou presque transparent.

Comme nous l'avons vu, la permittivité électrique et la perméabilité magnétique d'un milieu isotrope transparent sont des grandeurs réelles. Pour des milieux anisotropes la condition de transparence prend une forme plus compliquée $\varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ij}^*$ et ne signifie plus que toutes les composantes du tenseur diélectrique sont réelles. En effet, écrivons ε_{ij} sous la forme $\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} + i\varepsilon''_{ij}$, où ε', ε'' sont deux tenseurs réels. Alors, pour un milieu transparent

$$\varepsilon'_{ji} = \varepsilon'_{ij}, \quad \varepsilon''_{ji} = -\varepsilon''_{ij}.$$

Le vecteur $\varepsilon''_{ij}E_j$ peut être représenté par un produit vectoriel $\varepsilon''_{ij}E_j = [\mathbf{Eg}]_i$, où $\mathbf{g}$ est un certain vecteur (axial), $g_i = \varepsilon_{ijl}\varepsilon''_{jl}$ (ε_{ijl} est un tenseur unitaire antisymétrique). Le vecteur $\mathbf{g}$ est appelé *vecteur giration*, et les milieux pour lesquels il est non nul sont dits *gyrotropes*. Il est évident que dans un milieu gyrotrope

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}' + i\varepsilon_0[\mathbf{Eg}], \quad D'_i = \varepsilon_0\varepsilon'_{ij}E_j.$$

La plupart des cristaux ne sont pas gyrotropes en l'absence de champ magnétique. Dans ce chapitre, nous ne considérons que de tels cristaux, l'étude de la gyrotropie étant réservée pour le chapitre suivant. Aussi, en nous bornant à examiner les cristaux transparents, considérons-nous que le tenseur est réel et symétrique.

Pour tout tenseur symétrique d'ordre 2 on peut choisir trois directions perpendiculaires l'une à l'autre de telle sorte que si les axes de coordonnées x, y, z sont dirigés le long de ces directions, le

tenseur prend une forme diagonale

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & & \\ & \varepsilon_y & \\ & & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

(les éléments non écrits sont nuls). Dans le cas du tenseur ε_{ij} de telles directions s'appellent *axes diélectriques principaux*, et les grandeurs ε_x, ε_y, ε_z sont les *permittivités principales du cristal*. Pour un cristal cubique, toutes les trois permittivités principales coïncident, et le choix des axes est arbitraire. Pour un cristal uniaxial il y a deux permittivités principales qui coïncident, par exemple $\varepsilon_x = \varepsilon_y$, et le choix des axes correspondants n'est limité que par l'exigence qu'ils se situent dans le plan de base (plan xy). Dans un cristal biaxial toutes les trois permittivités principales sont différentes et le choix des axes principaux n'est plus arbitraire. Il est évident que

les axes principaux, et eux seuls, possèdent cette propriété remarquable que si le champ est dirigé le long d'un d'eux, l'induction est parallèle au champ, comme dans le cas isotrope.

Notons que la variation de la fréquence peut entraîner non seulement la variation des permittivités électriques principales mais également celle de la direction des axes principaux ; dans ce cas on dit que l'on a affaire à la *dispersion d'axes*. La dispersion d'axes peut se produire dans des cristaux biaxiaux de certains systèmes.

§ 18.2. Vitesse de phase et vecteur de rayon

Considérons une onde plane monochromatique se propageant dans un milieu anisotrope transparent. Si ω est la fréquence de cette onde et $\mathbf{k}$ son vecteur d'onde, les équations de Maxwell peuvent s'écrire de toute évidence sous la forme

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0\omega}[\mathbf{kE}], \quad \mathbf{D} = -\frac{1}{\omega}[\mathbf{kH}], \quad \mathbf{kD} = \mathbf{kH} = 0.$$

Suivant ces équations, les trois vecteurs $\mathbf{k}$, $\mathbf{D}$ et $\mathbf{H}$ sont perpendiculaires entre eux. Puis, au vecteur $\mathbf{H}$ sont perpendiculaires $\mathbf{E}$ et le vecteur de Poynting $\mathbf{S} = [\mathbf{EH}]$. Mais si quatre vecteurs $\mathbf{k}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{S}$ sont perpendiculaires à $\mathbf{H}$, cela signifie qu'ils sont tous dans un même plan. Dans ce plan $\mathbf{E} \perp \mathbf{S}$ et $\mathbf{D} \perp \mathbf{k}$, de sorte que l'angle formé par $\mathbf{E}$ et $\mathbf{D}$ est égal à l'angle que font entre eux les vecteurs $\mathbf{S}$ et $\mathbf{k}$ (l'angle α de la figure 18.1 qui illustre la position relative des cinq vecteurs considérés). Ecrivons le vecteur $\mathbf{k}$ sous la forme

$$\mathbf{k} = (\omega/c)\,\mathbf{N}.$$

Cette relation rappelle la relation scalaire $k = (\omega/c)\,N$ valable pour le cas isotrope, ce qui explique pourquoi on convient de donner à la

grandeur **N** le nom d'*indice de réfraction vectoriel* (bien que maintenant ni son module, ni ses composantes n'aient pas, à la différence des milieux isotropes, de rapport direct à la loi de la réfraction). La vitesse de phase v_{ph} de l'onde, c'est-à-dire la vitesse de déplacement de la surface sur laquelle est constante la phase $\varphi = \mathbf{kr} - \omega t$, est dirigée le long de **k** et est égale en module à ω/k. En faisant usage du vecteur **N**, on peut la représenter sous la forme $\mathbf{v}_{\text{ph}} = c\mathbf{N}/N^2$.

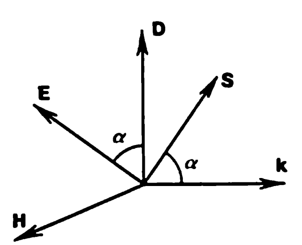


Fig. 18.1. Position relative des vecteurs **E**, **D**, **H**, **k**, **S**

Cherchons maintenant la relation entre la fréquence de l'onde et le vecteur d'onde ou, ce qui revient au même, déterminons le vecteur **N**. A cet effet, introduisons l'expression de **H** dans l'équation de **D**. En développant le produit vectoriel double, nous obtenons

$$\varepsilon_0^{-1}\mathbf{D} = N^2\mathbf{E} - \mathbf{N}(\mathbf{NE}).$$

D'un autre côté, $\varepsilon_0^{-1}D_i = \varepsilon_{ij}E_j$. En égalant entre elles les deux expressions de **D**, nous obtenons un système d'équations

$$(N^2\delta_{ij} - N_iN_j - \varepsilon_{ij})\, E_j = 0.$$

Ce système comporte des solutions non triviales si son déterminant est nul. Ainsi, l'équation pour la détermination de **N** est de la forme

$$\det (N^2\delta_{ij} - N_iN_j - \varepsilon_{ij}) = 0.$$

Ce déterminant est facile à développer dans un système de coordonnées lié aux axes diélectriques principaux:

$$N^2 (\varepsilon_x N_x^2 + \varepsilon_y N_y^2 + \varepsilon_z N_z^2) - [N_x^2\varepsilon_x (\varepsilon_y + \varepsilon_z) + \\ + N_y^2\varepsilon_y (\varepsilon_z + \varepsilon_x) + N_z^2\varepsilon_z (\varepsilon_x + \varepsilon_y)] + \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z = 0.$$

La relation obtenue, appelée *équation de Fresnel*, est une des équations fondamentales de l'optique des milieux cristallins. Elle définit ω comme une fonction implicite de **k**. Mais ce problème est très difficile à résoudre à cause de la dispersion des permittivités principales, et dans le cas des cristaux biaxiaux de certains systèmes, encore à cause de la dispersion d'axes possible. Un problème plus simple est le suivant: trouver le nombre d'onde pour une fréquence donnée et une direction de propagation donnée de l'onde. Avec un tel énoncé du problème l'équation de Fresnel est une équation quadratique par rapport à N^2 et donc par rapport à $k^2 = \left(\frac{\omega}{c} N\right)^2$. Elle a en général deux racines différentes qui correspondent, comme nous allons le voir, à deux polarisations différentes de l'onde dans un plan. En effet, considérons le vecteur **D** qui est perpendiculaire à **N**. Puisque la direction de **N** est donnée, nous nous intéressons à deux

projections de **D** perpendiculaires à **N** que nous désignerons par D_x et D_y (l'axe des z est choisi le long de **N**). Comme il résulte de l'équation $\varepsilon_0^{-1}\mathbf{D} = N^2\mathbf{E} - \mathbf{N}\,(\mathbf{EN})$, elles sont liées à **E** par la relation $\varepsilon_0^{-1}\mathbf{D}_i = N^2E_i$ $(i = x,\ y)$, et puisque $\varepsilon_0 E_i = \eta_{ij}D_j$, où $\eta_{ij} = (\varepsilon^{-1})_{ij}$ est un tenseur inverse de ε_{ij} (c'est-à-dire que $\eta_{ik}\varepsilon_{kj} = \delta_{ij}$), il vient

$$D_i = N^2\eta_{ij}D_j.$$

Pour que cette équation possède des solutions non triviales il faut que soit accomplie la condition

$$\det\,(\delta_{ij}/N^2 - \eta_{ij}) = 0 \quad (i,\ j = x,\ y).$$

Cette relation est une équation quadratique par rapport à N^2 qui a en général deux racines différentes $N^2_{1,2}$. A ces racines correspondent deux vecteurs induction électrique différents $\mathbf{D}^{(1)}$ et $\mathbf{D}^{(2)}$. Ces vecteurs sont, comme le montre le problème de la détermination des valeurs propres et des vecteurs propres d'une matrice, orthogonaux l'un à l'autre. Ceci nous conduit à une conclusion importante :

dans un milieu anisotrope une onde plane monochromatique ne peut être polarisée que rectilignement.



Rappelons que

dans un milieu isotrope une onde plane monochromatique a, dans le cas général, une polarisation elliptique.

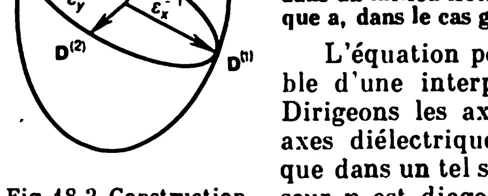
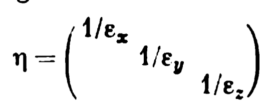


Fig. 18.2. Construction géométrique pour déterminer les directions de la polarisation

L'équation pour le vecteur **D** est susceptible d'une interprétation géométrique simple. Dirigeons les axes de coordonnées le long des axes diélectriques principaux ; il est évident que dans un tel système de coordonnées le tenseur η est diagonal et a la forme



$$\eta = \begin{pmatrix} 1/\varepsilon_x & & \\ & 1/\varepsilon_y & \\ & & 1/\varepsilon_z \end{pmatrix}$$

(ses autres composantes sont nulles). Puis, construisons un ellipsoïde dont les axes sont orientés suivant les axes diélectriques principaux et sont égaux à $1/\varepsilon_x$, $1/\varepsilon_y$, $1/\varepsilon_z$ (fig. 18.2). Coupons cet ellipsoïde par un plan passant par son centre et perpendiculaire à la direction de **N**. Nous obtiendrons alors une ellipse dont les longueurs et les directions des axes principaux déterminent les valeurs de **N** et les directions des polarisations, c'est-à-dire les orientations des vecteurs $\mathbf{D}^{(1)}$ et $\mathbf{D}^{(2)}$.

Introduisons en plus du vecteur **N** encore un vecteur important caractérisant l'onde dans un milieu anisotrope, à savoir le vecteur **s** dont le sens est celui du vecteur de Poynting ou du vecteur vitesse de groupe et dont la longueur se détermine par la relation

$$\mathbf{Ns} = Ns\cos\alpha = 1$$

(α étant l'angle formé entre **N** et **s**). Ce vecteur porte le nom de *vecteur de rayon*. Le vecteur de Poynting étant perpendiculaire à **E** et **H**, nous avons

$$\mathbf{sE} = \mathbf{sH} = 0.$$

On peut montrer par un calcul direct que

$$\mathbf{H} = c\,[\mathbf{sD}], \quad \mathbf{E} = -c\mu_0\,[\mathbf{sH}].$$

Ces quatre relations rappellent, du point de vue formel, quatre équations de Maxwell si l'on écrit ces dernières sous la forme

$$\mathbf{ND} = \mathbf{NH} = 0, \quad c\mu_0\mathbf{H} = [\mathbf{NE}], \quad c\mathbf{D} = -[\mathbf{NH}].$$

Si nous tenons compte de l'analogie qui existe entre les équations $D_i = \varepsilon_0\varepsilon_{ij}E_j$ et $\varepsilon_0 E_i = \eta_{ij}D_j$, nous serons conduits à une conclusion utile qui facilite beaucoup de nombreux calculs et constructions géométriques, à savoir: si une équation quelconque est valable, une relation obtenue à partir de cette équation à l'aide de changements

$$\varepsilon_0\mathbf{E} \to \mathbf{D}, \quad \mathbf{D} \to \varepsilon_0\mathbf{E}, \quad \mathbf{N} \to \mathbf{s}, \quad \mathbf{s} \to \mathbf{N}, \quad \varepsilon_{ij} \to \eta_{ij}, \quad \eta_{ij} \to \varepsilon_{ij}$$

est elle aussi valable. Cette règle permet en particulier de simplifier la construction géométrique permettant d'obtenir la direction des polarisations du vecteur **E**. A cet effet, il convient de construire un ellipsoïde dont les axes principaux sont dirigés suivant les axes diélectriques principaux et égaux respectivement à ε_x, ε_y, ε_z (*ellipsoïde de Fresnel*) et de le couper par un plan perpendiculaire au vecteur de rayon **s**. La section de l'ellipsoïde sera une ellipse; alors deux polarisations indépendantes admissibles du vecteur **E** seront déterminées par les directions des axes principaux de cette ellipse.

§ 18.3. Cristaux uniaxiaux et biaxiaux

Ainsi que nous l'avons dit plus haut, dans les cristaux de système cubique toutes les trois permittivités principales sont les mêmes; par leurs propriétés optiques de tels cristaux ne diffèrent en rien des milieux isotropes. Si un cristal présente une symétrie telle que deux de trois permittivités principales sont les mêmes, il est dit *uniaxial*. Dans ce cas un des axes diélectriques principaux se confond avec l'axe de symétrie du cristal (axe des z); on l'appelle *axe optique* du cristal. Les deux autres axes sont deux directions quelconques, orthogonales entre elles, situées dans le plan de base du cristal (plan x, y). Un cristal uniaxial est dit *positif* si $\varepsilon_z > \varepsilon_\perp$, où $\varepsilon_\perp = \varepsilon_x = \varepsilon_y$, et *négatif* si $\varepsilon_z < \varepsilon_\perp$.

Introduisons $\varepsilon_x = \varepsilon_y \equiv \varepsilon_\perp$ dans l'équation de Fresnel. Elle se sépare alors en deux équations indépendantes:

$$N^2 = \varepsilon_\perp; \quad \frac{N_z^2}{\varepsilon_\perp} + \frac{N_x^2 + N_y^2}{\varepsilon_z} = 1.$$

En utilisant l'analogie entre **N** et **s** énoncée au paragraphe précédent, nous pouvons écrire immédiatement les équations pour le vecteur de rayon:

$$s^2 = 1/\varepsilon_\perp, \quad \varepsilon_\perp s_z^2 + \varepsilon_z (s_x^2 + s_y^2) = 1.$$

Construisons les surfaces de vecteurs d'onde et de vecteurs de rayon (c'est-à-dire les surfaces sur lesquelles peuvent se situer, pour une valeur donnée de la fréquence, les extrémités des vecteurs **N** et **s**

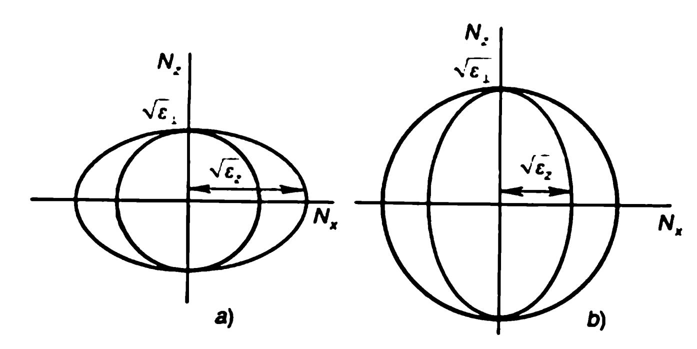


Fig. 18.3. Surface des vecteurs d'onde (cristaux uniaxiaux positifs (*a*) et négatifs (*b*))

respectivement). Chacune de ces surfaces se sépare en deux parties: une sphère et un ellipsoïde de révolution (fig. 18.3, *a* et *b* sur lesquelles sont représentées les sections longitudinales de la surface de vecteurs d'onde pour des cristaux positifs et négatifs). Nous voyons que la sphère et l'ellipsoïde sont tangents l'une à l'autre en deux points (pôles) situés sur l'axe optique.

Il résulte des équations pour N et s que l'une des ondes correspondant à la fréquence donnée se propage indépendamment de l'orientation de **k** avec un nombre d'onde $k = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon_\perp}$ et dans cette onde **s** ∥ **N**. En d'autres termes, cette onde ne diffère en rien d'une onde polarisée rectilignement dans un milieu isotrope, ce qui explique le nom d'onde *ordinaire* qu'on lui donne.

Quant à la seconde onde (dite *extraordinaire*), son vecteur d'onde dépend de l'angle θ qu'il fait avec l'axe optique:

$$\frac{1}{N^2} = \frac{\sin^2\theta}{\varepsilon_z} + \frac{\cos^2\theta}{\varepsilon_\perp}.$$

Le vecteur de rayon de l'onde extraordinaire se situe dans le plan de la *section* dite *principale* appartenant à **N** donné, c'est-à-dire dans le plan passant par l'axe optique et le vecteur **N**. Il fait avec l'axe optique un angle θ' qui est lié à l'angle θ par une relation

simple

$$\operatorname{tg}\theta' = \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_\perp}\operatorname{tg}\theta.$$

Ainsi, dans une onde extraordinaire, les directions de **N** et s ne sont confondues que dans les cas où l'onde se propage le long de l'axe ($\theta = \theta' = 0$) ou perpendiculairement à cet axe. La direction observée du rayon se détermine par le vecteur s (et non par **N**).

Examinons maintenant la polarisation des ondes ordinaire et extraordinaire. Remarquons à cet effet que pour toute onde quatre vecteurs **E**, **D**, s et **N** sont dans un même plan. Dans une onde extraordinaire les vecteurs s et **N** ont des directions différentes, mais ils se situent tous les deux dans le plan de la section principale et de ce fait les vecteurs **E** et **D** appartiennent eux aussi à ce plan. Puis, les vecteurs **E** (de même que les vecteurs **D**) de deux ondes polarisées indépendamment l'une de l'autre sont perpendiculaires entre eux. Par conséquent, dans une onde ordinaire les vecteurs **E** et **D** se situent dans un plan perpendiculaire à la section principale.

Toutes les particularités qui distinguent les ondes dans un cristal uniaxial des ondes se propageant dans un milieu isotrope disparaissent si l'onde se propage suivant l'axe optique. Dans ce cas, l'onde extraordinaire ne diffère pas de l'onde ordinaire, de sorte que l'onde plane monochromatique est non nécessairement polarisée rectilignement mais en général elliptiquement.

La réfraction d'une onde (tombant sur le cristal suivant une direction autre que celle de l'axe optique z) donne lieu à l'apparition dans le cristal de deux ondes (ordinaire et extraordinaire) dont les vecteurs d'onde ne sont pas égaux. Si nous tenons compte du fait que la fréquence et la composante tangentielle de **k** se conservent sur la surface du cristal, nous devons conclure qu'un rayon incident se dédouble en deux rayons: ordinaire et extraordinaire, qui se propagent sous un angle l'un par rapport à l'autre. Ce phénomène est connu sous le nom de *biréfringence*. (A noter que la direction observée du rayon étant s et non **N**, cette direction se situe dans le cas général en dehors du plan d'incidence.)

Le phénomène de biréfringence est à la base de nombreux appareils d'optique. Leur idée principale consiste en ce que ce phénomène permet de séparer dans l'espace deux rayons possédant des polarisations rectilignes différentes (d'ailleurs connues). Le plus connu de ces appareils est le prisme *de Nicol* (Nicol, 1828). On le fait le plus souvent en cristal de spath d'Islande en forme d'un rhomboèdre que l'on coupe suivant la diagonale et colle avec du baume de Canada (la marche des rayons dans le prisme de Nicol est montrée sur la figure 18.4). Les angles du rhomboèdre sont choisis de telle sorte que sur la frontière du baume de Canada le rayon ordinaire subisse une réflexion interne totale, alors que le rayon extraordinaire passe

librement à travers le prisme. Ceci est possible à réaliser parce que l'indice de réfraction du baume de Canada ($N = 1{,}53$) est inférieur à l'indice de réfraction du spath d'Islande pour l'onde ordinaire ($N = 1{,}66$) mais supérieur à son indice de réfraction pour l'onde extraordinaire (la géométrie du prisme est telle que pour l'onde extraordinaire $N = 1{,}49$).

Le prisme de Nicol (ou un autre dispositif) qui ne laisse passer que la lumière de polarisation donnée est appelé *polariseur*. Tout dispositif de ce type peut servir d'*analyseur* de lumière polarisée rectilignement. Si, en faisant tourner un prisme analyseur autour d'un axe longitudinal (par rapport à la direction du rayon lumineux), on constate que dans une position quelconque il ne laisse pas passer la lumière, cela signifie que la lumière à analyser est totalement polarisée et son vecteur **D** est perpendiculaire à la section principale du prisme analyseur. C'est à l'aide de dispositifs de ce type qu'on a mis en évidence la transversalité des ondes lumineuses par rapport aux vecteurs électriques (Young, 1817 ; Fresnel, 1819).

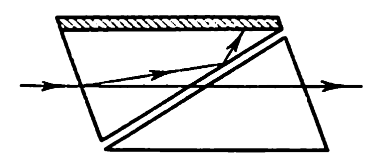


Fig. 18.4. Marche des rayons dans le prisme de Nicol

Etudions encore, sommairement, les *cristaux biaxiaux*. Pour eux $\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$, de sorte que la détermination de leurs propriétés optiques exige d'étudier sous la forme générale l'équation de Fresnel et les autres relations obtenues au § 18.1. Les formules qui en résultent sont bien encombrantes et nous ne les indiquons pas. Il est cependant clair a priori que dans les cristaux biaxiaux eux aussi il se produit une biréfringence, mais qu'à la différence des cristaux uniaxiaux les deux ondes réfractées sont ici extraordinaires.

De l'équation de Fresnel il résulte que dans des conditions déterminées le rayon lumineux dans un milieu cristallin peut se partager en une multitude de rayons se propageant sur la surface d'un certain cône. Ce phénomène s'appelle *réfraction conique* ou, plus exactement, *réfraction interne conique* (il a été prévu pour des raisons théoriques par Hamilton en 1832 et découvert expérimentalement la même année). Pour comprendre pourquoi il se produit, remarquons que le tenseur diélectrique ε_{ik} et son inverse, le tenseur $(\varepsilon^{-1})_{ik}$ sont représentables sous la forme

$$\varepsilon_{ik} = a\delta_{ik} + b\,(g_i^{(1)}g_k^{(2)} + g_k^{(1)}g_i^{(2)})\;;$$
$$(\varepsilon^{-1})_{ik} = c\delta_{ik} + d\,(h_i^{(1)}h_k^{(2)} + h_k^{(1)}h_i^{(2)}),$$

où a, b, c, d sont des scalaires et $g_i^{(1)}$, $g_i^{(2)}$, $h_i^{(1)}$, $h_i^{(2)}$ les vecteurs unitaires qui peuvent dépendre tant de ω que de **k**. Les vecteurs $g_i^{(1)}$ et $g_i^{(2)}$ s'appellent *biradiales* ou *axes optiques de première espèce*, et les vecteurs $h_i^{(1)}$ et $h_i^{(2)}$, *binormales* ou *axes optiques de deuxième espèce*.

Reportons-nous maintenant à l'équation de Fresnel

$$|\omega^2\varepsilon_{ij}+k_ik_j-k^2\delta_{ij}|=0.$$

En utilisant les expressions de ε_{ij} et $(\varepsilon^{-1})_{ij}$ indiquées plus haut et en développant le déterminant, nous obtenons une équation quadratique par rapport à ω^2 dont la solution est de la forme

$$\omega^2 = ck^2 + d\,([\mathbf{kh}^{(1)}]\,[\mathbf{kh}^{(2)}] \pm |[\mathbf{kh}^{(1)}]|\,|[\mathbf{kh}^{(2)}]|)$$

(les signes « $\pm$ » correspondent aux différentes polarisations de l'onde).

Supposons, pour simplifier, que c, d et $\mathbf{h}^{(1)}$, $\mathbf{h}^{(2)}$ sont des constantes indépendantes de ω et $\mathbf{k}$ et calculons sous cette hypothèse la vitesse de groupe $\mathbf{v}_g = d\omega/d\mathbf{k}$, il vient:

$$\mathbf{v}_g = c\mathbf{v} - \frac{1}{2}\Big\{[\mathbf{h}^{(1)}[\mathbf{h}^{(2)}\mathbf{v}]]+[\mathbf{h}^{(2)}[\mathbf{h}^{(1)}\mathbf{v}]] \pm$$
$$\pm\left(|[\mathbf{h}^{(1)}\mathbf{v}]|\,\frac{[\mathbf{h}^{(2)}[\mathbf{h}^{(1)}\mathbf{v}]]}{|[\mathbf{h}^{(2)}\mathbf{v}]|}+|[\mathbf{h}^{(2)}\mathbf{v}]|\,\frac{[\mathbf{h}^{(1)}[\mathbf{h}^{(2)}\mathbf{v}]]}{|[\mathbf{h}^{(1)}\mathbf{v}]|}\right)\Big\},$$

où $\mathbf{v} = \mathbf{k}/\omega$. Nous voyons que si le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ est orienté suivant une quelconque des binormales, le dénominateur et le numérateur d'une des fractions entrant dans l'expression de $\mathbf{v}_g$ s'annulent.

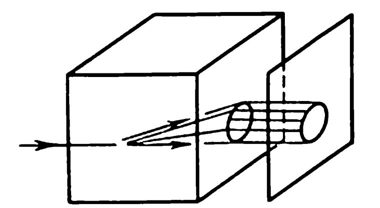


Fig. 18.5. Réfraction conique interne

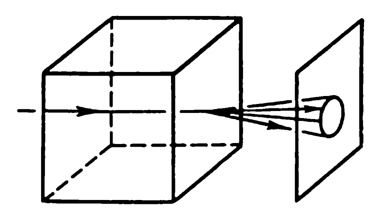


Fig. 18.6. Réfraction conique externe

Pour pouvoir lever cette indétermination, supposons que le vecteur $\mathbf{k}$ n'est pas dirigé exactement suivant une binormale, par exemple $\mathbf{h}^{(1)}$, mais comporte une composante infiniment petite $\delta\mathbf{k}_\perp$ perpendiculaire à $\mathbf{h}^{(1)}$. On peut alors montrer que le vecteur $\mathbf{v}_g$ s'exprime par la formule

$$\mathbf{v}_g = c\mathbf{v} - \frac{d}{2}\,|\sin\varphi|\,\mathbf{v}\left(\frac{\mathbf{h}_\perp^{(2)}}{|\mathbf{h}_\perp^{(2)}|} \mp \frac{\delta\mathbf{v}_\perp}{|\delta\mathbf{v}_\perp|}\right),$$

où φ est l'angle formé entre les binormales et $\mathbf{h}_\perp^{(2)}$, une composante de $\mathbf{h}^{(2)}$ perpendiculaire à $\mathbf{h}^{(1)}$.

Nous voyons que la composante infiniment petite $\delta\mathbf{k}_\perp$ a une influence finie sur la vitesse de groupe $\mathbf{v}_g$. C'est précisément pour cette raison que le rayon entrant dans le cristal suivant la binormale $\mathbf{h}^{(1)}$ se divise et se propage suivant les génératrices d'un cône dont

les dimensions et la position sont déterminées par la formule indiquée plus haut pour v_g. C'est ainsi que se manifeste le phénomène de *réfraction interne conique* (fig. 18.5).

Signalons qu'il existe encore un phénomène de *réfraction externe* qui consiste en ce qu'un rayon se propageant dans un cristal suivant une des binormales se divise, à la sortie du cristal, en plusieurs rayons qui suivent les génératrices d'un cône (fig. 18.6).

§ 18.4. Anisotropie artificielle

Si un corps initialement isotrope subit une déformation, il s'y forme une direction privilégiée et le corps acquiert les propriétés d'un cristal uniaxial, y compris la propriété de biréfringence. Ce phénomène découvert par Seebeck (1813) et Brewster (1815) est largement utilisé pour l'observation des contraintes dans les pièces faites en verre ordinaire ou organique, notamment, des contraintes résiduelles qui se manifestent par suite d'un refroidissement insuffisamment lent du verre. A cet effet, on enregistre généralement la différence entre les chemins des rayons ordinaire et extraordinaire. Comme toujours, elle est maximale pour la lumière tombant perpendiculairement à l'axe optique, c'est-à-dire à la direction privilégiée dans l'échantillon. La différence de marche est naturellement proportionnelle à la contrainte et à la longueur du parcours de la lumière dans le corps ; le coefficient de proportionnalité, qui dépend de la nature de la substance, de la fréquence de la lumière et de la température, peut être positif ou négatif.

Bien entendu, si on déforme un cristal uniaxial en lui faisant subir un effort dans une direction autre que celle de l'axe optique, il acquiert les propriétés d'un cristal biaxial.

Un autre procédé permettant de produire une anisotropie dans un milieu initialement isotrope, que l'on utilise dans le cas des suspensions liquides et des solutions colloïdales, est basé sur le fait que si l'on fait s'écouler une telle suspension, les orientations des particules en suspension se trouvent ordonnées. Le degré de leur ordonnancement et donc l'anisotropie qui en résulte sont proportionnels aux gradients de vitesse. Cet effet découvert par Maxwell (1873) permet, lors de l'étude des courants de fluides rencontrant des obstacles, d'obtenir des informations sur le sens et la valeur du gradient de vitesse.

Une anisotropie effective se produit également dans un corps initialement isotrope, par exemple dans un liquide, si ce corps est placé dans un champ électrique uniforme et constant $\mathbf{E}^{(0)}$ (*effet Kerr électrique*, 1875). L'effet Kerr dans un corps initialement optiquement isotrope varie comme le carré de l'intensité du champ $\mathbf{E}^{(0)}$. Pour sa description on peut partir de l'expression suivante du

tenseur diélectrique

$$\varepsilon_{ij} = (\varepsilon + AE^{(0)2})\,\delta_{ij} + BE_i^{(0)}E_j^{(0)},$$

où ε est la permittivité électrique en l'absence du champ $\mathbf{E}^{(0)}$ et A, B sont des constantes dépendant de la substance, de la température et de la fréquence de la lumière incidente.

L'axe optique du milieu uniaxial qui en résulte (axe des z) se confond évidemment avec la direction de l'intensité du champ électrique $\mathbf{E}^{(0)}$, de sorte que dans un tel milieu la biréfringence est maximale pour la lumière tombant perpendiculairement à l'intensité du champ électrique constant. Dans ce cas, comme nous avons vu au paragraphe précédent, l'indice de réfraction de l'onde ordinaire $N_0 = \sqrt{\varepsilon_\perp}$, et celui de l'onde extraordinaire $N_e = \sqrt{\varepsilon_z}$. Aussi, la différence de marche des rayons sur un parcours l a-t-elle pour valeur

$$\delta = l\,[\sqrt{\varepsilon + (A+B)(E^{(0)})^2} - \sqrt{\varepsilon + A\,(E^{(0)})^2}\,] \approx Bl\,(E^{(0)})^2/(2\sqrt{\varepsilon}).$$

En introduisant au lieu de la différence de marche le déphasage $\varphi = k\delta$ (k étant le vecteur d'onde), mettons-le sous la forme

$$\varphi = 2\pi Kl\,(E^{(0)})^2.$$

Le coefficient K, lié à B par la relation $K = B/(4\pi\sqrt{\varepsilon_0})$, s'appelle *constante de Kerr*.

L'ordre de grandeur de la constante de Kerr et son signe dépendent de la nature de la substance. Par exemple, $K = 2\cdot 10^{-5}$ pour le nitrobenzène et $K = 5\cdot 10^{-7}$ pour l'eau (en unités CGS).

L'effet Kerr trouve des applications dans plusieurs appareils servant à la modulation électro-optique et à la déflexion de la lumière.

Dans un champ magnétique uniforme et constant H^0 il se produit l'*effet Cotton-Mouton* tout à fait analogue à l'effet Kerr. Toutes les relations qui décrivent cet effet se déduisent des relations correspondantes valables pour l'effet Kerr, en effectuant le changement $E^{(0)} \to H^0$. La constante caractérisant l'effet Cotton-Mouton est très petite, par exemple pour le nitrobenzène $K = 2{,}5\cdot 10^{-12}$ (en unités e.m. CGS). Cela signifie que pour $H^0 = 3{,}4$ kŒ et une couche de nitrobenzène épaisse de 1 cm, la différence de marche entre les rayons ordinaire et extraordinaire sera égale à $2{,}8\cdot 10^{-2}$ de longueur d'onde.

FORMULES FONDAMENTALES

Relations entre les inductions et les intensités des champs dans un milieu anisotrope	$D_i = \varepsilon_0\varepsilon_{ij}E_j,\quad B_i = \mu_0\mu_{ij}H_j$

Vecteur de giration	$g_i = \varepsilon_{ijl}\varepsilon''_{jl}$. $\mathbf{D} = \mathbf{D}' + i\varepsilon_0 [\mathbf{Eg}]$. $D'_i = \varepsilon_0 \varepsilon'_{ij} E_j$
Onde plane monochromatique dans un milieu anisotrope	$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0\omega}[\mathbf{kE}]$, $\mathbf{D} = -\frac{1}{\omega}[\mathbf{kH}]$
Vecteur de Poynting et indice de réfraction vectoriel	$\mathbf{S} = [\mathbf{EH}]$, $\mathbf{N} = \frac{c}{\omega}\mathbf{k}$
Vitesse de phase	$\mathbf{v}_{\mathrm{ph}} = c\mathbf{N}/N^2$
Vecteur de rayon	$\mathbf{s} \parallel \mathbf{S}$, $\mathbf{sN} = 1$, $\mathbf{H} = c[\mathbf{sD}]$, $\mathbf{E} = -\mu_0 c [\mathbf{sH}]$
Equation de Fresnel	$N^2(\varepsilon_x N_x^2 + \varepsilon_y N_y^2 + \varepsilon_z N_z^2) - [N_x^2\varepsilon_x(\varepsilon_y + \varepsilon_z) + N_y^2\varepsilon_y(\varepsilon_z + \varepsilon_x) + N_z^2\varepsilon_z(\varepsilon_x + \varepsilon_y)] + \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z = 0$
Equations de Fresnel pour un cristal uniaxial	$N^2 = \varepsilon_\perp$, $\frac{N_z^2}{\varepsilon_\perp} + \frac{N_x^2 + N_y^2}{\varepsilon_z} = 1$
Nombre d'onde pour une onde ordinaire	$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_\perp}$
Equation d'une onde extraordinaire	$\frac{\omega^2}{c^2k^2} = \frac{\sin^2\theta}{\varepsilon_z} + \frac{\cos^2\theta}{\varepsilon_\perp}$
Effet Kerr	$\varepsilon_{ij} = (\varepsilon + AE_0^2)\,\delta_{ij} + BE_{0i}E_{0j}$

CHAPITRE 19

OSCILLATIONS DES MILIEUX GYROTROPES

§ 19.1. Vecteur de giration

Comme il a été montré au § 18.1, dans le cas d'un milieu transparent (non absorbant) la relation entre l'induction électrique et l'intensité du champ peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}' + i\varepsilon_0 [\mathbf{E}\mathbf{g}],$$

où $\varepsilon_0^{-1} D'_i = \varepsilon'_{ij} E'_j$, ε'_{ij} est un tenseur symétrique réel ($\varepsilon'_{ij} = \varepsilon'_{ji}$) et $\mathbf{g}$, un vecteur axial appelé *vecteur de giration*. Jusqu'ici nous avons examiné les milieux dont $\mathbf{g} = 0$. La plupart des liquides, des gaz et des cristaux sont, en l'absence de champ magnétique extérieur, précisément des milieux de ce type. En passant maintenant à l'étude des milieux gyrotropes, commençons par déterminer le sens physique du vecteur de giration.

Pour plus de simplicité, nous admettrons qu'en plus de la gyrotropie le milieu ne présente aucune anisotropie électrique, c'est-à-dire que

$$\varepsilon_0^{-1}\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} + i [\mathbf{E}\mathbf{g}],$$

où ε est la permittivité électrique scalaire ; c'est le cas des liquides, des gaz, du plasma et des cristaux de système cubique.

Ainsi que nous l'avons vu au § 18.2, dans le cas d'une onde plane monochromatique se propageant dans un milieu isotrope de $\mathbf{g} = 0$, les vecteurs $\mathbf{D}$ et $\mathbf{E}$ sont liés entre eux par la relation

$$\varepsilon_0^{-1}\mathbf{D} = \mathbf{E}N^2 - \mathbf{N}(\mathbf{N}\mathbf{E}), \quad \mathbf{N} = \mathbf{k}c/\omega.$$

Considérons le cas d'une faible gyrotropie lorsque $|\mathbf{g}| \ll \varepsilon$ et donc utilisons toujours cette dernière relation conjointement avec la relation

$$\varepsilon_0\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{D} + \frac{1}{\varepsilon^2}[\mathbf{g}\mathbf{D}],$$

qui est valable, comme il est aisé de le voir, pour $|\mathbf{g}| \ll \varepsilon$.

La condition de compatibilité de ces relations (à la même approximation, c'est-à-dire pour $g \ll \varepsilon$) a la forme suivante :

$$N = N_\pm, \quad N_\pm = N_0 \pm \frac{1}{2N_0} g \cos\theta.$$

où $N_0 = \sqrt{\varepsilon}$ et θ est l'angle que font entre eux les vecteurs **g** et **N**. A chacune de ces deux valeurs de N correspond sa propre polarisation de l'onde, à savoir

$$D_x^{(\pm)} = \pm\, iD_y^{(\pm)}$$

(l'axe des z est dirigé suivant **N**; le signe est le même que celui du second membre de l'expression donnant N). Nous voyons que dans un milieu gyrotrope les ondes planes monochromatiques ne peuvent avoir que la polarisation circulaire. On dit que l'onde est polarisée circulairement *à droite* ($\mathbf{D}^{(+)}$), si le vecteur **D** tourne vers la droite (pour un observateur regardant le long du vecteur d'onde), et polarisée circulairement *à gauche* ($\mathbf{D}^{(-)}$), si ce vecteur tourne vers la gauche.

Supposons maintenant qu'une onde plane polarisée rectilignement tombe suivant la normale à la surface d'une plaque plane d'épaisseur l faite en substance gyrotrope. Choisissons l'axe des z dans le sens d'incidence de l'onde, et l'axe des x dans le sens du vecteur **E** de l'onde incidente. Une onde polarisée rectilignement peut être représentée par une superposition de deux ondes ayant des polarisations circulaires différentes; dans la plaque, ces deux ondes doivent se propager avec des vecteurs d'onde différents $k_\pm = \frac{\omega}{c} N_\pm$. En désignant par D_0 la valeur de D_x à l'entrée de la lumière dans la plaque (pour $z = 0$), nous avons

$$D_x = \frac{D_0}{2}\left(e^{ik_+z} + e^{ik_-z}\right), \qquad D_y = \frac{D_0}{2}\left(-e^{ik_+z} + e^{ik_-z}\right).$$

Introduisons la valeur moyenne du nombre d'ondes $k = \frac{1}{2}(k_+ + k_-)$ et une quantité $\varkappa = \frac{1}{2}(k_+ - k_-)$. Il vient

$$D_x = D_0 e^{ikz} \cos \varkappa z, \qquad D_y = D_0 e^{ikz} \sin \varkappa z.$$

A la sortie de la plaque nous avons

$$D_y/D_x = \operatorname{tg} \varkappa l.$$

Nous voyons qu'à la sortie de la plaque les deux ondes polarisées circulairement se superposent pour donner de nouveau une onde polarisée rectilignement mais avec un plan de polarisation tourné d'un angle $\varkappa l$ par rapport au plan de polarisation de l'onde incidente initiale. C'est à cette propriété du milieu — *la rotation du plan de polarisation de la lumière* — que sont liés les termes *milieu gyrotrope* et *vecteur de giration*. L'angle de rotation de la direction de polarisation est proportionnel, comme nous voyons, à la longueur du chemin parcouru par la lumière dans le milieu gyrotrope. Pour un chemin unité il a pour valeur

$$\varkappa = \frac{\omega}{2c}(N_+ - N_-) = \frac{\omega g \cos\theta}{2cN_0}.$$

§ 19.2. Gyrotropie naturelle et artificielle

Après avoir établi le sens physique du vecteur de giration, considérons un exemple physique simple qui montre comment la gyrotropie se produit dans un milieu, un plasma froid soumis à un champ magnétique extérieur, uniforme et constant, d'induction $\mathbf{B}_0$. A la différence de la plupart des autres milieux, la gyrotropie de ce milieu peut être expliquée dans le cadre de la physique classique; quant à la gyrotropie des cristaux, elle a son origine dans des effets quantiques, notamment, l'effet Zeeman (décomposition des niveaux énergétiques sous l'effet d'un champ magnétique).

Le rayon vecteur $\mathbf{r}$ d'un électron du plasma se détermine évidemment par l'équation de mouvement

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{e}{m_e}[\dot{\mathbf{r}}\mathbf{B}_0] = \frac{e}{m_e}\mathbf{E},$$

où $\mathbf{E}$ est l'intensité du champ électrique variable de l'onde (ici nous ne tenons pas compte du champ magnétique). En dirigeant l'axe des z suivant $\mathbf{B}_0$, récrivons cette équation sous forme des composantes:

$$\ddot{r}_z = \frac{e}{m_e}E_z, \quad \ddot{r}_\pm \mp i\omega_L\dot{r}_\pm = \frac{e}{m_e}E_\pm,$$

où $r_\pm = r_x \pm ir_y$, $E_\pm = E_x \pm iE_y$, $\omega_L = eB_0/m_e$. Si l'onde incidente est une onde monochromatique de fréquence ω, il vient

$$-\omega^2 z = \frac{e}{m_e}E_z, \quad -\omega(\omega \pm \omega_L)r_\pm = \frac{e}{m_e}E_\pm.$$

Le moment dipolaire du volume unité qui prend naissance dans l'onde est de toute évidence $\mathbf{P} = e\mathbf{r}n_0$, où n_0 est la densité d'électrons. Alors, en introduisant la fréquence du plasma $\omega_e = \sqrt{e^2n_0/(\varepsilon_0 m_e)}$, nous obtiendrons

$$P_x = -\frac{\varepsilon_0\omega_e^2}{2\omega}\left(\frac{E_+}{\omega+\omega_L} + \frac{E_-}{\omega-\omega_L}\right),$$

$$P_y = -\frac{\varepsilon_0\omega_e^2}{2\omega i}\left(\frac{E_+}{\omega+\omega_L} - \frac{E_-}{\omega-\omega_L}\right), \quad P_z = -\frac{\varepsilon_0\omega_e^2}{\omega}E_z.$$

Il nous reste à représenter, à l'aide de ces relations, le vecteur $\mathbf{P}$ sous la forme $P_i = \varepsilon_0\alpha_{ij}E_j$ et à trouver le tenseur diélectrique $\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \alpha_{ij}$. Il vient en définitive

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & i\varepsilon_2 & 0 \\ -i\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix},$$

où

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{\omega_e^2}{\omega^2 - \omega_L^2}, \quad \varepsilon_3 = 1 - \frac{\omega_e^2}{\omega^2}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{\omega_e^2 \omega_L}{\omega(\omega^2 - \omega_L^2)}.$$

Nous voyons que sous l'effet d'un champ magnétique le plasma devient anisotrope ($\varepsilon_3 \neq \varepsilon_1$) et gyrotrope ($\varepsilon_2 \neq 0$). Il est facile de s'assurer que les éléments matriciels non diagonaux entrant dans l'expression du tenseur ε sont équivalents au vecteur de giration:

$$\mathbf{g} = \varepsilon_2 \mathbf{i}_B = -\frac{\omega_e^2 \omega_L \mathbf{i}_B}{\omega(\omega^2 - \omega_L^2)}, \quad \mathbf{i}_B = \frac{\mathbf{B}_0}{B_0}.$$

Mais la direction de polarisation de la lumière peut tourner également en l'absence de champs extérieurs. En particulier, cette propriété (appelée *activité optique naturelle*) est caractéristique des cristaux de certaines symétries, par exemple, des cristaux de quartz. C'est précisément dans le quartz que ce phénomène a été observé pour la première fois (Arago, 1811). L'activité optique (on dit aussi le pouvoir rotatoire) du quartz est relativement grande (bien qu'inférieure à celle du cinabre par exemple): pour la lumière jaune se propageant suivant l'axe optique du cristal elle vaut $\varkappa = 21{,}7 \deg \times \times \text{mm}^{-1}$.

L'activité optique naturelle est propre non seulement aux cristaux mais également aux solutions et aux vapeurs de très nombreux composés organiques, par exemple de sucres et de camphre (ce phénomène a été observé pour la première fois par Biot en 1815). Pour les solutions, le pouvoir rotatoire est proportionnel à la concentration x; il dépend de la nature du solvant (et comme pour toutes les substances, de la température et de la longueur d'onde de la lumière). Pour une solution aqueuse de sucre à la température ordinaire il est de 6,65 $\deg \cdot \text{cm}^{-1}\, x$, où x est la concentration massique.

La gyrotropie des liquides et des gaz est une conséquence de l'*isomérie optique*. Le fait est que les molécules de très nombreux composés organiques sont asymétriques; dans le cas le plus simple, un tel composé peut avoir deux stéréo-isomères dont chacun est l'image de l'autre dans un miroir. L'un des isomères fait tourner le plan de polarisation à droite, et l'autre à gauche. Si une substance est obtenue synthétiquement, elle représente un mélange d'isomères en quantités égales et donc ne fait pas tourner le plan de polarisation. Fait très curieux, dans les organismes vivants, de telles substances ne sont représentées en règle générale que par un seul isomère. La glucose naturelle, par exemple, fait tourner le plan de polarisation à droite. L'activité optique des solutions trouve de nombreuses applications pratiques, en particulier, dans les pèse-sucre servant à la détermination de la concentration du sucre dans une solution.

Les ferromagnétiques présentent une gyrotropie naturelle. Ce phénomène a été observé pour la première fois par Kerr (1876) qui a découvert la rotation du plan de polarisation lors de la réflexion de la lumière sur un ferromagnétique (à cette époque-là les ferromagnétiques transparents n'étaient pas encore connus). Pour pouvoir observer réellement un tel phénomène (*effet Kerr magnétique*) le cristal doit être aimanté pour qu'il soit monodomaine ou tout au moins qu'il contienne plus de domaines d'une orientation de l'aimantation spontanée que de l'autre. Mais en principe, cette exigence n'est pas obligatoire: par exemple, en faisant passer un faisceau lumineux étroit par un domaine distinct, on pourrait observer la rotation du plan de polarisation également dans un échantillon non aimanté.

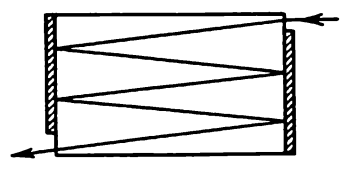


Fig. 19.1. Amplification de l'effet Faraday

Les substances normalement non actives acquièrent l'activité optique sous l'effet d'un champ magnétique extérieur (*effet Faraday*, 1846). Dans ce cas, le pouvoir rotatoire $\varkappa = CH_0$ est proportionnel à l'intensité du champ H_0. Le coefficient C, appelé *constante de Verdet*, dépend de la fréquence de la lumière et de la température et peut prendre des valeurs tant positives que négatives. Par exemple, pour le verre (flint lourd) aux rayons jaunes, $C = 1{,}25$ à 2 deg·kA^{-1}, pour le bisulfure de carbone liquide $C = 0{,}9$ deg·kA^{-1}. Pourtant, malgré la petitesse de C, l'effet Faraday peut être facilement observé, même dans des champs pas trop intenses, grâce à un procédé bien ingénieux proposé par Faraday. Le fait est que $\varkappa$ change de signe lorsque le sens du champ appliqué est inversé, si bien que lorsque le rayon lumineux traverse une même plaque alternativement dans les deux sens, les effets s'additionnent. L'effet résultant se trouve plusieurs fois amplifié si l'on utilise des réflexions multiples (en argentant par exemple la plaque partout sauf les endroits d'entrée et de sortie du rayon, fig. 19.1).

§ 19.3. Ondes de spin et résonance ferromagnétique

Jusqu'ici nous avons étudié des milieux anisotropes ou gyrotropes par rapport aux propriétés électriques. Nous allons maintenant considérer un cristal ferromagnétique qui est un milieu anisotrope et gyrotrope par rapport aux propriétés magnétiques. Analysons tout d'abord les oscillations de l'aimantation se produisant dans un tel cristal, que l'on appelle *ondes de spin*.

Nous avons vu au chapitre 12 que dans un champ magnétique extérieur $\mathbf{H}$ le moment magnétique $\mathbf{m}$ de l'atome précessionne autour

de **H**, c'est-à-dire tourne suivant la loi

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} = \mu_0 g [\mathbf{mH}],$$

où g est le rapport gyromagnétique (si le moment magnétique est dû uniquement au spin, $g = e/m_e$, où m_e est la masse de l'électron). Dans les ferromagnétiques, les moments magnétiques des électrons sont soumis à l'action d'un champ efficace $\mathbf{H}^{eff}$, de sorte que la précession du i-ième moment doit se décrire par l'équation

$$\frac{\partial \mathbf{m}_i}{\partial t} = \mu_0 g [\mathbf{m}_i \mathbf{H}_i^{eff}],$$

où $\mathbf{H}_i^{eff}$ est le champ efficace s'exerçant sur le i-ième moment.

Si les moments de tous les atomes sont parallèles l'un à l'autre, le champ $\mathbf{H}^{eff}$ est, en l'absence de champ extérieur et d'anisotropie magnétique, égal au champ d'échange de Weiss: $\mathbf{H}_W = \nu n_0 \mathbf{m}$, où n_0 est la densité d'électrons magnétiques et ν, le coefficient de proportionnalité (v. § 12.7). Nous voyons que dans le cas de la distribution uniforme de l'aimantation tous les moments magnétiques sont parallèles au champ d'échange si bien que les produits vectoriels $[\mathbf{m}_i \mathbf{H}_i^{eff}]$ s'annulent et les moments ne précessionnent pas.

Déterminons la valeur du champ efficace dans le cas où la direction de l'aimantation varie lentement dans l'espace. Traitons les moments comme des vecteurs classiques et représentons l'énergie d'échange de l'interaction d'un électron du i-ième atome avec les électrons de tous les autres atomes sous la forme

$$U = -\sum_j I_{ij} s_i s_j = -\frac{1}{\mu_B^2} \sum_j I_{ij} m_i m_j.$$

L'intégrale d'échange I décroît rapidement avec la distance, ce qui permet de ne tenir compte dans la somme sur j que des voisins les plus proches du i-ième atome.

Supposons que la direction des moments magnétiques **m** varie lentement le long de l'axe des x et admettons, pour simplifier, que l'axe des x se confond avec l'un des axes cristallographiques. Alors, en introduisant l'énergie U_0 de l'interaction d'échange de l'électron du i-ième atome avec tous les autres électrons, on peut représenter U sous la forme

$$U = U_0 - \frac{1}{\mu_B^2} I (m_i m_{i+1} + m_i m_{i-1} - 2m_i^2),$$

où $I = I_{i,\,i+1} = I_{i,\,i-1}$ est l'intégrale d'échange entre les voisins les plus proches dans la direction de l'axe des x.

Si la direction de **m** varie lentement d'un atome à un autre, on peut considérer que **m** est une fonction continue des coordonnées,

et $\mathbf{m}_i$, la valeur de cette fonction au point $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i$ occupé par le i-ième atome: $\mathbf{m}_i = \mathbf{m}(\mathbf{r}_i)$. Dès lors il vient

$$\mathbf{m}_{i+1} = \mathbf{m} + \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial x^2} a^2 + \ldots,$$

$$\mathbf{m}_{i-1} = \mathbf{m} - \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial x^2} a^2 + \ldots,$$

où a est la constante de réseau cristallin. Nous obtenons par suite

$$U = U_0 - \frac{1}{\mu_B^2} Ia^2 \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial x^2} \mathbf{m}.$$

Ainsi, dans le cas d'une distribution hétérogène des moments magnétiques, à l'énergie U_0 de l'électron du i-ième atome s'ajoute le terme

$$\delta U = -\frac{1}{\mu_B^2} Ia^2 \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial x^2} \mathbf{m}.$$

Quant à l'énergie du moment magnétique $\mathbf{m}$ dans le champ $\mathbf{H}^{\text{eff}}$, elle vaut $\delta U = -\mu_0 \mathbf{m} \mathbf{H}^{\text{eff}}$. Ainsi, c'est la grandeur

$$\mathbf{H}^{\text{eff}} = \frac{1}{\mu_0 \mu_B^2} Ia^2 \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial x^2}$$

qui représente le champ efficace de l'*hétérogénéité magnétique*, c'est-à-dire un ajout au champ d'échange, dû à l'hétérogénéité de la distribution de l'aimantation.

Si maintenant nous faisons la somme des équations de la précession des moments magnétiques distincts sur un volume très petit mais macroscopique, nous obtiendrons l'équation de la rotation du vecteur densité de moment magnétique $\mathbf{J}$:

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = \mu_0 g [\mathbf{J} \mathbf{H}^{\text{eff}}].$$

Quant au champ efficace $\mathbf{H}^{\text{eff}}$, il sera proportionnel à la dérivée seconde spatiale du vecteur $\mathbf{J}$:

$$\mathbf{H}^{\text{eff}} = \alpha \frac{\partial^2 \mathbf{J}}{\partial x^2}, \quad \alpha \equiv \frac{Ia^2}{n_0 \mu_0 \mu_B^2}.$$

La quantité α coïncide avec la constante d'interaction d'échange hétérogène introduite au § 12.8.

Supposons maintenant que la direction d'équilibre du moment magnétique coïncide avec l'axe des z. Dans ce cas, ce sont les composantes J_x et J_y du vecteur $\mathbf{J}$ qui dépendent des coordonnées et du temps. Si J_x et J_y sont petites, J_z diffère peu de l'aimantation d'équilibre J_0, à savoir $J_z \approx J_0 [1 - (J_x^2 + J_y^2)/(2J_0^2)]$. Pour cette raison l'équation vectorielle de la rotation du moment magnétique

peut être représentée sous la forme de deux équations scalaires:

$$\frac{\partial J_x}{\partial t} = -\mu_0 g J_0 \alpha \frac{\partial^2 J_y}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial J_y}{\partial t} = \mu_0 g J_0 \alpha \frac{\partial^2 J_x}{\partial x^2}.$$

Si $\mathbf{J}_\perp$ désigne la projection de l'aimantation sur un plan perpendiculaire à $\mathbf{J}_0$ (plan x, y), la rotation de l'aimantation laisse inchangée la longueur du vecteur $\mathbf{J}_\perp$ qui est animé d'un mouvement de rotation uniforme. Ainsi, pour $J_x = J_\perp \cos\varphi$ et $J_y = J_\perp \sin\varphi$, seul l'angle φ varie dans le temps et dans l'espace, alors que le module de $J_\perp$ reste inchangé. De telles oscillations sont dites, comme nous savons, polarisées circulairement. En introduisant au lieu de J_x et J_y la grandeur $J_+ = J_x + iJ_y$, nous obtenons une seule équation au lieu de deux:

$$\frac{\partial J_+}{\partial t} = i\alpha\mu_0 g J_0 \frac{\partial^2 J_+}{\partial x^2}.$$

Cherchons une solution de cette équation sous la forme d'une onde plane monochromatique $J_+ \sim \exp(i\mathbf{kr} - i\omega t)$. L'introduction de cette expression dans l'équation de J_+ conduit à l'expression suivante de la variation de la fréquence ω de l'onde en fonction du vecteur d'onde $\mathbf{k}$:

$$\omega(\mathbf{k}) = \alpha\mu_0 g J_0 k^2.$$

L'écart du moment magnétique par rapport à la direction d'équilibre se propage dans un ferromagnétique sous forme d'oscillations dont la fréquence est une fonction quadratique du vecteur d'onde. Ces oscillations sont appelées ondes de spin.

L'existence des ondes de spin a été prédite par Bloch.

Nous savons qu'à chaque oscillation de fréquence ω et de vecteur d'onde $\mathbf{k}$ est associé un corpuscule de matière d'énergie $\varepsilon = \hbar\omega$ et d'impulsion $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$; par exemple, aux ondes sonores sont associés les corpuscules dits *phonons* dont $\varepsilon = v_s p$ (v_s étant la vitesse du son). D'une manière analogue, à une onde de spin est associé un corpuscule appelé *magnon*. L'énergie du magnon est égale à

$$\varepsilon = \frac{1}{\hbar} \alpha g \mu_0 J_0 p^2.$$

Nous avons vu au chapitre 12 qu'au zéro absolu l'aimantation de nombreux ferromagnétiques prend sa valeur maximale possible $J_\infty = \mu_B n_0$, où n_0 est la densité d'électrons magnétiques. A très basse température, l'aimantation diminue lorsque la température s'élève parce que les oscillations thermiques provoquent des écarts aléatoires des moments magnétiques par rapport à la position d'équilibre. Or, de tels écarts se propagent obligatoirement sous forme d'ondes de spin, de sorte que la diminution de l'aimantation est proportionnelle au nombre de magnons thermiques, c'est-à-dire d'ondes de-spin dues, comme il a déjà été indiqué, aux oscillations

thermiques des moments magnétiques. Déterminons le nombre de magnons thermiques.

Les magnons obéissent, tout comme les phonons, à la statistique de Bose-Einstein, si bien que leur distribution se décrit par la fonction de Planck

$$N(\mathbf{p}) = \frac{1}{e^{\varepsilon/(k_B T)} - 1}$$

(k_B étant la constante de Boltzmann). Ainsi, la densité moyenne de magnons est

$$N_m = \int \frac{1}{e^{\varepsilon/(k_B T)} - 1} \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Si au lieu de l'énergie nous introduisons une variable adimensionnée $x = \varepsilon/(k_B T)$, l'impulsion p devient proportionnelle à $\sqrt{T}$; il en résulte que l'intégrale figurant dans l'expression de N_m est proportionnelle à $T^{3/2}$. Autrement dit, la densité de magnons thermiques croît avec la température comme $T^{3/2}$; suivant cette même loi croît aussi la différence $J_\infty - J_s$:

$$(J_\infty - J_s)/J_\infty \sim T^{3/2}/T_c^{3/2}.$$

Telle est la *loi de Bloch* pour la variation de l'aimantation avec la température que nous avons déjà rencontrée (v. chap. 12).

Ainsi que nous l'avons vu au chapitre 12, les spins des électrons possèdent en plus de l'énergie d'échange encore une énergie supplémentaire dépendant de leur orientation par rapport aux axes cristallographiques, que l'on appelle *énergie d'anisotropie magnétique*. Dans le cas des cristaux uniaxiaux nous avons utilisé l'expression suivante pour la densité de cette énergie: $w_a = K \sin^2\theta$, où θ est l'angle que la direction de l'aimantation fait avec l'axe du cristal (axe z). En rejetant le terme constant peu important (ce qui est équivalent tout simplement à un changement de l'origine des énergies) et en introduisant une constante sans dimensions $\beta = 2K/(\mu_0 J_0^2)$, écrivons la densité d'énergie d'anisotropie magnétique sous la forme

$$w_a = -\frac{\beta}{2}\mu_0 J_z^2.$$

La constante β est appelée *constante d'anisotropie magnétique*; elle dépend de la température du cristal et des tensions extérieures mais est indépendante de l'aimantation. Admettons, pour fixer les idées, qu'elle est positive; alors à l'état d'équilibre les moments magnétiques sont orientés suivant l'axe des z (*anisotropie du type de l'axe de facile aimantation*).

Comparons maintenant la formule donnant w_a à l'expression $W = -\mu_0 \int \mathbf{H}\, d\mathbf{J}$ pour l'énergie du moment magnétique $\mathbf{J}$ dans le champ magnétique $\mathbf{H}$. Nous voyons que l'existence d'une aniso-

tropie magnétique est équivalente à l'introduction d'un certain champ efficace $\mathbf{H}_a$ appelé *champ d'anisotropie magnétique.* Ce champ est dirigé suivant l'axe des z et est égal en module à βJ_z, c'est-à-dire que

$$\mathbf{H}_a = \beta \mathbf{J}_0 \frac{(\mathbf{J}\mathbf{J}_0)}{J_0^2},$$

où $\mathbf{J}_0$ est l'aimantation d'équilibre.

Le champ d'anisotropie magnétique est beaucoup plus faible que le champ d'échange, si bien qu'en examinant une onde de spin de $\mathbf{k}$ suffisamment grands on pourrait le négliger. Mais pour des ondes très longues, la contribution du champ d'échange (champ d'hétérogénéité magnétique) devient, comme nous l'avons vu, nulle, de sorte que la prise en compte de $\mathbf{H}_a$ devient nécessaire.

Ainsi, pour étudier les oscillations de l'aimantation dans tout le domaine de longueurs d'onde, il convient de partir de l'équation

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = \mu_0 g [\mathbf{J}\mathbf{H}^{eff}],$$

où

$$\mathbf{H}^{eff} = \alpha \frac{\partial^2 \mathbf{J}}{\partial x^2} + \beta \mathbf{J}_0 \frac{(\mathbf{J}\mathbf{J}_0)}{J_0^2} + \mathbf{H}$$

et $\mathbf{H}$ est l'intensité du champ magnétique dans le cristal. En adjoignant à cette équation les équations de la magnétostatique

$$\operatorname{div}(\mathbf{H} + \mathbf{J}) = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0,$$

on peut trouver la variation de la fréquence de l'onde de spin en fonction du vecteur d'onde pour toutes les valeurs de $\mathbf{k}$:

$$\omega(\mathbf{k}) = \mu_0 g J_0 \sqrt{\left(\alpha k^2 + \beta + \frac{H_0}{J_0}\right)\left(\alpha k^2 + \beta + \frac{H_0}{J_0} + \sin^2 \theta\right)},$$

où H_0 est l'intensité d'un champ magnétique non perturbé (supposé constant, uniforme et dirigé suivant l'axe d'anisotropie z) et θ, l'angle que font entre eux les vecteurs $\mathbf{k}$ et $\mathbf{H}_0$.

C'est à l'existence des ondes de spin qu'est lié le phénomène de *résonance ferromagnétique* qui se produit dans les ferromagnétiques. Ce phénomène peut se décrire comme suit. Plaçons un échantillon ferromagnétique dans un champ uniforme de haute fréquence $\sim \exp(-i\omega t)$. Si la fréquence ω est égale à la fréquence ω_0 de l'onde de spin pour $k = 0$, l'énergie du champ à haute fréquence est fortement absorbée en se transformant en énergie oscillatoire des spins. C'est le sens physique de la résonance ferromagnétique.

Déterminons la fréquence ω_0 de résonance ferromagnétique. A cet effet, posons $\mathbf{k} = 0$ dans l'expression de $\omega(\mathbf{k})$. Mais cela conduit à une indétermination sur la valeur de $\sin \theta$. Cette indétermination est levée suivant la géométrie de l'échantillon. Par exemple, pour une plaque plane dont la surface est parallèle à l'axe de facile

aimantation, $\sin\theta = 1$ et

$$\omega_0 = \mu_0 g J_0 \sqrt{\left(\beta + \frac{H_0}{J_0}\right)\left(\beta + \frac{H_0}{J_0} + 1\right)}.$$

Un phénomène analogue intervient également dans les paramagnétiques (*résonance paramagnétique*). Il consiste en une absorption intense d'un champ magnétique à haute fréquence si sa fréquence est égale à la fréquence ω_0 de précession des moments magnétiques des atomes autour d'un champ magnétique extérieur. Si un champ magnétique constant et uniforme H_0 est par exemple parallèle à la surface de l'échantillon réalisé en forme d'une plaque plane, nous avons

$$\omega_0 = \mu_0 g H_0 \sqrt{\mu},$$

où μ est la perméabilité magnétique statique du paramagnétique.

§ 19.4. Ondes électromagnétiques et de spin couplées

Passons à la détermination du tenseur de perméabilité magnétique en haute fréquence d'un ferromagnétique. Soit un ferromagnétique (pour fixer les idées, nous supposons qu'il présente une anisotropie du type de l'axe de facile aimantation) placé dans un champ magnétique $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}$, où $\mathbf{H}_0$ est l'intensité d'un champ magnétique uniforme et constant et $\mathbf{h} = \mathbf{h}_0 e^{-i\omega t}$ est l'intensité d'un champ magnétique à haute fréquence faible. Suivant l'équation de la précession du moment magnétique $\partial J/\partial t = \mu_0 g \times$ $\times [\mathbf{J}\mathbf{H}^{eff}]$, où $\mathbf{H}^{eff}$ est l'intensité du champ efficace:

$$\mathbf{H}^{eff} = \alpha \frac{\partial^2 \mathbf{J}}{\partial x^2} + \beta \mathbf{J}_0 (\mathbf{J}\mathbf{J}_0) J_0^{-2} + \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}.$$

En y portant $\mathbf{J}$ sous la forme $\mathbf{J} = \vec{\mathbf{J}}_0 + \tilde{\mathbf{J}}$, où $\tilde{\mathbf{J}} = \tilde{\mathbf{J}}_0 \exp(-i\omega t)$ est la composante à haute fréquence de l'aimantation, et en linéarisant cette équation par rapport à $\tilde{\mathbf{J}}$, nous obtenons la relation suivante entre les vecteurs $\tilde{\mathbf{J}}$ et $\mathbf{h}$:

$$\tilde{J}_i = \chi_{ij} h_j.$$

Le tenseur χ_{ij} entrant dans cette relation représente précisément le tenseur de perméabilité magnétique à haute fréquence du ferromagnétique. Ses composantes sont les suivantes:

$$\chi_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \chi_\perp & \frac{i\tilde{\mu}}{4\pi} & 0 \\ -\frac{i\tilde{\mu}}{4\pi} & \chi_\perp & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

où

$$\chi_\perp \equiv \chi_\perp(\omega, k) = \frac{\mu_0 g J_0 \Omega_0}{\Omega_0^2 - \omega^2}, \quad \tilde{\mu} \equiv \tilde{\mu}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\mu_0 g J_0 \omega}{\Omega_0^2 - \omega^2},$$

et $\Omega_0 = \mu_0 g J_0 (\alpha k^2 + \beta + H_0/J_0)$ (le champ magnétique extérieur $\mathbf{H}_0$, uniforme et constant, est dirigé suivant l'axe d'anisotropie magnétique, c'est-à-dire suivant l'axe des z).

Le tenseur de perméabilité magnétique à haute fréquence $\mu \equiv \equiv \mu(\omega, \mathbf{k})$ est lié au tenseur χ par la relation générale

$$\mu_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ij} + \chi_{ij}(\omega, \mathbf{k}).$$

Nous voyons que le ferromagnétique est un milieu anisotrope et gyrotrope. La relation entre l'induction magnétique et l'intensité de champ magnétique pour un tel milieu est de la forme

$$\mathbf{B} = \mathbf{J}_0 \frac{(\mathbf{hJ}_0)}{J_0^2} + \mu_\perp \left(\mathbf{h} - \mathbf{J}_0 \frac{(\mathbf{hJ}_0)}{J_0^2}\right) + i\,[\mathbf{hg}_m].$$

où $\mu_\perp = 1 + \chi_\perp$ et $\mathbf{g}_m$ est le vecteur de giration magnétique:

$$\mathbf{g}_m = \tilde{\mu} \frac{\mathbf{J}_0}{J_0} = \frac{\mu_0 g \mathbf{J}_0 \omega}{\Omega_0^2 - \omega^2}.$$

Si l'on connaît la perméabilité magnétique, on peut étudier l'interaction entre les ondes de spin et les ondes électromagnétiques proprement dites. Une telle interaction est particulièrement intense dans le cas où les fréquences et les vecteurs d'onde des ondes de spin et des ondes électromagnétiques sont voisins les uns des autres et proches de la valeur de résonance du vecteur d'onde k_0 déterminée à partir de l'équation

$$\omega_s(\mathbf{k}_0) = ck_0/\sqrt{\varepsilon},$$

où $\omega_s(\mathbf{k}_0)$ est la fréquence de l'onde de spin et ε, la permittivité électrique (le ferromagnétique est supposé isotrope par rapport aux propriétés électriques). La fréquence $\omega_s(\mathbf{k}_0)$ s'appelle *fréquence de résonance électromagnétique de spin.*

En remarquant que $\mu_0 g J_0 \sim 3 \cdot 10^{10}$ s^{-1} et $\alpha \sim \Theta_C a^2/(\mu_0 \mu_B J_0) \sim \sim 10^{-16}$ m^2, nous voyons que l'interaction n'est intense que pour des oscillations de très grande longueur d'onde, de l'ordre de plusieurs centimètres (Θ_C étant la température de Curie).

Examinons l'interaction entre les ondes de spin et les ondes électromagnétiques proprement dites. A cet effet, écrivons les équations de Maxwell pour une onde électromagnétique plane et faisons disparaître dans ces équations le champ et l'induction électriques. Il vient

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 c^2}{\varepsilon \omega^2} [k^2 \mathbf{h} - \mathbf{k}(\mathbf{kh})].$$

D'un autre côté $B_i = \mu_0\mu_{ij}h_j$. En égalant entre elles ces deux expressions, nous obtenons un système d'équations

$$\left\{\frac{c^2}{\varepsilon\omega^2}(k^2\delta_{ij}-k_ik_j)+\mu_{ij}\right\}h_j=0.$$

C'est la condition d'existence d'une solution non triviale pour ce système d'équations, c'est-à-dire la nullité du déterminant

$$\det\left\{(k^2\delta_{ij}-k_ik_j)+\frac{\omega^2}{\varepsilon c^2}\mu_{ij}(\omega,\mathbf{k})\right\}=0.$$

qui détermine la variation de ω en fonction de $\mathbf{k}$ pour toutes les branches d'oscillations considérées.

Si la perméabilité magnétique du ferromagnétique était indépendante de la fréquence, cette équation serait réduite à une équation quadratique par rapport à la variable $\omega^2/(c^2k^2)$. En d'autres termes, nous aurions deux branches d'ondes électromagnétiques proprement dites dont la fréquence serait proportionnelle (pour une direction de propagation donnée) au nombre d'onde. Mais les composantes du tenseur de perméabilité magnétique introduisent une variation supplémentaire en fonction de la fréquence, de sorte que ω^2 entre dans l'équation non seulement dans la combinaison $\omega^2/(c^2k^2)$ mais aussi indépendamment. Il en résulte l'apparition d'une branche supplémentaire de la fonction $\omega(\mathbf{k})$ ou, ce qui revient au même, d'une troisième branche d'oscillations.

Les formules générales exprimant les fréquences de toutes les trois branches étant trop encombrantes, nous ne les indiquons pas. Elles ne se simplifient que loin de la résonance, c'est-à-dire pour $k \gg k_0$ et $k \ll k_0$ ainsi qu'au voisinage de la résonance lorsque $|k-k_0| \ll k_0$ (rappelons qu'à la résonance $\omega_s(k_0) = ck_0/\sqrt{\varepsilon}$).

Pour $k \gg k_0$ nous avons deux branches d'ondes électromagnétiques proprement dites de fréquence $ck/\sqrt{\varepsilon}$ et une branche d'ondes de spin de fréquence $\omega_s(\mathbf{k})$. Dans le domaine de $k \ll k_0$ la fréquence de l'une des branches est beaucoup plus élevée que celle des deux autres et tend vers ω_0 quand $k \to 0$, où

$$\omega_0 = \mu_0 g\,(H_0 + J_0 + \beta J_0),$$

alors que les fréquences des deux autres branches varient en fonction de k suivant une loi linéaire. Enfin, au voisinage de la résonance ($|k-k_0| \ll k_0$) les fréquences de deux branches d'oscillations diffèrent de $\omega_s(k_0)$ de quantités proportionnelles à $\pm\sqrt{|k-k_0|}$, tandis que la fréquence de la troisième branche diffère de $\omega_s(\mathbf{k}_0)$ d'une quantité proportionnelle à $|k-k_0|$. La variation de la fréquence en fonction du vecteur d'onde est représentée schématiquement pour trois branches d'oscillations par la figure 19.2.

Arrêtons-nous un instant à la rotation du plan de polarisation dans les ferromagnétiques. Supposons qu'une onde électromagnétique polarisée rectilignement tombe normalement sur un échantillon ferromagnétique et que l'axe d'anisotropie (axe des z) du ferromagnétique coïncide avec la direction de la normale à la surface de l'échantillon. Admettons, pour simplifier, que $\omega \gg ck_0$; nous aurons alors à l'intérieur de l'échantillon deux ondes de même amplitude mais de nombres d'onde différents:

$$k_{\pm} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon (\mu_{\perp} \pm \tilde{\mu})} .$$

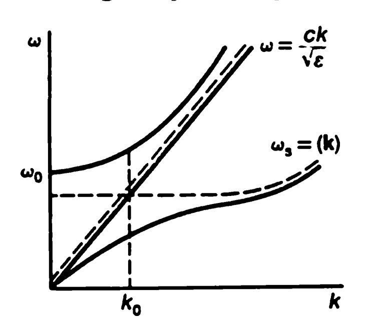


Fig. 19.2. Variation de la fréquence en fonction du vecteur d'onde pour trois branches d'ondes électromagnétiques et de spin dans un ferromagnétique

Si h_0 est la valeur de l'amplitude de l'onde à l'entrée de l'échantillon, l'intensité du champ dans l'échantillon s'exprime par les formules

$$h_x = h_0 \cos \varkappa z e^{i(kz-\omega t)},$$
$$h_y = h_0 \sin \varkappa z e^{i(kz-\omega t)},$$

où $k = \frac{1}{2}(k_+ + k_-)$ et $\varkappa = \frac{1}{2}(k_+ - k_-)$ (l'axe des z est choisi dans la direction du champ magnétique de l'onde incidente). Il est évident qu'à la sortie de l'échantillon la direction de polarisation de l'onde se trouve tournée d'un angle

$$\varphi = \varkappa l = \frac{\omega l}{2c} \left(\sqrt{\mu_{\perp}(\omega) + \tilde{\mu}(\omega)} + \sqrt{\mu_{\perp}(\omega) - \tilde{\mu}(\omega)} \right),$$

où l est la longueur du trajet parcouru par la lumière dans le cristal.

FORMULES FONDAMENTALES

Angle de rotation du plan de polarisation de l'onde électromagnétique dans un milieu gyrotrope sur un parcours unité	$\varkappa = \frac{\omega g \cos\theta}{2cN_0}$
Vecteur de giration du plasma dans un champ magnétique	$\mathbf{g} = -\frac{\omega_e^2 \omega_L}{\omega(\omega^2 - \omega_L^2)} \frac{\mathbf{B}_0}{B_0}$
Fréquence de l'onde de spin	$\omega(\mathbf{k}) = \mu_0 \alpha g J_0 k^2$; $g = e/m_e$
Loi de Bloch	$\frac{J_\infty - J_s}{J_\infty} \sim T^{3/2}$
Fréquence de résonance ferromagnétique d'une plaque	$\omega_0 = \mu_0 g J_0 \times \sqrt{\left(\beta + \frac{H_0}{J_0}\right)\left(\beta + \frac{H_0}{J_0} + 1\right)}$

CHAPITRE 20

OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

§ 20.1. Equation de l'iconale

Les équations de Maxwell régissent tous les phénomènes électromagnétiques, y compris les phénomènes optiques, si bien que tout problème concernant ces phénomènes peut être énoncé en principe dans le langage des équations de Maxwell comme un problème mathématiquement rigoureux. Or, une telle approche générale s'avère le plus souvent très compliquée parce qu'elle exige de tenir compte tant des conditions aux limites que des conditions initiales. Des solutions exactes des équations de Maxwell ne peuvent être obtenues que dans certains cas les plus simples où le problème se caractérise par une symétrie importante. Nous nous en sommes rendu compte dans le cas de l'électrostatique mais dans le cas de champs variables les problèmes deviennent beaucoup plus compliqués que les problèmes statiques.

Il existe cependant un large domaine des champs variables pour lesquels les équations de Maxwell peuvent être fortement simplifiées. C'est le domaine des ondes très courtes, si courtes qu'en première approximation la longueur d'onde n'intervient en général pas. A cet effet, il faut que la longueur d'onde λ soit très inférieure à toutes les dimensions caractéristiques figurant dans le problème: $\lambda \ll a$, où a est la plus petite de ces dimensions. Dans ce cas le champ électromagnétique se propage le long des lignes géométriques déterminées, appelées *rayons*, et les propriétés de ces rayons sont en première approximation indépendantes de la longueur d'onde. En d'autres termes,

pour $\lambda \ll a$ les lois du champ électromagnétique peuvent être énoncées en langage géométrique. C'est pourquoi le cas de $\lambda \ll a$ porte le nom *d'optique géométrique* (ou d'optique des rayons);

on dit d'optique parce que la lumière visible se caractérise par une très petite longueur d'onde (de $4\cdot10^{-7}$ à $8\cdot10^{-7}$ m) par rapport aux dimensions des appareils d'optique. Dans une approximation d'ordre suivant du petit paramètre λ/a c'est la nature ondulatoire de la lumière qui commence à se manifester. Ces manifestations sont désignées sous le terme commun de *phénomènes de diffraction*.

Dans ce qui suit nous expliquerons tout d'abord comment est introduite la notion de rayon lumineux, puis nous décrirons les lois qui gouvernent la propagation des rayons et enfin nous étudierons les phénomènes de diffraction.

Partons des équations de Maxwell pour un milieu isotrope caractérisé par une permittivité électrique $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$ et une perméabilité magnétique $\mu = \mu(\mathbf{r})$ dépendant l'une et l'autre des coordonnées. En supposant que le champ est monochromatique

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})\, e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r})\, e^{-i\omega t},$$

nous avons

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} + i\varepsilon_0\varepsilon\omega\mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} - i\mu_0\mu\omega\mathbf{H} = 0,$$

$$\operatorname{div} \varepsilon\mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mu\mathbf{H} = 0.$$

Pour tenir compte de la dispersion temporelle de la permittivité et de la perméabilité il suffit évidemment de considérer que ε et μ dépendent tant du paramètre $\mathbf{r}$ que de la fréquence ω.

Si la permittivité et la perméabilité ne dépendent pas des coordonnées, les équations obtenues admettent des solutions sous forme d'ondes planes

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{A} e^{i\mathbf{kr}}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{B} e^{i\mathbf{kr}},$$

où $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont des vecteurs constants, $\mathbf{k} = (\omega/c) N\mathbf{n}$ est le vecteur d'onde (indépendant des coordonnées), $N = \sqrt{\varepsilon\mu}$, l'indice de réfraction et $\mathbf{n}$, le vecteur unitaire orienté suivant $\mathbf{k}$.

Dans l'approximation de l'optique géométrique, les champs $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ et $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ ont une structure voisine de celle des champs d'une onde plane, à savoir

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r})\, e^{(i\omega/c)L(\mathbf{r})}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r})\, e^{(i\omega/c)L(\mathbf{r})},$$

où $L(\mathbf{r})$ est une certaine fonction du point $\mathbf{r}$ qui remplace la fonction $N(\mathbf{rn})$ intervenant dans l'expression d'une onde plane et $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ sont des grandeurs lentement variables dans l'espace. La fonction $L(\mathbf{r})$ est appelée *chemin optique* ou *iconale* (du grec « eikôn » signifiant « image » d'où le mot « icône »).

Considérons de petites portions Δr dans l'espace telles que $\lambda_0 \ll \Delta r \ll a$ (ici, $\lambda_0 = 2\pi c/\omega$ est la longueur d'onde dans le vide). Sur de telles portions la fonction $L(\mathbf{r})$ diffère peu de la fonction linéaire, si bien qu'on peut introduire un vecteur d'onde localisé $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\mathbf{r})$ lié à $L(\mathbf{r})$ par la relation

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}) = \frac{\omega}{c} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}.$$

La ligne tangente en chacun des points $\mathbf{r}$ à la courbe de $\mathbf{k}(\mathbf{r})$ porte le nom de rayon. Il est évident que l'équation du rayon peut

s'écrire sous la forme

$$N(\mathbf{r})\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \operatorname{grad} L$$

(s étant la longueur de l'arc de rayon). Dans le cas où l'indice de réfraction $N(\mathbf{r})$ dépend des coordonnées, le rayon n'est pas une ligne droite.

Les surfaces $L(\mathbf{r}) = C^{te}$ s'appellent *surfaces d'onde*. Si N ne dépend pas de $\mathbf{r}$, les surfaces d'onde sont des plans perpendiculaires au vecteur d'onde. Dans le cas général de $N = N(\mathbf{r})$, les surfaces d'onde ne sont plus planes.

Les rayons forment une famille de lignes perpendiculaires aux surfaces d'onde.

Le vecteur d'onde localisé $\mathbf{k}(\mathbf{r})$ est lié à la fréquence et à l'indice de réfraction par la même relation $k = (\omega/c)N$ que dans le cas d'une onde plane. La seule différence tient à ce que k et N dépendent maintenant des coordonnées d'un point. En nous rappelant la relation entre $\mathbf{k}$ et L, nous voyons que $(\operatorname{grad} L)^2 = N^2$, c'est-à-dire que

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)^2 = N^2.$$

C'est cette relation qui exprime l'équation fondamentale de l'optique géométrique appelée *équation de l'iconale.*

§ 20.2. Intensité lumineuse

En optique géométrique, de même que dans le cas d'une onde plane monochromatique, les densités d'énergies électrique et magnétique (prises en valeur moyenne dans le temps) sont égales l'une à l'autre ($\langle w_e \rangle = \langle w_m \rangle$) et la valeur moyenne du vecteur de Poynting $\mathbf{S}$ se définit par la formule

$$\langle \mathbf{S} \rangle = v_{ph} \langle w \rangle \mathbf{n},$$

où $\langle w \rangle = \langle w_e \rangle + \langle w_m \rangle$, $v_{ph} = c/N$ et $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire orienté suivant le rayon (le milieu est supposé non dispersif). Ainsi, le vecteur de Poynting moyenné dans le temps est dirigé suivant le rayon, c'est-à-dire orthogonalement au front d'onde, et la vitesse de propagation de l'énergie est égale à c/N.

L'intensité lumineuse se définit par $I = v_{ph} \langle w \rangle$. De la loi de conservation de l'énergie il découle une relation différentielle

$$\operatorname{div} I\mathbf{n} = 0.$$

Cette relation est susceptible d'une interprétation géométrique simple. Envisageons un tube étroit formé par des rayons lumineux (fig. 20.1). Soient ds_1 et ds_2 des éléments d'aire de la surface des deux fronts d'onde qui ferment le tube: $L(\mathbf{r}) = L_1$ et $L(\mathbf{r}) =$

$= L_2$ (L_1, L_2 étant des constantes) et I_1 et I_2 des intensités lumineuses correspondantes. Alors, les flux d'énergie à travers les surfaces *1* et *2*, c'est-à-dire les quantités $I_1\, ds_1$ et $I_2\, ds_2$, doivent être égales entre elles. En tenant compte que l'aire d*s* est proportionnelle au produit des rayons principaux de courbure R et R' de la surface correspondante, nous obtenons $I_1R_1R_1' = I_2R_2R_2'$, d'où il vient

$$I = C/(RR'),$$

où C est une constante pour un tube de rayons donné. Autrement dit, l'intensité lumineuse en un point quelconque O du rayon A (fig. 20.2) est inversement proportionnelle au produit des rayons de

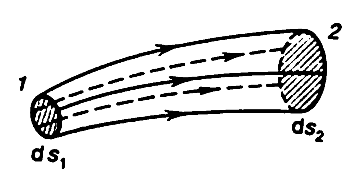


Fig. 20.1. Tube de rayons lumineux

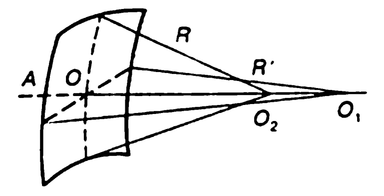


Fig. 20.2. Loi déterminant l'intensité lumineuse en optique géométrique

courbure principaux (OO_1 et OO_2) de la surface d'onde passant par ce point, le coefficient de proportionnalité étant le même pour tous les points d'un seul et même rayon (mais non pour les points différents de la surface d'onde).

Si la lumière est émise par une source ponctuelle, les deux centres de courbure sont confondus et donc les deux rayons de courbure sont égaux ($R = R'$) et les surfaces d'onde sont dans ce cas des sphères concentriques centrées sur la source de lumière. Ainsi,

l'intensité de la lumière émise par une source ponctuelle est inversement proportionnelle au carré de la distance à la source.

Dans ce cas les grandeurs de champ f varient le long du rayon suivant la loi

$$f = \frac{C^{te}}{R} e^{ikR}.$$

où kR détermine la phase de l'onde.

Si l'un au moins des rayons de courbure est nul, l'intensité lumineuse en optique géométrique est infiniment grande. Les lieux géométriques de tous les centres de courbure de la surface d'onde forment deux surfaces (différentes pour les points O et O') que l'on appelle *caustiques*. Pour une surface d'onde sphérique, les deux caustiques se confondent en un seul point appelé *foyer*. Notons que les rayons lumineux sont tangents aux caustiques. Bien entendu, l'intensité lumineuse sur la caustique n'est pas en réalité infiniment

grande ; cette conclusion est liée à l'approximation de l'optique géométrique ($\lambda \to 0$). Si l'on tient compte du fait que la longueur d'onde λ a une valeur finie, l'intensité lumineuse sur les caustiques se trouve proportionnelle à $\lambda^{-1/3}$.

Avant de clore ce paragraphe, donnons les définitions des unités adoptées dans le système SI pour les grandeurs optiques. L'unité de base est la **candela** (cd) qui est l'intensité lumineuse émise, dans la direction perpendiculaire, d'une surface de 1/600 000 m² d'un corps noir à la température de solidification du platine et à la pression de 101 325 pascal (N/m²). Le rapport dI/do a lui aussi les dimensions d'une intensité lumineuse ; si une puissance de 1 cd est émise dans un angle solide égal à 1 stéradian (sr), on dit que le flux lumineux est égal à un *lumen* (lm) ; ainsi, 1 lm = = 1 cd/sr. L'unité d'éclairement lumineux est le *lux* : 1 lx = 1 lm/m².

§ 20.3. Principe de Fermat

Cherchons le temps t_{AB} mis par la lumière pour parcourir le chemin entre deux points A et B d'un même rayon. En tenant compte que $v_{\text{ph}} = c/N$, nous avons

$$t_{AB} = \frac{1}{c} \int N \, ds,$$

où ds est l'élément de longueur du rayon. La même formule est représentable sous la forme $t_{AB} = (1/c) \, L \, (AB)$, où

$$L(AB) = \int_A^B d\mathbf{r} \, \text{grad} \, L \equiv L(B) - L(A)$$

et $L(A)$, $L(B)$ sont les valeurs de l'iconale $L(\mathbf{r})$ aux points A et B. En effet, grad $L = \mathbf{n}N$, et lors du mouvement le long du rayon lumineux, $d\mathbf{r} = \mathbf{n} \, ds$. La grandeur $L(AB)$ est appelée *longueur optique du rayon* entre les points A et B.

La longueur optique peut être introduite non seulement pour un rayon lumineux réel mais également pour une courbe C quelconque joignant les points A et B :

$$L_C(AB) = \left(\int_A^B N \, dl \right)_C,$$

où dl est l'élément de longueur de la courbe C. Quelle différence existe-t-il entre un rayon réel et une courbe quelconque joignant les mêmes points extrêmes A et B ? Le *principe de Fermat* affirme que

la longueur optique du rayon lumineux réel est toujours plus petite que la longueur optique de toute autre courbe reliant les mêmes points. En d'autres termes, la lumière se propage de telle sorte que le temps de sa propagation soit minimal.

Pour nous en convaincre, remarquons que l'intégrale $\int_A^B d\mathbf{r}\,\mathrm{grad}\,L$ prise le long d'une certaine courbe joignant les points A et B ne dépend pas de la forme de cette courbe et est toujours égale à $L(B) - L(A)$. D'un autre côté, puisque grad $L = N\mathbf{n}$, on peut l'écrire sous la forme

$$\left(\int_A^B dl \cos\alpha N\right)_C = L(B) - L(A),$$

où dl est l'élément de longueur de la courbe C et α, l'angle formé entre $d\mathbf{l}$ et $\mathbf{n}$. Pour un rayon lumineux réel $\alpha = 0$, de sorte que

$$\left(\int_A^B dl N\right)_{\text{rayon}} = L(B) - L(A).$$

Supposons maintenant que la courbe C est voisine du rayon lumineux de telle sorte que $\cos\alpha > 0$. Dans ce cas

$$\left(\int_A^B dl N\right)_C > \left(\int_A^B dl \cos\alpha N\right)_C,$$

c'est-à-dire que

$$\left(\int_A^B dl N\right)_C > \left(\int_A^B dl N\right)_{\text{rayon}}.$$

Le sens physique de ce principe remarquable est très simple. En effet, il s'agit de la comparaison des intégrales $\int_A^B dl/v_{\text{ph}}$ pour un rayon lumineux vrai et une courbe quelconque. Mais pour une fréquence donnée de la lumière, cette intégrale est proportionnelle à $\int_A^B dl/\lambda$, où $\lambda = 2\pi v_{\text{ph}}/\omega$ est la longueur d'onde; autrement dit, suivant le principe de Fermat,

le rayon lumineux réel se distingue par le fait que sa longueur comprend un nombre minimal de longueurs d'onde (par rapport à toute autre courbe reliant les mêmes points).

Mais c'est précisément ce qui doit avoir lieu parce que dans ce cas nous obtenons une interférence positive ou, en optique ondulatoire, le maximum principal.

On peut se demander quelle est la forme du rayon lumineux dans un milieu inhomogène quelconque lorsque l'indice de réfraction

est une fonction quelconque du rayon vecteur **r**. Pour déterminer cette forme il convient d'utiliser l'équation du rayon lumineux $N\,(d\mathbf{r}/ds) = \mathrm{grad}\, L$ en la transformant de telle sorte qu'elle ne comprenne pas la fonction $L\,(\mathbf{r})$ déterminant les surfaces d'onde $L\,(\mathbf{r}) = \mathrm{C^{te}}$ mais fait intervenir seulement l'indice de réfraction $N\,(\mathbf{r})$. A cet effet, différentions cette équation par rapport à s. En tenant compte que

$$\frac{d}{ds}\left(N\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)=\frac{d}{ds}\nabla L=\frac{d\mathbf{r}}{ds}\nabla(\nabla L)=\frac{1}{N}\nabla L\nabla(\nabla L)=\frac{1}{2N}\nabla(\nabla L)^2,$$

et en utilisant l'équation de l'iconale $(\nabla L)^2 = N^2$, nous obtenons une *équation différentielle permettant de déterminer la forme du rayon lumineux*:

$$\frac{d}{ds}\left(N\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)=\mathrm{grad}\,N.$$

Cette équation montre en particulier que dans un milieu homogène, c'est-à-dire pour $N = \mathrm{C^{te}}$, les rayons lumineux sont des droites: $d\mathbf{r}/ds = \mathrm{C^{te}}$.

En faisant usage du triplet de vecteurs unitaires (de la tangente $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{r}/ds$, de la normale principale $\mathbf{a} = R\dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$ et de la binormale **b**, R étant le rayon de courbure) qu'on introduit en géométrie différentielle, on peut mettre cette équation sous une autre forme. En développant la dérivée au premier membre de l'équation et en tenant compte que $dN/ds = \boldsymbol{\tau}\,\nabla N$, nous obtiendrons

$$\frac{\mathbf{a}}{R}=\frac{1}{N}\{\nabla N-\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\tau}\nabla N)\}.$$

D'une telle forme de l'équation du rayon lumineux il découle une conclusion importante suivante:

dans un milieu inhomogène le rayon lumineux s'incurve dans le sens d'augmentation de l'indice de réfraction.

En effet, si nous multiplions les deux membres de l'équation par le vecteur unitaire **a** et tenons compte que $\mathbf{a} \perp \boldsymbol{\tau}$ et $a^2 = 1$, nous obtiendrons

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{N}\mathbf{a}\nabla N.$$

§ 20.4. Théorie des applications optiques

Le vecteur $\mathbf{n}N$ égal au gradient de l'iconale, c'est-à-dire d'une grandeur scalaire, est évidemment un vecteur irrotationnel:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{n}N = 0,$$

ce qui permet d'obtenir (de même que pour le champ électrique en électrostatique) la condition à la limite imposée à ce vecteur au passage d'un milieu (*1*) dans l'autre (*2*). La composante tangentielle du vecteur $\mathbf{n}N$ doit être continue au passage par la surface de séparation ou, ce qui revient au même, le vecteur $(\mathbf{n}_2N_2 - \mathbf{n}_1N_1)$ doit être perpendiculaire à la surface de séparation entre deux milieux. En désignant par $\mathbf{n}_{12}$ le vecteur unitaire de la normale à la surface de séparation, nous avons

$$[\mathbf{n}_{12}(\mathbf{n}_2N_2 - \mathbf{n}_1N_1)] = 0 \quad \text{ou} \quad N_2[\mathbf{n}_{12}\mathbf{n}_2] = N_1[\mathbf{n}_{12}\mathbf{n}_1],$$

d'où

$$N_2 \sin\theta_2 = N_1 \sin\theta_1,$$

où θ_1 et θ_2 sont les angles que les rayons incident et réfracté font avec la normale à la surface de séparation (angles d'incidence et de réfraction). Autrement dit,

le rapport du sinus de l'angle de réfraction au sinus de l'angle d'incidence est égal au rapport N_1/N_2. En outre, il est clair que les vecteurs $\mathbf{n}_1N_1$, $\mathbf{n}_2N_2$ et $\mathbf{n}_{12}$ sont dans un même plan.

Enfin, notons que

lorsque le rayon lumineux se réfléchit sur la surface de séparation, l'angle de réflexion doit être égal à l'angle d'incidence.

Les conditions aux limites ainsi obtenues coïncident de façon formelle avec celles pour une onde plane ayant subi la réflexion et la réfraction sur la surface plane de séparation entre deux milieux homogènes. Mais les conclusions faites ci-dessus sont plus générales car

elles sont valables pour des rayons lumineux de toute forme et non seulement pour des rayons rectilignes;

il faut seulement que soit accomplie la condition d'applicabilité de l'optique géométrique, c'est-à-dire la condition de petitesse de la longueur d'onde.

Les conditions aux limites imposées au vecteur $\mathbf{n}N$ sont à la base de la théorie des appareils d'optique (lentilles, miroirs et leurs différentes combinaisons), dont les éléments sont exposés ci-dessous. La question principale consiste ici à trouver les images de divers objets à l'aide de rayons passant à travers des *systèmes optiques*, c'est-à-dire des corps transparents qui réfléchissent et réfractent les rayons lumineux.

Donnons tout d'abord la définition de l'*image optique*. Considérons la propagation de la lumière émise par une source ponctuelle P_0 placée dans un milieu d'indice de réfraction $N(\mathbf{r})$. Le nombre de rayons émergeant du point P_0 est infini, mais le nombre de rayons passant par un tout autre point est fini. Cependant, il peut exister un point P_1 tel qu'il est traversé par un nombre infini de rayons;

un tel point est appelé *image stigmatique* ou *nette* du point P_0. Un *appareil* (*système*) *d'optique idéal* donne pour chaque point P_0 de la région tridimensionnelle appelée *espace objet* une image stigmatique P_1. L'ensemble des points P_1 s'appelle *espace image*, et les points P_0 et P_1 sont dits *conjugués*. Si le point P_0 décrit une certaine courbe C_0, le point P_1 décrira une courbe conjuguée C_1. Ces courbes ne sont pas nécessairement semblables, mais si elles le sont pour toute courbe C_0, on dit qu'on a une *application idéale des régions*.

Un système optique qui donne une image stigmatique (mais non nécessairement idéale) d'un objet à trois dimensions est appelé appareil d'optique absolu.

Pour l'appareil absolu est valable le théorème suivant appartenant à Maxwell:

dans un tel appareil la longueur optique de toute courbe C_0 dans l'espace objet est égale à la longueur optique de l'image C_1 de cette courbe :

$$\int_{C_0} N_0\,\mathrm{d}s_0 = \int_{C_1} N_1\,\mathrm{d}s_1,$$

où les indices 0 et 1 se rapportent respectivement aux espaces objet et image.

Pour nous convaincre de la validité de ce théorème, considérons deux paires de points conjugués (A_0, A_1) et (B_0, B_1) (fig. 20.3). Par hypothèse, le rayon A_0B_0 doit passer par les points A_1 et B_1 et le rayon B_0A_0 doit lui aussi passer par ces points. Les chemins optiques étant des intégrales de contour du vecteur irrotationnel $\mathbf{n}N$, ils ne dépendent pas de la forme du chemin (*principe d'égal chemin optique*) et donc $L(A_0A_1) = L(A_1A_0)$. En notant

$$L(A_0B_0) = L_0,\quad L(A_1B_1) = L_1,$$
$$L(B_0A_1) = d,\quad L(B_1A_0) = d',$$

nous avons

$$L_0 + d = d' + L_1,\qquad d + L_1 = L_0 + d',$$

Fig. 20.3. Théorème de Maxwell pour un appareil absolu

d'où découle immédiatement le théorème de Maxwell: $L_0 = L_1$. Il ne reste qu'à remarquer que jusqu'ici la courbe a été considérée comme une partie du rayon lumineux ; pour pouvoir généraliser le théorème au cas d'une courbe quelconque, il suffit de remplacer cette courbe par une droite brisée constituée de tronçons de rayons lumineux et de faire tendre vers l'infini le nombre de ces tronçons.

Du théorème de Maxwell il résulte une conséquence importante. Envisageons un triangle infiniment petit de côtés $\mathrm{d}s_0^{(1)}$, $\mathrm{d}s_0^{(2)}$ et $\mathrm{d}s_0^{(3)}$. Alors, suivant ce théorème

$$N_1\,\mathrm{d}s_1^{(1)} = N_0\,\mathrm{d}s_0^{(1)},\quad N_1\,\mathrm{d}s_1^{(2)} = N_0\,\mathrm{d}s_0^{(2)},\quad N_1\,\mathrm{d}s_1^{(3)} = N_0\,\mathrm{d}s_0^{(3)},$$

où $ds_1^{(1)}$, $ds_1^{(2)}$, $ds_1^{(3)}$ sont les images de ces côtés et N_0, N_1, les indices de réfraction. Cela signifie que dans un appareil absolu le triangle et son image sont semblables ou, ce qui revient au même, leurs angles correspondants sont égaux.

Les applications qui conservent inchangés les angles sont dites conformes et il existe un théorème général selon lequel une application conforme de l'espace tridimensionnel ne peut être que de deux formes : une transformation projective ou une inversion. Aussi, l'image produite par un appareil absolu est-elle soit une transformation projective, soit une inversion, soit leur combinaison.

Avant d'expliquer ce que signifient ces transformations, considérons le cas où l'application est non seulement stigmatique mais encore idéale, c'est-à-dire que l'image est géométriquement semblable à l'objet de départ. Dans le cas général d'une application stigmatique, la similitude n'a lieu que dans des régions infiniment petites de l'espace et le coefficient de similitude N_1/N_0 varie d'un point à l'autre, alors que dans le cas d'une application idéale on doit avoir $N_1/N_0 = C^{te}$. En particulier, si $N_1 = N_0 = C^{te}$, l'application idéale est triviale en ce sens que l'image est totalement congruente à l'objet; une telle application ne peut être réalisée que par un miroir plan ou un système de miroirs plans.

Rappelons maintenant ce qu'on entend par *inversion* et *transformation projective*. L'inversion par rapport à un point O, appelé *centre d'inversion*, est une transformation qui laisse inchangé le produit des longueurs des tronçons $P_0O \cdot OP_1$ (P_0, P_1 étant une paire de points conjugués). En particulier, le point conjugué du centre O est un point infiniment éloigné.

La transformation projective ou la *colinéation* fait passer un point P de coordonnées x, y, z en un point P' de coordonnées

$$x' = F_1/F_0, \quad y' = F_2/F_0, \quad z' = F_3/F_0,$$

où F_i sont des fonctions linéaires des coordonnées x, y, z, c'est-à-dire que

$$F_i = a_i x + b_i y + c_i z + d_i$$

(a_i, b_i, c_i, d_i étant des constantes). La résolution de ces relations par rapport à x, y, z donne des expressions tout à fait analogues:

$$x = F_1'/F_0, \quad y = F_2'/F_0, \quad z = F_3'/F_0,$$

où F_i' sont des fonctions linéaires de x', y', z' (avec des coefficients a', b', c', d' différents des a, b, c, d).

Nous voyons que l'image de tout point situé dans le plan $F_0 = 0$ est à l'infini et, inversement, des points infiniment éloignés sont projetés sur le plan $F_0' = 0$. Le plan $F_0 = 0$ est appelé *plan focal de l'espace objet*, et le plan $F_0' = 0$ est le *plan focal de l'espace image*. Les rayons lumineux, parallèles dans l'espace objet, se transforment en rayons qui se coupent en un certain point situé dans le plan focal

$F_0' = 0$; les rayons lumineux issus d'un point appartenant au plan $F_0 = 0$ se transforment en un faisceau de rayons parallèles. Si les deux plans focaux sont à l'infini, la transformation est dite *affine* ou *télescopique*; dans ce cas, tous les six coefficients a_0, b_0, c_0, a_0', b_0', c_0' sont nuls.

§ 20.5. Optique paraxiale

Une question se pose : peut-on réaliser une transformation projective à l'aide d'un appareil d'optique réel constitué par un système de lentilles et de miroirs, c'est-à-dire peut-on construire un appareil d'optique absolu ? La réponse dit qu'on ne peut le faire que *d'une*

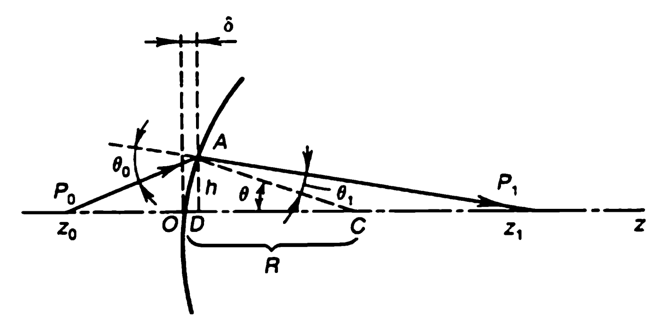


Fig. 20.4. Formation d'une image stigmatique lors de la réfraction

manière approchée, en utilisant des faisceaux de rayons étroits cheminant à faible distance de l'axe optique. La théorie de l'application par de tels rayons est appelée *optique paraxiale.*

Expliquons comment se forme dans ce cas une image stigmatique. Considérons à cet effet la marche des rayons au voisinage de l'axe d'une surface de révolution réfringente qui sépare deux milieux homogènes d'indices de réfraction N_0 et N_1 (fig. 20.4). Supposons que le rayon émerge du point P_0 situé sur l'axe z de la surface, rencontre la surface au point A, se réfracte et coupe l'axe au point P_1. Dans le triangle P_0AC, où C est le centre de courbure de la surface de révolution correspondant au point O, le rapport des côtés P_0C et P_0A est égal à $\sin\theta_0/\sin\theta$; puis, dans le triangle P_1AC le rapport des côtés P_1C et P_1A est égal à $\sin\theta_1/\sin\theta$. Comme nous nous intéressons aux rayons cheminant à faible distance de l'axe, nous devons poser $P_0A \approx P_0O$ et $P_1A \approx P_1O$. En plaçant l'origine des coordonnées au point O et en désignant par z_0 et z_1 les coordonnées des points P_0 et P_1, nous obtiendrons

$$\frac{-z_0+R}{z_0}=\frac{\sin\theta_0}{\sin\theta}, \quad \frac{z_1-R}{z_1}=\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta},$$

où R est le rayon de courbure au point O (remarquons que $z_1 > 0$, $z_0 < 0$). Divisons la première égalité par la seconde et tenons compte

que $\sin\theta_0/\sin\theta_1 = N_1/N_0$, il vient

$$N_0\left(\frac{1}{z_0}-\frac{1}{R}\right)=N_1\left(\frac{1}{z_1}-\frac{1}{R}\right).$$

Cette relation détermine de façon univoque la coordonnée z_1 du point P_1 de l'image en fonction de la coordonnée z_0 du point P_0 de l'objet indépendamment du choix du point A en lequel le rayon émergeant de P_0 traverse la surface réfringente. En d'autres termes, l'image obtenue est stigmatique mais, bien sûr, seulement dans l'*approximation paraxiale*, c'est-à-dire en négligeant la différence, proportionnelle à θ^2, entre les segments P_0A, P_1A et les segments P_0O, P_1O.

Les second et premier membres de l'égalité écrite ci-dessus sont appelés *invariant d'Abbe*. Cette égalité peut se récrire sous la forme

$$\frac{N_1}{z_1}-\frac{N_0}{z_0}=\Phi,\quad \Phi\equiv\frac{N_1-N_0}{R}.$$

La grandeur Φ est appelée *vergence* (ou *puissance*) de la surface réfringente.

Il est facile de voir que $z_0\to -N_0/\Phi$ si $z_1\to\infty$ et $z_1\to N_1/\Phi$ si $z_0\to\infty$. Ainsi, les foyers sont des points situés sur l'axe et ayant des coordonnées $(-N_0/\Phi)$ et (N_1/Φ), alors que les distances focales ont pour valeur

$$f_0=\frac{N_0R}{N_1-N_0},\quad |f_1|=\frac{N_1R}{N_1-N_0},$$

ce qui donne

$$f_0/z_0 - |f_1|/z_1 = -1.$$

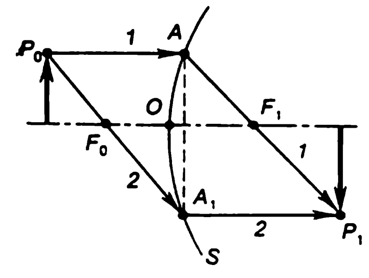


Fig. 20.5. Construction de l'image d'un point situé en dehors de l'axe d'une surface réfringente

En utilisant les propriétés des foyers, il est aisé d'obtenir l'image P_1 d'un point P_0 situé à l'extérieur de l'axe de la surface réfringente S. A cet effet, il convient de tracer depuis le point P_0 deux rayons (*1* et *2*) jusqu'à leur intersection avec la surface réfringente: le premier parallèlement à l'axe, et le second passant par le foyer F_0. Après s'être réfractés, le premier rayon doit passer par le foyer F_1, et le second parallèlement à l'axe (fig. 20.5). Sur la figure 20.6 cette construction est faite dans l'hypothèse où S est un plan passant par O (cette approximation correspond au cas où la distance de O à AA_1 est petite par rapport aux distances focales). En considérant les triangles semblables $F_1P_1P_1'$ et F_1AO, $F_0P_0P_0'$ et F_0A_1O, il est facile de conclure que

$$-Y_1/Z_1 = Y_0/|f_1|,\quad Y_0/-Z_0 = Y_1/f_0.$$

où Z_0, Y_0 et Z_1, Y_1 sont les coordonnées des points P_0 et P_1 dans les systèmes de coordonnées ayant leurs centres aux foyers ($Z_0 < 0$, $Y_1 < 0$). Il est facile d'en tirer le grandissement

$$Y_1/Y_0 = -Z_1/f_1, \quad Y_1/Y_0 = f_0/-Z_0$$

et en même temps d'obtenir la relation

$$Z_0Z_1 = -f_0 \mid f_1 \mid \equiv f_0f_1, \quad f_1 = -\mid f_1 \mid,$$

qui découle aussi de l'égalité $f_0/Z_0 - \mid f_1 \mid /Z_1 = -1$ si l'on tient compte que $z_0 = Z_0 - f_0$, $z_1 = Z_1 + \mid f_1 \mid$. Nous avons déjà obtenu précédemment toutes ces relations en exposant la théorie générale

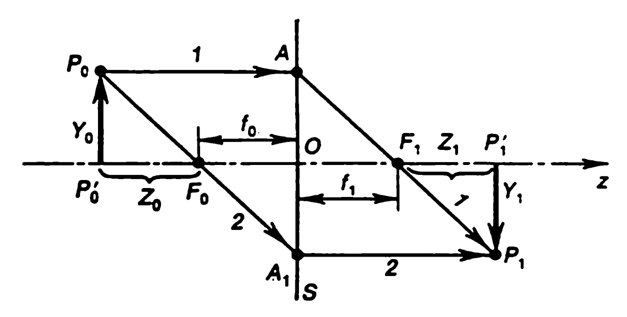


Fig. 20.6. Construction de l'image d'un point dans le cas d'une surface réfringente infiniment mince

de la transformation projective. Ceci démontre que *dans le cas d'une surface de révolution réfringente l'application par des rayons paraxiaux est une transformation projective.* Une assertion analogue est également valable dans d'autres cas, pour tout système optique.

Il est facile de montrer que notre relation fondamentale qui lie les coordonnées d'un point P_0 de l'objet aux coordonnées de son image P_1 peut être obtenue à l'aide du principe de Fermat et qu'elle traduit la condition de minimum (plus exactement, d'extrémum) de longueur optique des rayons paraxiaux donnant l'image du point P_0. Pour nous en convaincre, revenons à la figure 20.4 et déterminons les distances s_0 et s_1 des points P_0 et P_1 au point A :

$$s_0 = \sqrt{(-z_0+\delta)^2+h^2} \approx \mid z_0 \mid \left(1 + \frac{h^2-2z_0\delta}{2z_0^2}\right),$$

$$s_1 = \sqrt{(z_1-\delta)^2+h^2} \approx z_1 \left(1 + \frac{h^2-2z_1\delta}{2z_1^2}\right),$$

où h est la longueur de la perpendiculaire AD abaissée du point A sur l'axe des z, et δ, la coordonnée z du point A. En remarquant que $\delta \approx h^2/(2R)$, représentons la longueur optique (totale) du rayon

réfracté P_0AP_1 sous la forme

$$N_0s_0+N_1s_1=N_0\,|\,z_0\,|+N_1z_1+\frac{h^2}{2}\left\{\frac{N_0}{|z_0|}+\frac{N_1}{z_1}+\frac{N_0-N_1}{R}\right\}$$

La condition d'extrémum consiste en ce que l'expression des accolades s'annule ; nous voyons que cette condition coïncide avec la relation $N_1/z_1 - N_0/z_0 = \Phi$ obtenue plus haut pour la détermination des coordonnées z_1 de l'image stigmatique du point P_0.

Suivant la théorie générale des transformations projectives la distance focale f_0 doit être considérée comme positive, et f_1 comme négative. Cela signifie que l'image est dioptrique ($f_0f_1 < 0$) : si la face convexe de la surface est tournée vers l'objet ($R > 0$), elle est convergente pour $N_0 < N_1$ et divergente pour $N_0 > N_1$.

La vergence Φ peut s'exprimer facilement par l'intermédiaire des distances focales :

$$\Phi = N_0/f_0 = -N_1/f_1.$$

Cette formule définit la vergence de tout système optique quels que soient les signes de f_0 et f_1. La valeur de Φ est positive pour un système convergent ($f_0 > 0$) et négative pour un système divergent ($f_0 < 0$). L'unité de mesure de vergence est la *dioptrie* correspondant à la vergence d'une surface sphérique de $f_0 = 1$ m pour $N_0 = 1$.

De même pour une surface de révolution réfringente, il est facile d'obtenir une formule qui lie les coordonnées z_0 et z_1 d'un point et de son image dans le cas d'une surface de révolution réfléchissante. Elle est de la forme

$$\frac{1}{z_0}+\frac{1}{z_1}=\frac{2}{R},$$

où R est le rayon de courbure. Sa valeur est considérée comme positive si la surface est tournée vers le faisceau incident par sa face convexe et négative si elle est tournée par sa face concave.

En sachant trouver les images pour une seule surface de révolution réfringente ou réfléchissante, on peut construire les images produites par un système optique comportant de nombreuses surfaces de révolution réfringentes et réfléchissantes (coaxiales), si complexe soit-il. A cet effet, il convient de trouver l'image P_1 du point de départ P_0 produite par la première surface ; puis, en prenant le point P_1 pour celui de départ, trouver son image P_2 donnée par la deuxième surface, et ainsi de suite. Les formules générales obtenues dans ce cas sont très compliquées, de sorte que nous nous bornerons ici à examiner le cas d'une *lentille mince* qui est un système optique constitué de deux surfaces de révolution réfringentes ayant un axe commun et placées de telle sorte que leur distance (épaisseur de la lentille) peut être négligée. La vergence d'un tel système est égale à

la somme des vergences des deux surfaces :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{N_1 - N_0}{R_1} + \frac{N_2 - N_1}{R_2},$$

où N_0, N_1, N_2 sont les indices de réfraction de trois milieux (à l'avant, à l'intérieur et à l'arrière de la lentille) et R_1, R_2, les rayons de courbure des surfaces de la lentille. La valeur de R est considérée comme positive ou négative suivant que la surface est tournée vers le faisceau lumineux incident par sa face convexe ou concave. L'équation déterminant la coordonnée z_2 de l'image est de la forme

$$\frac{N_1}{z_1} - \frac{N_0}{z_0} + \frac{N_2}{z_2} - \frac{N_1}{z_1} = \Phi,$$

$$\frac{N_2}{z_2} - \frac{N_0}{z_0} = \Phi,$$

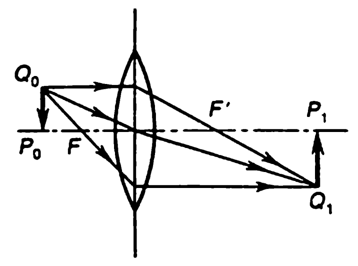


Fig. 20.7. Construction de l'image donnée par une lentille mince

où z_0, z_1, z_2 sont les coordonnées des points P_0, P_1, P_2. Si les indices

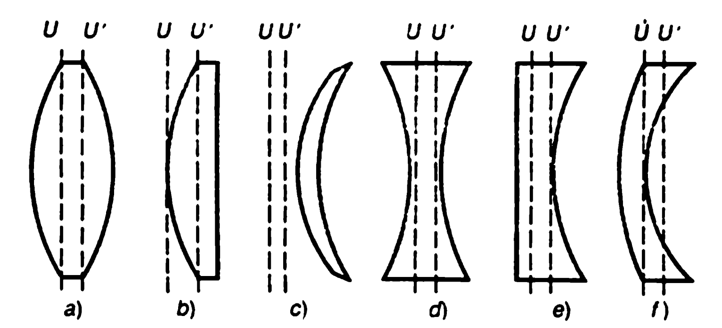


Fig. 20.8. Différents types de lentilles (U, U' sont les plans principaux ; la lumière tombe de gauche) :
lentilles convergentes : biconvexe (*a*), plan-convexe (*b*), ménisque convergent (*c*) ; lentilles divergentes : biconcave (*d*), plan-concave (*e*), ménisque divergent (*f*)

de réfraction sont les mêmes ($N_0 = N_2$) de part et d'autre de la lentille,

$$\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_0} = (N-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

où $N = N_1/N_0$. Les coordonnées des foyers de la lentille s'expriment par les formules

$$\frac{1}{z_0} = -(N-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right), \quad z_2 \to \infty;$$

$$\frac{1}{z_2} = (N-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right), \quad z_0 \to \infty,$$

c'est-à-dire que les foyers se situent à la même distance de part et d'autre de la lentille.

La figure 20.7 illustre la construction de l'image donnée par une lentille biconvexe. Les différents types de lentilles sont indiqués sur la figure 20.8.

Jusqu'ici nous n'avons considéré que les rayons paraxiaux. Mais les rayons non paraxiaux jouent eux aussi un rôle important dans les appareils d'optique : ils perturbent la netteté de l'image en produisant une tache au lieu d'un point. Ce phénomène porte le nom d'*aberration*. De plus, la variation de l'indice de réfraction avec la fréquence de la lumière conduit à ce que l'image d'un point blanc devient une tache colorée ; c'est une *aberration* dite *chromatique*.

FORMULES FONDAMENTALES

Equation de l'iconale

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)^2=N^2$$

Longueur optique d'un arc C compris entre les points A et B

$$L_C(AB)=\left(\int_A^B N\,\mathrm{d}l\right)_C$$

Equation pour déterminer la forme d'un rayon lumineux

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(N\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\right)=\mathrm{grad}\,N$$

Relation entre les coordonnées d'un point et de son image

$$\frac{N_1}{z_1}-\frac{N_0}{z_0}=\frac{N_1-N_0}{R}$$

Distances focales

$$f_0=\frac{N_0R}{N_1-N_0}, \qquad |f_1|=\frac{N_1R}{N_1-N_0}$$

Vergence

$$\Phi=\frac{N_0}{f_0}=-\frac{N_1}{f_1}$$

Formule de la lentille

$$\frac{1}{z_2}-\frac{1}{z_0}=(N-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

CHAPITRE 21

DIFFRACTION

§ 21.1. Pouvoir séparateur des appareils d'optique

Au chapitre précédent nous avons opéré sur les notions de rayon lumineux et de point luminescent en leur donnant un sens géométrique littéral. Or, en réalité ces notions sont une idéalisation liée au caractère lui-même de l'optique géométrique qui n'est valable que dans le cas où la longueur d'onde est très inférieure à toutes les dimensions linéaires intervenant dans un problème concret. C'est pourquoi les notions géométriques de rayon et de point ne se rapportent en toute rigueur qu'au cas limite quand $\lambda \to 0$.

Par suite de la nature ondulatoire de la lumière, c'est-à-dire de la valeur finie de λ, un point luminescent au sens géométrique du mot ne peut pas exister et au lieu du point nous avons toujours affaire à un certain paquet d'ondes, c'est-à-dire à une superposition d'ondes planes monochromatiques de fréquences différentes et de vecteurs d'onde différents.

Au § 16.5 nous avons examiné les paquets d'ondes et montré en particulier que les dimensions d'un paquet ne peuvent pas être beaucoup plus petites que la longueur d'onde. Plus exactement, nous avons obtenu les relations suivantes:

$$\Delta k_x \cdot \Delta x \geqslant 2\pi, \quad \Delta k_y \cdot \Delta y \geqslant 2\pi, \quad \Delta k_z \cdot \Delta z \geqslant 2\pi,$$

où Δx, Δy, Δz sont les dimensions du paquet dans les directions x, y, z et Δk_x, Δk_y, Δk_z, les dispersions dans le paquet suivant les projections du vecteur d'onde. Il résulte de ces relations que si nous désirons avoir affaire à une onde lumineuse proche de l'onde plane, c'est-à-dire si nous voulons que soient vérifiées les inégalités $\Delta k_x \ll k_x$, $\Delta k_y \ll k_y$, $\Delta k_z \ll k_z$ (**k** étant la valeur moyenne du vecteur d'onde dans le paquet), nous obtiendrons obligatoirement un paquet de grandes dimensions.

Une relation analogue a été obtenue aussi pour la dispersion en fréquence $\Delta\omega$ du paquet:

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \geqslant 2\pi,$$

où Δt est le temps d'existence du paquet (en un point déterminé de l'espace). De cette relation il découle une restriction sur la possibilité d'utiliser des paquets voisins des ondes monochromatiques

($\Delta\omega \ll \omega$) ; un tel paquet existe un temps « presque infini » et de ce fait ne peut pas servir de signal porteur d'information.

Les relations écrites ci-dessus jouent un rôle important lors de l'analyse de la question concernant le pouvoir séparateur des instruments d'optique. Examinons, par exemple, la formation d'une image stigmatique par un faisceau de rayons convergent (fig. 21.1). Soient $\mathbf{k}_1$ et $\mathbf{k}_2$ les vecteurs d'onde des rayons extrêmes utilisés pour la

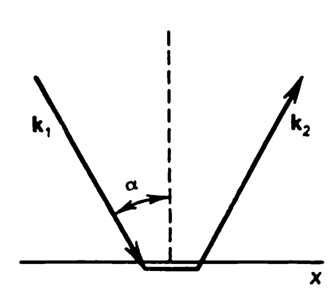


Fig. 21.1. Etablissement de la formule exprimant le pouvoir séparateur d'un appareil d'optique

Fig. 21.2. Divergence d'un faisceau plan parallèle

formation d'une image ponctuelle et tels que $k_1 = k_2 = k = 2\pi/\lambda$ (λ étant la longueur d'onde de la lumière utilisée). Dans ce cas pour l'intervalle dans lequel sont comprises les projections x des vecteurs d'onde des rayons constitutifs du faisceau nous avons

$$\Delta k_x = k_{1x} - k_{2x} = 2k \sin \alpha = (4\pi/\lambda) \sin \alpha,$$

où α est la moitié de l'angle formé entre les rayons extrêmes (*angle d'ouverture*).

Si Δk_x est connu, on peut évaluer facilement la quantité Δx, c'est-à-dire la dimension minimale de l'image dans la direction x:

$$\Delta x \sim \frac{2\pi}{\Delta k_x} \sim \frac{\lambda}{2 \sin \alpha}.$$

Nous voyons que l'image n'est pas parfaitement stigmatique: elle ne le serait que dans le cas limite où $\lambda \to 0$. Or, en réalité, les dimensions du « point luminescent » sont égales à $\lambda/(2 \sin \alpha)$. Ses dimensions minimales valent $\sim\lambda/2$ et correspondent à un angle d'ouverture $\alpha = \pi/2$. Telles sont également les dimensions minimales des objets qu'on peut discerner à l'aide des appareils d'optique et notamment aux microscopes (plus exactement, telles sont les distances minimales entre les détails des objets qu'on voit distincts l'un de l'autre). Pour réduire ces dimensions il faut utiliser la lumière de plus courte longueur d'onde;

pour des ondes de longueur d'onde déterminée il faut que la lumière tombe sur la surface de l'objet autant que possible sous une incidence rasante.

Mais dans tous les cas les points d'intersection des rayons ne sont pas des points géométriques mais des objets étendus aux dimensions de l'ordre de $\lambda/2$. Corrélativement, les rayons lumineux ne sont pas des lignes purement géométriques mais plutôt de gros traits présentant une certaine épaisseur.

Examinons un autre exemple, à savoir la formation d'un faisceau de rayons plans et parallèles de largeur finie (fig. 21.2). Supposons, par exemple, qu'en utilisant un diaphragme D présentant un trou de dimension a, nous voulons découper dans un faisceau de rayons parallèles un faisceau étroit de rayons rigoureusement plans et parallèles de largeur a. Ainsi, $\Delta x = a$ et donc $\Delta k_x \gg 2\pi/a$. D'un autre côté,

$$\Delta k_x = 2k \sin (\theta/2) \approx 2\pi\theta/\lambda,$$

où θ est l'angle de divergence du faisceau. Nous voyons qu'un parallélisme rigoureux ($\theta = 0$) est irréalisable: il est obligatoire que $\theta \gg \lambda/a$; on s'en approche d'autant plus près que la longueur d'onde de la lumière utilisée est plus courte.

A une distance d du trou la largeur du faisceau a pour valeur

$$a' = a + \theta d = a + \lambda d/a;$$

cette quantité est minimale si $a = \sqrt{\lambda d}$.

Il est important de remarquer que la source lumineuse détermine la fréquence de la lumière (et non sa longueur d'onde $\lambda = 2\pi/(\omega N)$, où N est l'indice de réfraction du milieu), si bien que des milieux d'indice de réfraction élevé permettent d'obtenir, à partir d'une même source, une lumière de longueur d'onde plus courte.

Notons également que toutes nos conclusions sont valables non seulement pour la lumière (et d'autres oscillations électromagnétiques) mais aussi pour tout processus ondulatoire pour lequel est valable le principe de superposition, c'est-à-dire de construction possible de paquets d'ondes. Cette question sera reprise avec plus de détails au paragraphe qui suit.

§ 21.2. Analogie entre l'optique et la mécanique

En optique géométrique, le rayon lumineux est similaire à la trajectoire d'une particule matérielle en mécanique. Ce n'est pas un effet du hasard que de nombreux physiciens, y compris le grand Newton, penchaient pour la théorie corpusculaire et non ondulatoire de la lumière, en considérant cette dernière comme constituée de particules distinctes, de corpuscules. C'est une des manifestations de l'analogie qui existe entre l'optique et la mécanique et qui a, comme il est apparu, un sens physique profond.

Elle est basée sur l'analogie entre le principe de Fermat et le *principe de Maupertuis* bien connu en mécanique. Comme nous

l'avons vu, le principe de Fermat affirme le minimum de chemin optique de la lumière, c'est-à-dire de l'intégrale

$$\int_1^2 \mathbf{k}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} \to \min$$

prise suivant le rayon lumineux par rapport au chemin optique calculé le long de n'importe quelle autre courbe joignant les mêmes points *1* et *2*. Quant au principe de Maupertuis, il affirme la valeur minimale de l'*intégrale d'action*

$$\int_1^2 \mathbf{p}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} \to \min$$

prise le long de la trajectoire vraie de la particule par rapport à la même intégrale calculée le long de toute autre courbe reliant les mêmes points *1* et *2*. Ici, $\mathbf{k}(\mathbf{r})$ est le vecteur d'onde lié à la fréquence par la relation $\mathbf{k}(\mathbf{r}) = \omega/v_{ph}(\mathbf{r})$, $\mathbf{p}(\mathbf{r})$, l'impulsion de la particule liée à son énergie E par la relation $\mathbf{p}(\mathbf{r}) = \sqrt{2m[E - U(\mathbf{r})]}$, $v_{ph}(\mathbf{r})$, la vitesse de phase de l'onde, $U(\mathbf{r})$, l'énergie potentielle de la particule, m, sa masse. Les vecteurs $\mathbf{k}$ et $\mathbf{p}$ sont orientés suivant les tangentes aux courbes. Dans le principe de Fermat c'est la fréquence ω de la lumière qui est considérée comme une constante donnée, et dans le principe de Maupertuis, c'est l'énergie E de la particule.

Pour nous convaincre de la validité du principe de Maupertuis, déterminons la variation de l'intégrale pour une variation infiniment petite de la courbe reliant les points *1* et *2* et annulons-la:

$$\delta \int_1^2 \sqrt{2m(E-U)}\, ds = \sqrt{2m} \int_1^2 \left\{ -\frac{\delta U\, ds}{2\sqrt{E-U}} + \sqrt{E-U}\, \delta\, ds \right\} = 0,$$

où ds est un élément de longueur de la courbe. Ici, le premier terme est lié à la variation de l'énergie potentielle $\delta U = (\partial U/\partial \mathbf{r})\, \delta \mathbf{r}$, et le second, à la variation du tronçon de chemin, de plus $\delta ds = (d\mathbf{r}/ds)\, \delta d\mathbf{r}$ puisque pour de petits tronçons de chemin Δs et de petits $\Delta \mathbf{r}$, $(\Delta s)^2 = (\Delta \mathbf{r})^2$. En intégrant le second terme par parties et en tenant compte que la variation $\delta \mathbf{r}$ est quelconque alors que les points *1* et *2* sont fixés, nous obtenons

$$\frac{d}{ds}\left(\sqrt{E-U}\, \frac{d\mathbf{r}}{ds}\right) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{E-U}} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}.$$

Remarquons maintenant que la grandeur $v = \sqrt{(2/m)(E - U)}$ est la vitesse de la particule et $ds/v = dt$ est le temps mis par la particule pour parcourir le chemin ds. Nous pouvons donc récrire la

dernière égalité sous la forme

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}.$$

Ainsi, en partant du principe de Maupertuis, nous avons obtenu une loi exacte du mouvement de la particule.

De l'analogie qui existe entre le principe de Fermat et le principe de Maupertuis il résulte une analogie entre le vecteur d'onde $\mathbf{k} \equiv \mathbf{k}(\mathbf{r})$ en optique et l'impulsion de la particule $\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}(\mathbf{r})$ en mécanique ($\mathbf{k} \to \mathbf{p}$) et, par voie de conséquence, entre le rayon lumineux (tangent en chaque point $\mathbf{r}$ au vecteur $\mathbf{k}(\mathbf{r})$) et la trajectoire (tangente en chaque point $\mathbf{r}$ au vecteur $\mathbf{p}(\mathbf{r})$).

Puis, de cette analogie entre les principes de Fermat et de Maupertuis il résulte qu'à l'indice de réfraction (ou, ce qui est équivalent, à la vitesse de phase) considéré comme une fonction de coordonnées, correspond, en mécanique, l'énergie cinétique $T \equiv E - U$. Si ces grandeurs sont indépendantes des coordonnées, la trajectoire et le rayon lumineux sont des droites.

La notion fondamentale utilisée en mécanique est celle de point matériel en mouvement. En optique, nous l'avons vu, le mouvement de signaux lumineux ponctuels est impossible par suite de la nature ondulatoire de la lumière, de sorte que c'est le paquet d'ondes qui doit être considéré comme un analogue du point matériel. C'est pourquoi à la vitesse v de la particule en mécanique on doit faire correspondre la vitesse de groupe v_g en optique

$$\mathbf{v}_g \to \mathbf{v}.$$

En nous rappelant que $\mathbf{v}_g = d\omega/d\mathbf{k}$ et $\mathbf{v} = dE/d\mathbf{p}$, nous sommes conduits à une analogie entre la fréquence en optique et l'énergie de la particule en mécanique:

$$\omega \to E.$$

Rappelons à ce propos que dans les principes de Fermat et de Maupertuis les grandeurs données sont précisément la fréquence et l'énergie.

Ainsi, on peut établir une analogie entre les notions principales de l'optique géométrique et celles de la mécanique de la particule matérielle.

Mais l'optique géométrique est un cas limite (quand $\lambda \to 0$) de l'optique ondulatoire plus générale. Qu'est ce qui correspond à l'optique ondulatoire en mécanique? La réponse est: la mécanique quantique. (Rappelons qu'à l'époque où cette science se développait le terme « mécanique ondulatoire » s'employait presque aussi souvent que le terme « mécanique quantique ».)

Voyons quelles sont les notions utilisées en mécanique quantique. A cet effet, il faut donner un énoncé quantitatif exact de l'analogie opto-mécanique. Cet énoncé est le suivant:

à une particule d'énergie E et d'impulsion $\mathbf{p}$ est associée une onde de fréquence ω et de vecteur d'onde $\mathbf{k}$ tels que

$$E = \hbar\omega, \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k},$$

où $\hbar = 1{,}0546 \cdot 10^{-34}$ J·s est une constante universelle appelée *constante quantique* ou *constante de Planck*. Il en résulte l'expression

$$\lambda = 2\pi\hbar/p$$

pour la longueur d'onde et l'expression $v_{\text{ph}} = \omega\lambda/(2\pi) = \hbar\omega/p$ pour la vitesse de phase de l'onde associée à la particule. La grandeur λ est appelée *longueur d'onde de De Broglie*.

Nous pouvons maintenant, sans nous occuper pour l'instant du sens de la fonction d'onde $\psi(\mathbf{r}, t)$ liée à la particule, écrire tout de suite, par analogie avec l'optique ondulatoire, l'équation d'onde de la particule

$$\Delta\psi - \frac{1}{v_{\text{ph}}^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0.$$

Puisqu'il s'agit d'une onde monochromatique

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad \omega = E/\hbar,$$

l'équation d'onde peut se récrire sous la forme $\Delta\psi + (\omega^2/v_{\text{ph}}^2)\psi = 0$, et comme $\omega^2/v_{\text{ph}}^2 = p^2/\hbar^2$ et $p^2 = 2m(E - U)$, où U est l'énergie potentielle de la particule, l'équation d'onde prend en définitive la forme suivante:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U(\mathbf{r})\psi = E\psi.$$

C'est cette équation qui définit la fonction d'onde d'une particule d'énergie E en mouvement dans un champ d'énergie potentielle $U(\mathbf{r})$. On l'appelle *équation d'onde de Schrödinger*.

La propriété la plus importante de cette équation consiste en ce que pour une énergie potentielle donnée $U(\mathbf{r})$ elle admet une solution non pour toutes mais seulement pour des valeurs bien déterminées de l'énergie E. Cet ensemble des énergies, appelé *spectre d'énergies* par analogie avec l'optique, peut être tant discontinu que continu (cf. l'ensemble de fréquences d'un guide d'ondes ou d'un résonateur, §§ 14.5, 14.6) et à chacune des valeurs admissibles de l'énergie correspond sa fonction d'onde ψ. En particulier, si l'on prend comme U l'énergie potentielle $U = -e^2/(4\pi\varepsilon_0 r)$ de l'électron dans le champ coulombien du proton, on obtient le spectre énergétique de l'atome d'hydrogène.

La fonction d'onde ψ a un sens probabiliste, mais nous ne nous y arrêterons pas et décrirons seulement des relations analogues aux relations $\Delta x \cdot \Delta k_x \geqslant 2\pi$, $\Delta t \cdot \Delta\omega \geqslant 2\pi$ pour un paquet d'ondes.

Puisque $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$ et $\omega = E/\hbar$, nous sommes conduits aux relations suivantes:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \gtrsim 2\pi\hbar, \quad \Delta y \cdot \Delta p_y \gtrsim 2\pi\hbar,$$
$$\Delta z \cdot \Delta p_z \gtrsim 2\pi\hbar, \quad \Delta t \cdot \Delta E \gtrsim 2\pi\hbar.$$

Ces relations sont appelées *relations d'incertitude de Heisenberg*. Leur sens est le suivant:

si une particule est localisée dans un intervalle Δx sur l'axe des x, la projection de son impulsion sur cet axe ne peut pas avoir une valeur bien déterminée mais se situe dans un certain intervalle Δp_x, tel que $\Delta x \cdot \Delta p_x \gtrsim 2\pi\hbar$ (ce que nous venons de dire pour l'axe des x s'applique intégralement aux axes y et z),
si une particule se trouve en un certain état non stationnaire pendant un temps fini Δt, cet état ne peut pas être rigoureusement monoénergétique et l'écart ΔE par rapport à l'état monoénergétique est lié à Δt par la relation $\Delta t \cdot \Delta E \gtrsim 2\pi\hbar$.

L'analogie opto-mécanique permet d'analyser sans peine le pouvoir séparateur des analogues des appareils d'optique utilisant d'autres particules au lieu de la lumière: à cet effet il suffit d'introduire dans les relations obtenues au paragraphe précédent la longueur d'onde de De Broglie associée à la particule correspondante au lieu de la longueur d'onde de l'onde lumineuse. Par exemple, dans un microscope électronique on utilise des électrons qui correspondent, au point de vue de la longueur d'onde, aux rayons X ($\lambda \sim 10^{-10}$ m); un tel microscope permet de voir des objets dont les dimensions ne sont que quelques fois plus grandes que celles de l'atome. Des objets encore plus petits, par exemple les noyaux atomiques (leurs dimensions sont de 10^{-15} m et moins), sont observés à l'aide d'accélérateurs de particules chargées dans lesquels on obtient des particules de hautes énergies. Plus haute est l'énergie, plus grande est l'impulsion des particules, c'est-à-dire plus petite est la longueur d'onde de De Broglie et donc plus petites sont les dimensions des objets qu'on peut « voir » à l'aide d'un tel appareil.

§ 21.3. Principe de Huygens et diffraction de Fresnel

L'optique géométrique est valable, comme nous le savons, dans le cas limite où la longueur d'onde est infinitésimale et tend vers zéro: $\lambda \to 0$. Si les valeurs de λ sont très petites mais finies, on constate des écarts à l'optique géométrique que l'on désigne sous le terme commun de *diffraction*. Par exemple, si la lumière rencontre sur son parcours un écran opaque, on doit observer suivant l'optique géométrique une frontière bien précise entre la lumière et l'ombre derrière l'écran. Or, en réalité une telle frontière ne se forme pas: la lumière pénètre dans la région d'ombre, et la région de lumière présente des portions dont l'éclairement est affaibli.

Pour de faibles valeurs de λ les phénomènes de diffraction peuvent être étudiés par la méthode générale que nous allons décrire ici.

Elle est basée sur le *principe de Huygens* dont le sens est le suivant. Supposons que la lumière émise par une source S rencontre sur son parcours un écran opaque présentant un trou. Il s'agit de déterminer le champ (électrique ou magnétique) en un certain point A se trouvant en arrière de l'écran (fig. 21.3). Suivant le principe de Huygens il convient d'imaginer que le trou est recouvert d'une surface Σ quelconque et de considérer cette surface comme une source d'ondes

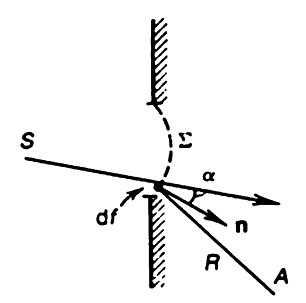


Fig. 21.3. Principe de Huygens

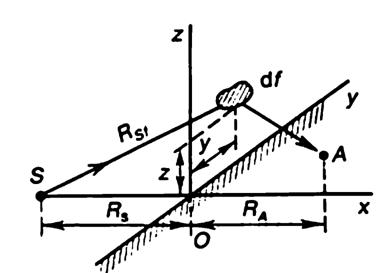


Fig. 21.4. Diffraction de Fresnel

secondaires qui se propagent derrière l'écran et passent en particulier par le point A. Quant à la source réelle S, elle ne sert qu'à créer des sources secondaires sur la surface Σ mais n'apporte elle-même de contribution directe au champ en point A.

Chaque élément df de la surface Σ est une source secondaire. Le champ produit par df est proportionnel au champ $u \exp(-i\omega t)$ qu'engendrerait la source primaire S sur l'élément de surface df si l'écran était absent. En outre, le champ produit par df est proportionnel à $df \cos \alpha$, où α est l'angle que la normale $\mathbf{n}$ à df fait avec la direction du rayon lumineux tombant sur df (en particulier, si l'élément de surface est parallèle au rayon, celui-ci « glisse » sur cet élément sans l'influencer).

Enfin, pour calculer le champ au point A se trouvant à la distance R de df, il faut tenir compte que l'amplitude varie en raison inverse de R d'une part et de l'effet de retard d'autre part. Ce dernier consiste en ce que pour déterminer le champ au point A à l'instant t, il faut prendre le champ sur l'élément de surface df à l'instant $t - R/c$. Le champ étant supposé monochromatique, le champ engendré par df au point A peut finalement s'écrire sous la forme $(au/R) \exp[-i\omega(t - R/c)]$, où a est une constante. En faisant la somme des champs produits au point A par tous les éléments df de la surface Σ, nous trouvons le champ résultant:

$$u_A = a \int_{\Sigma} \frac{u}{R} e^{ikR} \cos \alpha \, df,$$

où $k = \omega/c$ (le facteur exp $(-i\omega t)$ est omis). C'est la formulation mathématique du principe de Huygens. Nous n'allons pas calculer ici la constante a dont la valeur est sans importance pour l'exposé qui suit (elle est égale à $k/(2\pi i)$).

Nous commencerons l'étude des phénomènes de diffraction par le cas le plus simple, celui de la *diffraction* dite *de Fresnel* ou à distance finie, lorsque tant la source primaire que le point d'observation se trouvent à des distances finies (et non infinies!) de l'écran. Puisqu'il s'agit de faibles écarts à l'optique géométrique, un rôle prépondérant est joué par des éléments de la surface Σ qui se trouvent au voisinage de la droite joignant S et A. Autrement dit, seules de petites portions des bords de l'écran, qu'on peut considérer comme rectilignes, jouent un rôle important. Enfin, ce qui compte c'est la variation de phase des champs et non celle d'amplitude. Cela signifie que dans le cas de la diffraction de Fresnel le champ au point A peut s'écrire sous la forme

$$u_A = C^{te} \int_{\Sigma} \exp\left[ik(R_{Sf}+R_{fA})\right]\cdot df.$$

où R_{Sf} et $R_{fA} \equiv R$ sont les distances de la source S à l'élément de surface df et de cet élément au point d'observation A. (Le facteur $1/R$ entrant dans la formulation du principe de Huygens ainsi que l'amplitude du champ produit par la source, y compris cos α, sont inclus dans la constante.)

Supposons que l'écran se confond avec le demi-plan yz inférieur et la surface Σ avec le demi-plan yz supérieur, de sorte que l'axe des y est dirigé suivant le bord de l'écran (sur la figure 21.4 l'écran est couvert de hachures). Supposons également que l'axe des x est dirigé suivant la normale au plan de l'écran et que la source S se situe sur cet axe à la distance R_S à gauche de l'origine des coordonnées O, alors que le point d'observation a pour coordonnées R_A, O, d. Dans ces conditions, $R_{Sf} = \sqrt{R_S^2 + y^2 + z^2}$, $R_{fA} = \sqrt{R_A^2 + y^2 + (z-d)^2}$, où (d, y, z) sont les coordonnées de l'élément de surface df. Puisque, comme il a été indiqué, seuls les éléments df voisins du point O sont importants, ces expressions peuvent être simplifiées en considérant que y, z, $(z-d)$ sont petits par rapport à R_A et R_S:

$$R_{Sf} = R_S + \frac{y^2+z^2}{2R_S}\,; \quad R_{fA} = R_A + \frac{y^2+(z-d)^2}{2R_A}.$$

En introduisant ces expressions dans la formule exprimant u_A et en tenant compte que $df = dy\,dz$, nous obtiendrons le produit de deux intégrales: l'une par rapport à y et l'autre par rapport à z. C'est la variation du champ u_A en fonction de la coordonnée d du point d'observation A qui nous intéresse. Cette variation est

contenue dans l'intégrale sur z qui est donc la seule que nous écrirons

$$u_A = \mathrm{C^{te}} \int_0^\infty \exp\left\{\frac{ik}{2}\left[\frac{z^2}{R_S} + \frac{(z-d)^2}{R_A}\right]\right\}\cdot dz.$$

La limite inférieure d'intégration est évidemment $z = 0$; quant à la limite supérieure, nous l'avons posée égale à l'infini parce que le domaine de fortes valeurs de z est sans importance. En introduisant au lieu de z une nouvelle variable

$$\eta = \sqrt{\frac{k(R_A+R_S)}{2R_A R_S}}\left(z - \frac{R_S d}{R_A+R_S}\right),$$

il est facile de mettre cette intégrale sous la forme suivante:

$$u_A = \mathrm{C^{te}} \int_{-w}^{\infty} e^{i\eta^2}\, d\eta,$$

$$w = d\sqrt{\frac{kR_S}{2R_A(R_A+R_S)}}.$$

Fig. 21.5. Intensité lors de la diffraction de Fresnel par le bord de l'écran

Cette dernière intégrale est appelée *intégrale de Fresnel*. Vu que w contient comme facteur la quantité $k^{1/2} \sim \lambda^{-1/2}$ et nous envisageons le domaine des ondes très courtes, $|w| \gg 1$. Dans ces conditions il convient de distinguer deux cas: $d > 0$, c'est-à-dire $w > 0$, et $d < 0$, c'est-à-dire $w < 0$. Dans le premier cas, le point A se situe dans la région éclairée, et dans le second cas, dans la région d'ombre. Nous avons dans le premier cas

$$\int_{-w}^{\infty} e^{i\eta^2}\, d\eta \approx (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2iw}\, e^{iw^2} \quad (w > 0)$$

et dans le second cas

$$\int_{-w}^{\infty} e^{i\eta^2}\, d\eta \approx \frac{e^{iw^2}}{2iw} \quad (w < 0).$$

Le carré du module de l'intégrale de Fresnel détermine l'intensité lumineuse I. La courbe de variation de l'intensité en fonction de w est représentée par la figure 21.5 (I_0 étant l'intensité lumineuse loin de l'écran; les régions de lumière et d'ombre géométrique sont désignées respectivement par L et O). Nous voyons que dans la région d'ombre géométrique l'intensité lumineuse ne s'annule pas brusquement, au contraire, sa décroissance est monotone. Dans la région éclairée, l'intensité lumineuse n'est pas partout égale à I_0:

au voisinage de l'écran elle est quatre fois plus faible que I_0, puis elle devient supérieure à I_0 et ensuite elle tend, en oscillant progressivement, vers I_0.

§ 21.4. Diffraction de Fraunhofer

En examinant la diffraction de Fresnel au cours du paragraphe précédent, nous avons supposé que la source lumineuse S et le point d'observation A se trouvaient à des distances finies de l'écran. Etudions maintenant les phénomènes de diffraction dans le cas où S et A sont à l'infini. Cela signifie pratiquement que la source de lumière est placée dans un des foyers du système optique, de sorte que la lumière émerge du système sous forme d'un faisceau de rayons

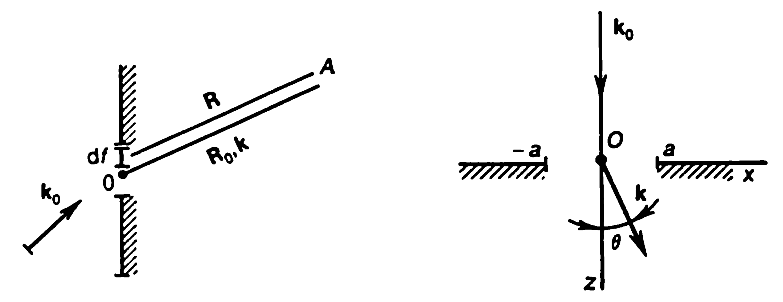


Fig. 21.6. Diffraction de Fraunhofer

Fig. 21.7. Diffraction par une fente longue

parallèles tombant sur un écran présentant une ou plusieurs ouvertures. La direction de propagation de la lumière ayant passé par les ouvertures de l'écran diffère de la direction de propagation du faisceau incident. C'est là que réside le phénomène de diffraction. Ainsi, il s'agit de la diffraction, près de l'écran, des directions des rayons lumineux; une telle diffraction est appelée *diffraction de Fraunhofer* ou encore diffraction à l'infini.

Cherchons le champ de la lumière diffractée. A cet effet, partons, comme dans le cas de la diffraction de Fresnel, du principe de Huygens en prenant comme surface Σ le plan qui ferme l'ouverture. En choisissant dans ce plan un certain point O comme origine des coordonnées (fig. 21.6) et en désignant par $\mathbf{r}$ le rayon vecteur ayant le point O pour origine et l'élément de surface df pour extrémité, on peut représenter le champ de la lumière incidente au point $\mathbf{r}$ de la surface Σ sous la forme $u = U \exp(i\mathbf{k}_0\mathbf{r})$, où $\mathbf{k}_0$ est le vecteur d'onde de l'onde incidente (plane par définition) et U, son amplitude au point O.

Pour pouvoir appliquer le principe de Huygens il nous faut maintenant trouver $\exp(ikR)$. Tenons compte de ce que le point

d'observation se trouve très loin de l'écran et de ce fait la direction du rayon diffracté se confond avec celle du rayon vecteur $\mathbf{R}_0$ de ce point ; autrement dit, le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ de la lumière diffractée est orienté suivant $\mathbf{R}_0$. Puis, $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$, où $r \ll R_0$, si bien que $R = \sqrt{(\mathbf{R}_0 - \mathbf{r})^2} \approx R_0 - \mathbf{r}\mathbf{R}_0/R_0 = R_0 - \mathbf{r}\mathbf{k}/k$ et donc

$$\exp(ikR) = \exp(ik_0R_0)\cdot\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}).$$

En introduisant cette expression et l'expression du champ u sur la surface Σ dans l'intégrale intervenant dans la formulation du principe de Huygens, nous obtenons

$$u = \frac{a\exp(ikR_0\cos\alpha)}{R_0}\int_{\Sigma}\exp[i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})\mathbf{r}]\,df$$

(α étant comme précédemment l'angle d'incidence du rayon sur l'élément de surface df; au dénominateur R est remplacé par R_0 et $1/R_0$ est sorti de l'intégrale).

L'exponentielle sous le signe d'intégration comprend la différence entre les vecteurs d'onde des ondes incidente et diffractée. Ces vecteurs sont de même module et égaux à ω/c. La diffraction des directions des rayons étant déterminée par la variation de u_A en fonction de $(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})$, écrivons u_A sous la forme

$$u_A = C^{te}\int_{\Sigma}\exp[i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})\mathbf{r}]\,df.$$

Notons qu'à la différence de la diffraction de Fresnel dans laquelle seule une petite portion de la surface Σ apportait une contribution importante, dans la diffraction de Fraunhofer toute cette surface présente de l'importance.

Examinons quelques cas concrets. Commençons par la diffraction par une fente infiniment longue à frontières parallèles pratiquée dans un écran opaque (fig. 21.7). Le vecteur d'onde $\mathbf{k}_0$ de l'onde incidente est orienté suivant la normale au plan (x, y) de l'écran ; le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ du rayon diffracté se situe, comme il résulte des considérations de symétrie, dans le plan (z, x) en faisant avec $\mathbf{k}_0$ l'angle θ (angle de diffraction). Si la largeur de la fente est égale à $2a$, nous avons

$$u_A = C^{te}\int_{-a}^{a}\exp(-ik\theta x)\,dx$$

(nous avons tenu compte que $k_x = k\sin\theta \sim k\theta$ et inclus dans la constante l'intégrale sur y égale à la longueur de la fente). L'intégration donne

$$u_A = C^{te}\,\frac{\sin k\theta a}{k\theta}.$$

L'intensité de l'onde diffractée dans l'intervalle d'angles $d\theta$ est proportionnelle à $|u_A|^2$: $dI = C^{te} |u_A|^2 d\theta$. Cherchons le coefficient de proportionnalité. A cet effet, intégrons dI sur l'angle θ et égalons l'intensité totale ainsi obtenue à l'intensité I_0 de la lumière tombant sur la fente; nous obtiendrons $C^{te} = I_0 k/(\pi a)$. Ainsi,

$$dI = \frac{I_0}{\pi a k} \frac{\sin^2 (k\theta a)}{\theta^2} d\theta.$$

La variation de l'intensité du rayon diffracté avec l'angle de diffraction est montrée sur la figure 21.8, où $\eta = ka\theta$. Nous voyons

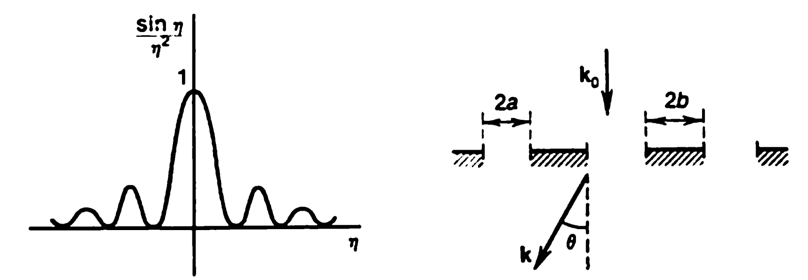


Fig. 21.8. Distribution angulaire de l'intensité lors de la diffraction par une fente longue

Fig. 21.9. Réseau de diffraction

que l'intensité présente une série de maximums rapidement décroissants, séparés par des minimums pour $\theta = \pi n/(ka)$ ($n = \pm 1, \pm 2, \ldots$) où elle s'annule.

Après avoir établi expérimentalement la position de maximums ou de minimums, on peut en principe déterminer la quantité $ka = 2\pi a/\lambda$; autrement dit, connaissant a on peut trouver la longueur d'onde λ. Mais la précision de détermination de la longueur d'onde à l'aide de la diffraction par une seule fente n'est pas élevée parce que les maximums et les minimums obtenus ne sont pas suffisamment nets.

Des figures de diffraction sensiblement plus nettes s'obtiennent dans la diffraction non par une seule mais par une série de fentes identiques parallèles et équidistantes. Un tel ensemble de fentes s'appelle *réseau de diffraction* (fig. 21.9). Dans ce cas on doit entendre par la surface Σ l'ensemble des surfaces planes fermant toutes les ouvertures et, comme elles sont toutes identiques et $\theta \ll 1$, nous avons

$$u_A = u_A^{(1)} \sum_{n=0}^{N-1} \exp(-2ink\theta d) = u_A^{(1)} \frac{1-\exp[-2i(N-1)k\theta d]}{1-\exp(2ik\theta d)},$$

où $u_A^{(1)}$ est le champ au point A produit par une seule fente, N, le nombre de fentes et $d = a + b$. La somme qui intervient dans cette expression détermine les interférences des rayons diffractés par diverses fentes.

L'intensité de la lumière diffractée dans l'intervalle d'angles $d\theta$ est proportionnelle à $|u_A|^2$; le coefficient de proportionnalité peut être déterminé en égalant à I_0 l'intensité lumineuse résultante produite par toutes les fentes. En définitive, nous obtenons

$$dI = \frac{I}{\pi Nak}\,\frac{\sin^2(ka\theta)}{\theta^2}\left(\frac{\sin Nk\theta d}{\sin k\theta d}\right)^2 d\theta.$$

Ici, le premier facteur détermine la distribution de l'intensité correspondant à une seule fente, et le second facteur est dû à la présence du réseau de diffraction. C'est précisément ce dernier qui conduit, pour des angles de diffraction $\theta_n = \pi n/(kd)$, (ici, $n = 0, \pm 1, \ldots$), à la formation de maximums très nets. En effet, la fonction $dI/d\theta$ passe par des minimums (s'annule) pour $\theta = \pi m/(Nkd)$, où $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Par exemple, le premier maximum pour $\theta = 0$ est suivi d'un premier minimum pour $\theta = \pi/(Nkd)$. Mais cet angle est très petit si le nombre de fentes N est grand. On peut en conclure que la largeur d'un maximum est de l'ordre de $\pi/(Nkd)$.

Au voisinage des maximums, c'est-à-dire pour $\theta = \pi n/(kd) + \vartheta$, où $|\vartheta| \ll n\pi/(kd)$, l'intensité lumineuse est de la forme

$$dI = \frac{I_0}{\pi ak}\left(\frac{kd}{\pi n}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\pi na}{d}\right)\frac{1}{N}\left(\frac{\sin Nk\vartheta d}{\sin \vartheta kd}\right)^2 d\vartheta.$$

Si le nombre N de fentes est élevé, le produit de deux derniers facteurs passe par un maximum aigu pour $\nu = 0$. A la limite, quand $N \to \infty$, la largeur du maximum s'annule alors que son hauteur devient infiniment grande, parce que

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sin^2 Nx}{\pi N x^2} = \delta(x).$$

En se servant de cette formule, il est facile de calculer l'intensité lumineuse dans le n-ième maximum:

$$I^{(n)} = I_0 \frac{d}{\pi^2 a}\,\frac{\sin^2(n\pi a/d)}{n^2}.$$

Nous voyons que lorsque le numéro du maximum augmente, l'intensité décroît comme n^{-2}.

La netteté des figures de diffraction obtenues à l'aide d'un réseau à grand nombre de fentes permet de mesurer la longueur d'onde de la lumière avec une très haute précision.

La diffraction par deux fentes est utilisée pour la mesure des diamètres angulaires des étoiles et des distances angulaires entre les deux composants d'une étoile double. On obtient dans ce cas deux

figures de diffraction décalées l'une par rapport à l'autre d'un angle φ égal à l'angle que font entre eux les rayons extrêmes partant de la source (ou les rayons issus de deux sources voisines). En faisant varier la distance d entre les milieux des fentes, on peut régler la distance entre les maximums dans chacune des figures de diffraction. Le plus souvent, on fait varier d de telle sorte que les maximums d'une figure se confondent avec les minimums de l'autre ; dans ce cas $\varphi = \lambda/(2d)$.

Nous avons examiné le phénomène de diffraction par une série de fentes parallèles. On peut examiner d'une manière analogue la diffraction par un réseaux bidimensionnel constitué d'une série d'ouvertures rectangulaires identiques et identiquement disposées, pratiquées dans un écran opaque. Dans ce cas il convient de trouver la diffraction par une des ouvertures et ensuite de prendre en compte les interférences des champs produits par toutes les ouvertures. Si les rayons vecteurs des centres des ouvertures sont égaux à $(n\mathbf{a} + m\mathbf{b})$, où $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ sont les constantes de réseau et n, m, des nombres entiers, le facteur supplémentaire résultant d'une telle interférence est de toute évidence égal à $\sum_{n,m} \exp [i (n\mathbf{a} + m\mathbf{b}) \mathbf{k}]$.

Les réseaux de diffraction à trois dimensions nous sont fournis par la nature elle-même : ce sont les cristaux (utilisés à cette fin pour la première fois par Laue en 1913). Le rôle des ouvertures dispersives est joué par les atomes situés aux nœuds du réseau cristallin. Connaissant la loi de la dispersion des rayons par l'atome et en tenant compte des interférences des rayons diffusés par divers atomes, on peut trouver la diffraction par un cristal tout entier. Vu que la constante de réseau cristallin $a \sim 10^{-10}$ m, le cristal constitue un bon réseau de diffraction pour des ondes électromagnétiques correspondant aux rayons X ($\lambda \sim 10^{-10}$ m). En effet, la différence entre les chemins de deux rayons *1* et *2* réfléchis sur deux plans cristallins voisins est égale à $2a \sin \theta$ (fig. 21.9) ; c'est pourquoi une interférence positive se produira pour $2d \sin \theta = n\lambda$, où n est un nombre entier (*condition de Bragg-Wulff*).

Avant de clore ce paragraphe, arrêtons-nous à une propriété importante des *écrans complémentaires*, c'est-à-dire de deux écrans dont les ouvertures sont telles que leur superposition donne un écran totalement opaque. La propriété de tels écrans est que les figures de diffraction qu'ils donnent sont identiques. En particulier, la diffraction par un trou circulaire pratiqué dans un écran opaque, par exemple, est la même que celle donnée par un cercle opaque ou une sphère opaque de même rayon. Dans les deux cas l'intensité de la lumière diffractée dans un élément do d'angles solides s'exprime par

$$dI = I_0 \frac{J_1^2 (k\theta R)}{\pi\theta^2} \, do,$$

où R est le rayon du trou ou de la sphère (du cercle), θ, l'angle de diffraction, I_0, l'intensité totale de la lumière tombant sur le trou (la sphère, le cercle) et $J_1(x)$, la fonction de Bessel. L'intensité présente un maximum principal pour $\theta = 0$ et s'annule pour $k\theta R \approx \approx 1,2; 2,2; \dots$ (la lumière est supposée tombant suivant la normale au plan du trou).

Suivant l'analogie opto-mécanique une formule analogue détermine également la diffraction des ondes de De Broglie par une ouverture ou une sphère, notamment, la diffraction ou la diffusion des neutrons rapides sur le noyau opaque de rayon R. Il faut seulement que la longueur d'onde de De Broglie associée au neutron soit petite par rapport au rayon R du noyau. L'étude de la diffusion de tels neutrons par les noyaux atomiques permet de déterminer expérimentalement les rayons de noyaux lourds.

Il importe de noter que suivant la même analogie opto-mécanique les neutrons subissent une diffraction par les cristaux tout à fait analogue à celle des rayons X. Il résulte de la condition de Bragg-Wulff que cet effet présente de l'importance pour les neutrons lents (ayant une vitesse de l'ordre de 10^3 m/s, ce qui correspond à une longueur d'onde $\lambda \sim 10^{-10}$ m), alors que pour la diffraction par un noyau distinct ($R \sim 10^{-15}$ m) les neutrons doivent être 10^5 plus rapides.

§ 21.5. Holographie

La diffraction et l'interférence sont à la base d'un *procédé dit holographique* d'obtention d'images optiques (découvert par Gabor en 1947). Ce procédé consiste à enregistrer au lieu de la distribution bidimensionnelle de la luminance du rayonnement diffusé par l'objet (comme c'est le cas de la photographie ordinaire), l'amplitude et la phase d'une onde lumineuse diffusée. Il en résulte à la reconstitution de l'hologramme une copie exacte de l'onde enregistrée qui porte l'information sur l'objet représenté. Si l'objet est opaque, on obtient une information sur le caractère de sa surface, alors que dans le cas d'un objet transparent on peut obtenir une information additionnelle sur la répartition de l'indice de réfraction à l'intérieur de l'objet. A cet effet l'objet est éclairé avec la lumière laser et l'onde diffusée par l'objet tombe sur une plaque photographique. En même temps, une partie de la lumière issue du même laser tombe directement sur la plaque photographique. Cette onde, qui n'a subi aucune diffusion, est appelée *onde de référence* (fig. 21.10, *a*). Mais une chose très importante est que l'onde diffusée et l'onde de référence sont cohérentes entre elles. L'interférence de ces deux ondes enregistrée sur la plaque photographique donne une certaine figure sous forme d'un réseau de diffraction irrégulier d'un type particulier. C'est l'hologramme de l'objet.

Maintenant si, après avoir enlevé l'objet, on éclaire l'hologramme avec la seule onde de référence, celle-ci subit une diffraction par l'hologramme comme par un réseau de diffraction. L'onde diffrac-

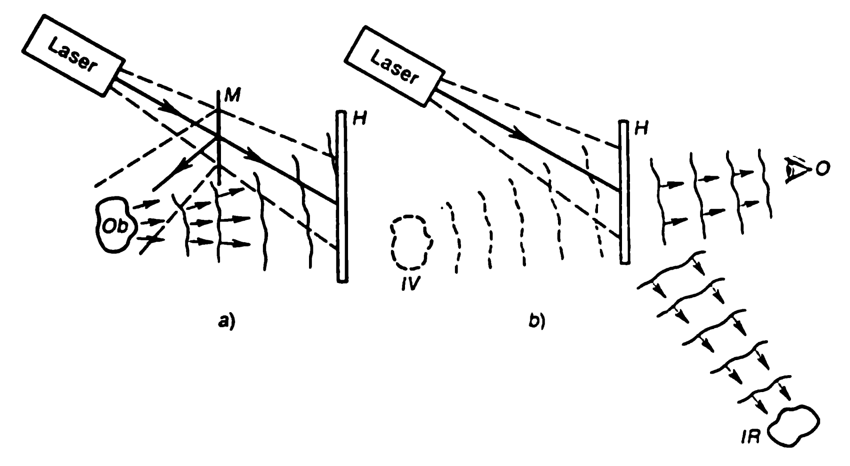


Fig. 21.10. Schéma de l'enregistrement d'un hologramme (*a*) et de la reconstitution de l'objet (*b*)

M, miroir semi-transparent; *Ob*, objet; *H*, hologramme; *IV*, image virtuelle; *IR*, image; réelle; *O*, observateur

tée coïncide avec l'onde diffusée par l'objet lors de l'enregistrement de l'hologramme (appelée *onde objet*). Ainsi,

l'image de l'objet peut être vue en relief si l'on éclaire la diapositive avec le seul faisceau lumineux de référence; l'image apparaît derrière l'hologramme si on le regarde sous un angle par rapport au faisceau de référence (fig. 21.10, *b*).

Ainsi, l'essentiel de la méthode holographique consiste à illuminer la plaque photographique, sur laquelle est enregistrée la figure d'interférence de plusieurs ondes lumineuses, seulement par certaines de ces ondes; alors les autres ondes se trouvent restituées par suite de la diffraction.

Illustrons-le de la façon suivante. Imaginons que le réseau holographique est produit par deux faisceaux lumineux *1* et *2* (fig. 21.11). Soient A et B deux franges de diffraction voisines distantes de a. Il est clair que $a(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2) = \lambda$, où λ est la longueur d'onde. Eclairons maintenant le réseau de diffraction avec le seul faisceau *1*. Si β_1 est l'angle d'incidence de la lumière, le minimum le plus proche se forme sous un angle de diffraction β_2 pour lequel $\sin\beta_1 + \sin\beta_2 = \lambda/a$. Dans notre cas $\beta_1 = \varphi_1$ et donc $\beta_2 = \varphi_2$. En d'autres termes, en illuminant l'hologramme avec une seule onde (*1*), nous restituons la deuxième onde (*2*) qui a été utilisée lors de l'enregistrement de l'hologramme.

Il est facile de saisir que si au contraire nous avions utilisé le faisceau *2*, nous aurions reconstitué le faisceau *1*. Cette propriété commune à tous les hologrammes s'énonce généralement comme suit :

le faisceau de référence et le faisceau objet sont tout à fait équivalents.

C'est sur cette propriété qu'est fondée la *méthode de correction des fronts d'onde* : un faisceau laser à front d'onde complexe est transformé à l'aide d'un hologramme préparé à l'avance (pour cet hologramme le faisceau laser constitue un faisceau objet) en un faisceau

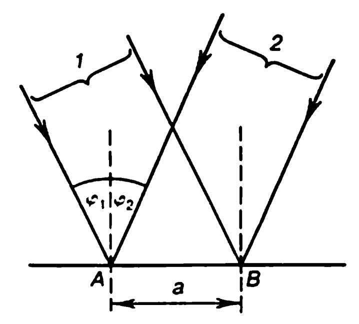


Fig. 21.11. Réseau holographique produit par deux faisceaux cohérents

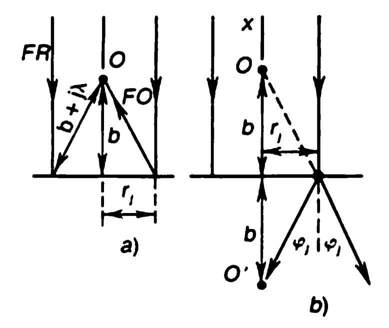


Fig. 21.12. Schéma de l'enregistrement (*a*) et de la reconstitution (*b*) de l'hologramme d'un point à l'aide d'une onde de référence plane

dont le front d'onde plan coïncide avec celui du faisceau utilisé pour l'enregistrement de l'hologramme. Cette méthode a été développée par l'utilisation en tant que convertisseur d'un hologramme dynamique qui permet de suivre la variation dans le temps du front d'onde du faisceau laser à transformer.

Considérons à titre d'un autre exemple l'hologramme d'un point illuminé par une onde plane (fig. 21.12). Sur la figure 21.12, *a*, on a représenté un faisceau de référence (*FR*) et un faisceau objet (*FO*). On voit que l'hologramme d'un point représente un ensemble des anneaux dont les rayons r_j ($j = 0, 1, \ldots$) se déterminent par l'équation

$$r_j^2 = (b + j\lambda)^2 - b^2 = 2jb\lambda + j^2\lambda^2$$

(appelée *réseau de zones de Fresnel*).

Soit maintenant une onde plane tombant sur un tel réseau et φ_j, l'angle de diffraction par le j-ième anneau (fig. 21.12, *b*). Alors $\Delta r_j \sin \varphi_j = n\lambda$, où $n = 0, \pm 1, \ldots$, et $\Delta r_j = (b\lambda + j\lambda^2)/r_j$ est la distance entre les anneaux voisins. Pour $n = \pm 1$ les rayons diffractés coupent l'axe de symétrie x en deux points $x = \pm b$ puisque $x = r_j \operatorname{cotg} \varphi_j = \pm b$. Ainsi, pour $n = \pm 1$ les ondes diffrac-

tées se ramènent à une onde sphérique divergente de centre au point O (lors de l'enregistrement de l'hologramme c'était un point divergent) et à une onde sphérique convergente de centre au point O' qui est l'image du point de départ O (fig. 21.12). Nous voyons que l'illumination de l'hologramme d'un point avec l'onde de référence donne deux images de ce point: une virtuelle et une réelle.

Indiquons, en plus de la propriété de réversibilité des faisceaux, encore deux propriétés importantes des hologrammes. Premièrement, si l'onde diffusée par chacun des points de l'objet remplit lors de l'enregistrement toute ouverture de l'hologramme, chaque portion de l'hologramme est capable de reconstituer la totalité de l'image de l'objet (c'est seulement la netteté de l'image qui devient moins bonne lorsque le nombre de portions diminue), ce qui signifie que par rapport à la photographie ordinaire l'holographie donne non seulement une image en relief mais encore une image plus sûre du point de vue de la conservation de l'information sur l'objet. Deuxièmement, si l'on fait une copie par contact (analogue du positif) de l'hologramme (comme d'un négatif), l'image reconstituée d'après la copie sera identique à celle reconstituée d'après l'original (cette propriété est une conséquence de la propriété des écrans complémentaires mentionnée au paragraphe précédent).

Il existe des hologrammes, proposés par J. Denissuk qui présentent des propriétés bien particulières. Grâce à une sélectivité spectrale suffisamment élevée ils peuvent être restitués en lumière blanche incohérente. En outre, l'image reconstitue non seulement la structure de l'objet mais encore l'information sur sa couleur. De tels hologrammes peuvent être enregistrés sur des matériaux photosensibles les plus variés, y compris les divers milieux non linéaires (v. chap. 22) dont les caractéristiques optiques dépendent de l'intensité du rayonnement incident. Les hologrammes de ce type sont dits *dynamiques* parce qu'ils n'existent que pendant l'action des faisceaux d'enregistrement et s'effacent spontanément lorsque l'illumination est supprimée.

A la différence de l'holographie ordinaire dont le but est l'obtention des images des objets, le but de l'holographie dynamique consiste à transformer les faisceaux d'enregistrement eux-mêmes (soit en intensité, soit en spectre spatial). Les méthodes de l'holographie dynamique permettent d'effectuer une analyse corrélative des images continuellement variables, de réaliser des opérations simples (addition, soustraction) et intégrales (transformation de Fourier, convolutions) sur des images à deux dimensions, de réaliser des amplificateurs optiques de faisceaux et d'images.

FORMULES FONDAMENTALES

Pouvoir séparateur d'un appareil d'optique	$\Delta x = \dfrac{2\pi}{\Delta k_x} \sim \dfrac{\lambda}{2 \sin \alpha}$
Angle de divergence d'un faisceau	$\theta \gtrsim \lambda / a$

Analogie opto-mécanique	$\mathbf{k} \to \mathbf{p}$
	$\omega \to E$
	$\mathbf{v}_g \to \mathbf{v}$
Principe de Huygens	$u_A = \frac{k}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{u}{R} e^{ikR} \cos\alpha \, df$
Diffraction par une fente	$dI = \frac{I_0}{\pi N a k} \frac{\sin^2(ka\theta)}{\theta^2} \left(\frac{\sin Nk\theta d}{\sin k\theta d} \right)^2 d\theta$
Diffraction par une ouverture circulaire (ou un disque)	$dI = I_0 \frac{J_1^2(k\theta R)}{\pi\theta^2} do$

IV. INTERACTION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES AVEC LES PARTICULES ET LES ONDES

CHAPITRE 22

OPTIQUE NON LINÉAIRE

§ 22.1. Polarisations et susceptibilités non linéaires

Les équations de Maxwell pour les milieux matériels font intervenir deux paires de vecteurs: les vecteurs **E** et **D** caractérisant le champ électrique et les vecteurs **H** et **B** caractérisant le champ manétique. Ces vecteurs sont liés par les relations

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mu_0^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{H} + \mathbf{J},$$

où **P** est la polarisation et **J**, l'aimantation. Dans le cas de champs suffisamment faibles **P** et **J** sont des fonctions linéaires des champs **E** et **H**; mais dans le cas général **P** et **J** sont des fonctions compliquées des intensités de champs. Dans les ferromagnétiques, les ferro-électriques et le plasma, le caractère linéaire de la relation entre **J** et **H** et entre **P** et **E** est rapidement troublé même pour des champs relativement peu intenses, alors que dans la plupart des substances les relations non linéaires entre les polarisations et les champs ne se manifestent en règle générale que dans le domaine des champs suffisamment intenses. En particulier, dans les diélectriques, les effets non linéaires aux fréquences optiques n'interviennent que pour $E \sim 10^8$ V/m. De tels champs peuvent être produits par les lasers. Avant l'avènement des lasers il était pratiquement impossible d'observer les effets optiques non linéaires, mais avec l'apparition des lasers cette observation est devenue possible et le premier effet découvert est le doublage de la fréquence au passage d'un faisceau laser à travers un cristal de quartz.

Proposons-nous de montrer comment prennent naissance les effets optiques non linéaires. A cet effet, considérons l'action des ondes lumineuses sur un oscillateur qui nous servira de modèle de l'électron atomique. Nous avons déjà utilisé un tel modèle en supposant que l'oscillateur était harmonique; maintenant, pour la description des effets non linéaires, nous devons supposer que l'oscillateur est anharmonique. En choisissant la forme la plus simple du terme qui décrit l'anharmonicité, nous partirons de l'équation de mouvement d'un oscillateur unidimensionnel libre

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^2 = 0,$$

où ω_0 est la fréquence propre de l'oscillateur, γ, le coefficient d'amortissement des oscillations et la grandeur βx^2 décrit dans le cas le plus simple le caractère anharmonique des forces propres s'exerçant sur l'oscillateur.

Ce qui nous intéresse c'est l'action du champ électrique de l'onde lumineuse sur l'oscillateur. Un oscillateur harmonique satisfaisait, nous le savons, au principe de superposition, si bien qu'il suffisait de considérer son comportement sous l'action d'une seule onde plane monochromatique. Pour un oscillateur anharmonique, le principe de superposition n'est pas valable, ce qui oblige de considérer que même dans le problème anharmonique le plus simple le champ extérieur, c'est-à-dire le champ de l'onde lumineuse, comporte au moins deux harmoniques de fréquence différente. Nous partirons donc de l'équation suivante de mouvement de l'oscillateur dans un champ extérieur:

$$\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2x+\beta x^2=\frac{2e}{m_c}\,\mathrm{Re}\,\{E_1e^{i(k_1z-\omega_1t)}+E_2e^{i(k_2z-\omega_2t)}\},$$

où $2E_1$ et $2E_2$ sont les projections, sur la direction x, des amplitudes de champs des deux ondes, e et m_c, la charge et la masse de l'électron, ω_1, ω_2 et k_1, k_2, les fréquences et les vecteurs d'onde des ondes se propageant suivant l'axe des z (le facteur 2 devant les amplitudes est introduit pour éviter des facteurs numériques encombrants dans les expressions donnant les susceptibilités non linéaires).

Le terme non linéaire βx^2 étant petit, on peut, pour résoudre cette équation, appliquer la méthode de la théorie des perturbations. Si nous négligeons ce terme (approximation d'ordre zéro), nous obtiendrons une superposition des oscillations $x = x(\omega_1) + x(\omega_2)$ de fréquences ω_1 et ω_2, où

$$x(\omega)=\frac{(e/m_c)\,E}{-\omega^2+\omega_0^2-i\gamma\omega}\,e^{i(kz-\omega t)}$$

(par E, k on entend E_1, k_1 si $\omega=\omega_1$ et E_2, k_2 si $\omega=\omega_2$). Dans l'approximation non linéaire d'ordre inférieur, c'est-à-dire en première approximation suivant βx^2, la solution de l'équation contient des oscillations aux fréquences des deuxièmes harmoniques $2\omega_1$, $2\omega_2$, aux fréquences de combinaison $\omega_1+\omega_2$, $\omega_1-\omega_2$ et enfin un terme de fréquence zéro correspondant au « redressement » de la lumière du fait de la non-linéarité quadratique de βx^2.

L'oscillation à la fréquence du deuxième harmonique $2\omega_1$ s'exprime par la formule

$$x(2\omega_1)=\frac{-e^2\beta E_1^2}{\Delta^2(\omega_1)\,\Delta(2\omega_1)}\,e^{2i(k_1z-\omega_1t)},$$

où $\Delta(\omega)=-\omega^2+\omega_0^2-i\gamma\omega\equiv\Delta^*(-\omega)$.

L'oscillation à la fréquence différente $\omega_1-\omega_2$ est de la forme

$$x(\omega_1-\omega_2)=\frac{-e^2\beta E_1E_2^*}{\Delta(\omega_1)\,\Delta^*(\omega_2)\,\Delta(\omega_1-\omega_2)}\,e^{i[(k_1-k_2)z-(\omega_1-\omega_2)t]}.$$

Les trois autres oscillations se décrivent par des formules analogues.

En partant de ces expressions, on peut introduire des intensités de polarisations non linéaires et des susceptibilités non linéaires. La polarisation **P** (rapportée à un électron) est évidemment égale à $e\mathbf{r}$. Si l'on tient compte des anharmonicités, elle contient tant un terme linéaire ($\mathbf{P}^{L}$) que des termes non linéaires ($\mathbf{P}^{NL}$) en champ et les polarisations non linéaires sont nombreuses (à la différence de la seule polarisation linéaire) : chacune d'elles se rapporte à une génération déterminée de nouvelles fréquences à l'aide de fréquences initiales données. En particulier, à la génération du deuxième harmonique au moyen d'un oscillateur anharmonique dont la non-linéarité est de la forme βx^2 corres-

pond la polarisation non linéaire suivante:

$$P_x^{NL}(2\omega) = \chi_{xxx}(2\omega;\ \omega,\ \omega)\, E_x(\omega)\, E_x(\omega),$$

où χ_{xxx} est la susceptibilité non linéaire correspondante ayant pour expression

$$\chi_{xxx}(2\omega\ ;\ \omega,\ \omega) = \frac{-n_0 e^3 \beta}{m_e^2 \Delta^2(\omega)\, \Delta(2\omega)}$$

(n_0 étant la densité d'électrons). Les indices x, x, x servent ici à rappeler le caractère tensoriel des relations qui lient les composantes du vecteur $\mathbf{P}^{NL}$ aux composantes des champs **E** (ω_1), **E** (ω_2) qui participent au processus non linéaire. Dans le cas général une telle relation est de la forme

$$P_i^{NL} = \chi_{ijl} E_j E_l,$$

où les indices i, j, l désignent les numéros des axes de coordonnées (en sous-entendant qu'on fait la sommation sur un indice qui se rencontre deux fois). Les champs E_j, E_l peuvent contenir des fréquences ω_1, ω_2 soit égales, soit différentes; quant à la polarisation P_i^{NL}, elle se rapporte à l'une quelconque des fréquences $2\omega_1$, $2\omega_2$, $\omega_1 \pm \omega_2$ (ou à la fréquence zéro). Ces fréquences doivent être indiquées comme arguments des grandeurs P_i^{NL}, E_j, E_l ainsi que des grandeurs χ_{ijl} constituant un tenseur d'ordre trois.

Notons que l'expression pour x $(\omega_1 - \omega_2)$ obtenue plus haut permet d'écrire tout de suite les formules pour la polarisation P_x^{NL} $(\omega_1 - \omega_2)$ et pour la susceptibilité χ_{xxx} $(\omega_1 - \omega_2;\ \omega_1,\ \omega_2)$. La structure de ces formules est la même que celle des formules indiquées plus haut pour P_x^{NL} (2ω) et χ_{xxx} $(2\omega;\ \omega,\ \omega)$. Le calcul des effets non linéaires d'ordre suivant de βx^2 fera apparaître des oscillations aux fréquences $2\omega_1 \pm \omega_2$, $\omega_1 \pm 2\omega_2$, etc., ainsi que les oscillations aux fréquences initiales ω_1, ω_2; dans le cas le plus simple ce processus se déroule avec la participation de deux ondes initiales (de fréquences différentes ou égales).

Il est aisé de s'assurer que le rapport des polarisations non linéaires d'ordre inférieur à la polarisation linéaire a pour valeur

$$\frac{P^{NL}}{P^{L}} \sim \frac{eE}{m_e \Delta}\, \frac{\beta}{\Delta}.$$

La grandeur β peut être évaluée en partant du fait que la force non linéaire $m\beta x^2$ doit être de l'ordre de grandeur de la force linéaire $m\omega_0^2 x$ si $x \sim a$, où a est le rayon de l'orbite d'équilibre de l'électron. En introduisant le champ électrique intra-atomique E_a tel que $m\omega_0^2 a = eE_a$, nous obtiendrons $\beta/\Delta \sim \beta/\omega_0^2 \sim a^{-1}$ et

$$P^{NL}/P^{L} \sim E/E_a.$$

Dans le cas typique $E_a \sim 3\cdot10^{10}$ V/m, de sorte que même pour des intensités de l'onde $E \sim 10^8$ V/m le rapport P^{NL}/P^{L} sera près de $3\cdot10^{-3}$. Ce rapport devient ω_0/γ fois plus grand si un des facteurs entrant dans l'expression de x devient résonnant.

Ainsi, la polarisation la plus simple est quadratique en champ et donc se détermine par un tenseur d'ordre trois χ_{ijl}. Il importe d'avoir en vue que dans des systèmes à centre d'inversion le tenseur du troisième rang ne peut pas exister, de sorte que pour l'observation des effets bilinéaires en champ il convient d'utiliser des cristaux dépourvus de centre d'inversion. Dans cette catégorie de cristaux se

rangent notamment les piézo-électriques; c'est dans un des piézo-électriques, le quartz, qu'on a observé pour la première fois (en 1961) les effets non linéaires dans le domaine optique: on a enregistré un rayonnement ultraviolet ($\lambda = 347$ nm) lors du passage par un cristal de quartz d'un rayon émis par un laser à rubis ($\lambda = 694 \text{ nm} \equiv \equiv 2 \cdot 347$ nm; fig. 22.1). Si un cristal comporte parmi ses éléments de symétrie un centre d'inversion, la non-linéarité optique d'ordre inférieur que peut posséder ce cristal est cubique et non quadratique.

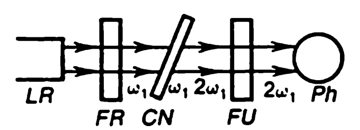


Fig. 22.1. Dispositif utilisé dans l'expérience de génération du deuxième harmonique de la lumière

LR, laser à rubis; *CN*, cristal non linéaire; *FR* et *FU*, filtres rouge et ultraviolet; *Ph*, cellule photo-électrique

Arrêtons-nous aux relations de symétrie auxquelles obéit la susceptibilité non linéaire. Soient trois ondes $\mathbf{E}_1(\omega_1)$, $\mathbf{E}_2(\omega_2)$ et $\mathbf{E}_3(\omega_3)$ où $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. Considérons les polarisations non linéaires, quadratiques en champ, de la forme

$$P_i^{\mathrm{NL}}(\omega_3) = \chi_{ijl}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2)\, E_j(\omega_1)\, E_l(\omega_2).$$

Nous utilisons ici la désignation $\chi(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2)$ qui signifie $\chi(\omega; \omega_1; \omega_2)$ avec $\omega = \omega_1 + \omega_2$. Nous avons alors les relations de symétrie suivantes

$$\chi_{ijl}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = \chi_{jil}(\omega_1 = \omega_3 - \omega_2) = \chi_{lij}(\omega_2 = \omega_3 - \omega_1).$$

Soulignons que le changement de l'ordre des indices de coordonnées (i, j, l) doit entraîner le changement de l'ordre des arguments de fréquences. Si la dispersion dans tout le domaine de fréquences ω_1, ω_2, ω_3 est négligeable, χ_{ijl} reste inchangé lorsque l'ordre des indices i, j, l est changé, mais celui des arguments ne l'est pas.

Nous avons examinée la non-linéarité quadratique, qui est la plus simple, du vecteur polarisation non linéaire, mais elle ne peut exister, comme nous l'avons vu, que dans des systèmes dénués de centre de symétrie. La non-linéarité d'ordre suivant, c'est-à-dire cubique, peut exister dans tous les cristaux et même dans un liquide isotrope. La non-linéarité du troisième ordre signifie que la partie de la polarisation non linéaire dont elle est responsable présente la structure suivante:

$$\mathbf{P}^{\mathrm{NL}}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) = \hat{\chi}^{(4)}\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3 \exp\{i(\mathbf{k}_1 + \\ + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)\,\mathbf{r} - i(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)\,t\},$$

où $\hat{\chi}^{(4)}$ est la susceptibilité non linéaire du troisième ordre, qui représente un tenseur d'ordre 4. Sous une forme développée, la i-ième composante de cette expression (si l'on omet l'exponentielle) est

la suivante:

$$P_i^{NL} = \chi_{ijkl}^{(4)} \mathbf{E}_{1j} \mathbf{E}_{2k} \mathbf{E}_{3l}.$$

Pour $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$ cette polarisation non linéaire donne lieu à la génération du troisième harmonique.

Comme il vient d'être indiqué, le tenseur de susceptibilité non linéaire $\hat{\chi}^{(4)}$ existe aussi dans un liquide isotrope; dans ce cas il comporte deux composantes indépendantes: $\chi_{xyxy} \equiv \chi_{44}$ et $\chi_{xxyy} \equiv \equiv \chi_{12}$. De ce fait, lorsque tous les trois champs sont égaux ($\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_3$), la polarisation non linéaire $\mathbf{P}^{NL}$ possède une composante de Fourier ayant pour expression

$$\mathbf{P}^{NL}(\omega) = \chi_{44}(\omega)\, \mathbf{E}(\omega)\, (\mathbf{E}(\omega)\, \mathbf{E}^*(-\omega)) + \chi_{12}(\omega)\, \mathbf{E}^* \times \times (-\omega)\, (\mathbf{E}(\omega)\, \mathbf{E}(\omega)).$$

Si $\omega_1 > \omega_2$, $\omega_2 = \omega_3$ et $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_3$ et qu'en outre le champ $\mathbf{E}_2$ est polarisé rectilignement suivant l'axe des x, la polarisation non linéaire de fréquence ω_1 comporte les composantes

$$P_x^{NL}(\omega_1) = \chi_{11} E_{1x} \,|E_{2x}|^2, \quad P_y^{NL}(\omega_1) = \chi_{21} E_{1y} \,|E_{2x}|^2,$$
$$P_z^{NL}(\omega_1) = \chi_{21} E_{1z} \,|E_{2x}|^2.$$

Ces formules ont un sens physique simple: elles décrivent la variation de l'indice de réfraction de l'onde de fréquence ω_1, due à l'onde de fréquence ω_2.

Si $\omega_2 = 0$ (c'est-à-dire si le champ $\mathbf{E}_2$ est continu), ces formules traduisent la variation de l'indice de réfraction de l'onde de fréquence ω_1 sous l'effet du champ électrique constant (*effet Kerr*).

§ 22.2. Autofocalisation et automodulation d'un faisceau lumineux

Les non-linéarités de la polarisation conduisent, comme il a déjà été dit, à une variation de la permittivité électrique et de l'indice de réfraction en fonction de l'intensité du champ électrique de l'onde. Les effets physiques principaux qui déterminent cette variation sont l'effet Kerr pour le champ alternatif et l'effet d'*électrostriction* qui conduit à une variation de la densité du milieu sous l'action du champ de l'onde. En nous bornant à examiner les milieux isotropes et à tenir compte de la non-linéarité d'ordre inférieur, nous pouvons écrire l'indice de réfraction du milieu sous la forme

$$N = N_0 + N_2 \,|\mathbf{E}|^2,$$

où $\mathbf{E}$ est l'intensité du champ électrique de l'onde, N_0, l'indice de réfraction linéaire et N_2, une certaine grandeur dépendant du champ et pouvant prendre une valeur positive ou négative. Le plus intéressant est le cas de $N_2 > 0$; dans ce cas, l'indice de réfraction est

plus grand là où l'intensité de l'onde est plus élevée, de sorte que dans les régions de haute intensité lumineuse il se produit un effet de lentille qui donne lieu à la formation de filaments lumineux intenses. Ce phénomène porte le nom d'*autofocalisation* ou d'*autocanalisation*.

Essayons d'expliquer comment il se produit. A cet effet, reportons-nous à la figure 22.2 qui montre un faisceau lumineux divergent (l'angle de divergence étant 2θ et les rayons extrêmes désignés par *1* et *1'*) cheminant dans une région d'indice de réfraction N, nette-

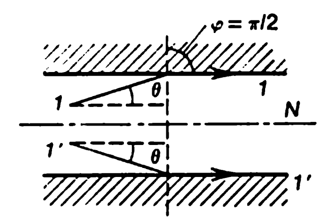


Fig. 22.2. Autocanalisation par réflexion interne totale

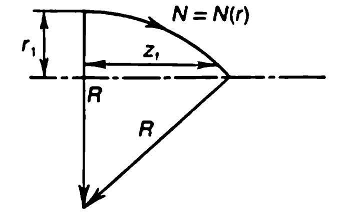


Fig. 22.3. Autofocalisation

ment délimitée d'une région d'indice de réfraction $N_0 < N$. Dans ce cas, l'autofocalisation se produit par suite d'une réflexion interne totale. Rappelons que suivant les lois de la réfraction l'angle de réfraction φ est lié à l'angle d'incidence $(\pi/2 - \theta)$ par la relation

$$\sin \varphi/\sin (\pi/2 - \theta) \equiv \sin \varphi/\cos \theta = N/N_0.$$

En supposant que les valeurs de θ et $N - N_0 = N^2 \mid E \mid^2$ sont petites et en remarquant que dans la réflexion interne totale $\varphi = \pi/2$, déterminons le champ critique minimal qui conduit à l'autofocalisation du faisceau dont l'angle de divergence est égal à 2θ:

$$|E| = \sqrt{N_0/(2N_2)}\,\theta.$$

(Rappelons que la divergence angulaire minimale d'un faisceau de rayon r_0, due à la diffraction, est $\theta \sim \lambda/(4N_0r_0)$.)

Si l'intensité du champ est supérieure à la valeur critique, le faisceau de rayons se réfléchira sur la surface frontière de la région d'indice de réfraction plus faible vers son axe. On peut se demander quelle est la *longueur de focalisation* z_f, c'est-à-dire la distance parcourue par le rayon avant son intersection avec l'axe du faisceau. La figure 22.3 montre la trajectoire d'un rayon qui a commencé son parcours à la distance r_1 de l'axe du faisceau.

Supposons que le carré de l'intensité du champ le long de la section transversale du faisceau soit donné par une distribution gaussienne:

$$|E|^2 = E_0^2 \exp(-2r^2/r_0^2),$$

où E_0 est l'intensité du champ sur l'axe du faisceau et r_0, le rayon du faisceau. Dans ce cas l'indice de réfraction s'exprime par la formule

$$N \equiv N(r) = N_0 + \frac{1}{2} N_2 E_0^2 \exp(-2r^2/r_0^2)$$

(le facteur $\frac{1}{2}$ apparaît du fait que le champ est variable et doit être moyenné sur le temps). Si l'on connaît la valeur de N (r), on peut trouver le rayon de courbure R du rayon lumineux :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{N}\frac{dN}{dr} \cong \frac{1}{N_0}\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{2} N_2 E_0^2 \exp\left(-\frac{2r^2}{r_0^2}\right)\right].$$

Pour $r \ll a$, on en tire

$$R = N_0 r_0^2/(4N_2 E_0^2 r_1).$$

D'un autre côté, l'examen de la figure 22.3 montre que pour $r \ll R$ la distance focale $z_f = \sqrt{2rR}$. En y portant l'expression obtenue pour R, nous avons

$$z_f = \frac{r_0}{2}\frac{(2N_0/N_2)^{1/2}}{E_0}.$$

Nous voyons que z_f est indépendante de r_1, c'est-à-dire que la distance focale est la même pour tous les rayons lumineux. Il est pourtant à noter que notre conclusion est basée sur l'hypothèse où les rayons du faisceau incident sont parallèles alors qu'en réalité un faisceau gaussien n'est pas parallèle, mais tend à diverger par suite de la diffraction qui s'oppose à la focalisation.

Examinons encore le phénomène d'*automodulation* ou d'autocompression d'un faisceau lumineux. Rappelons au préalable qu'en optique géométrique, dont nous nous guidons, toute grandeur f qui décrit le champ d'une onde s'exprime par la formule

$$f = a \exp(i\,\psi),$$

où a est l'amplitude de l'onde et ψ, sa phase ou son iconale. La fréquence ω et le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ sont liés à ψ par les relations

$$\omega = -\,\partial\psi/\partial t, \quad \mathbf{k} = \text{grad}\,\psi.$$

Dans une onde plane monochromatique, les grandeurs a, ω, $\mathbf{k}$ sont constantes, mais dans le cas général elles peuvent dépendre des coordonnées et du temps bien que leurs variations sur des distances de l'ordre de la longueur d'onde λ et pendant des intervalles de temps de l'ordre de la période T de l'onde doivent être petites par rapport aux grandeurs elles-mêmes. C'est dans ce cas qu'on peut utiliser l'optique géométrique qui peut être soit linéaire, soit non linéaire suivant que la polarisation est une fonction linéaire ou non linéaire du champ.

Si une onde diffère peu de l'onde plane monochromatique et si la non-linéarité est faible, nous avons

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{k}_0\mathbf{r} - \omega_0 t + \varphi(\mathbf{r}, t),$$

où $\mathbf{k}_0$ et $\omega_0 \equiv \omega_0(\mathbf{k}_0)$ sont le vecteur d'onde et la fréquence de l'onde plane monochromatique; $\varphi(\mathbf{r}, t)$ est un petit terme correctif $|\varphi| \ll |\psi|$, dû à la non-linéarité. En faisant usage de cette expression de ψ, nous obtenons

$$\omega(\mathbf{r}, t) = \omega_0 - \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \operatorname{grad}\varphi.$$

Ce sont précisément les derniers termes de ces expressions qui sont responsables de la variation de ω et de $\mathbf{k}$ en fonction de $\mathbf{r}$ et t. Il est clair que

$$\frac{\partial\mathbf{k}}{\partial t} = -\operatorname{grad}\omega.$$

Puisque φ se détermine par la non-linéarité de la polarisation, la fréquence dépend, généralement parlant, de l'amplitude a de l'onde qui est à son tour fonction des coordonnées et du temps. Bornons-nous à examiner le cas le plus simple où $\omega = \omega(\mathbf{k}, a^2)$, c'est-à-dire lorsque la fréquence est fonction de $\mathbf{k}$ et a^2. Si l'onde se propage suivant l'axe des x et son amplitude est faible,

$$\omega = \omega_0(k_0) + \alpha a^2,$$

où $\alpha \equiv (\partial\omega/\partial a^2)_{a=0}$ et a et k sont des fonctions de x. La relation $\partial k/\partial t = -\partial\omega/\partial x$ prend alors la forme suivante:

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -v_g\frac{\partial k}{\partial x} - \alpha\frac{\partial a^2}{\partial x},$$

où $v_g = \partial\omega/\partial k$ est la vitesse de groupe.

Tenons compte maintenant de la loi de conservation de l'énergie. Comme la densité d'énergie est proportionnelle à a^2 et l'énergie est transportée dans le paquet d'ondes à la vitesse de groupe $v_g(\mathbf{k}) = v_g$, nous pouvons écrire l'équation de continuité

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_g a^2) = 0.$$

Les équations obtenues pour k et a^2 admettent évidemment une solution stationnaire $k = k_0$, $a = a_0$ correspondant à une onde plane monochromatique. On peut se demander quelle est la stabilité de cette solution.

Pour étudier cette question, il convient de faire intervenir une faible perturbation et de déterminer comment elle évolue dans le temps et dans l'espace. A cet effet, posons $k = k_0 + \delta k$; $a = a_0 + \delta a$ et cherchons δk et δa sous forme d'ondes

$$\delta k = k' e^{i\eta x - i\nu t}, \quad \delta a = a' e^{i\eta x - i\nu t},$$

où η, ν, a' sont le nombre d'onde, la fréquence et l'amplitude (on dit encore profondeur) de modulation de la solution initiale; toutes ces grandeurs seront supposées petites: $\nu \ll \omega_0$, $\eta \ll k_0$, $a' \ll a$, $k' \ll k_0$. L'introduction de cette perturbation dans les équations pour k et a^2 donne l'expression suivante de la variation de ν en fonction de η (dans l'approximation linéaire):

$$\nu = \eta \left(v_g \pm \sqrt{\alpha \frac{\partial v_g}{\partial k}} \right).$$

Nous voyons qu'il apparaît deux ondes de modulation (correspondant à deux signes de la racine). Le comportement de ces ondes est tout à fait différent suivant que la grandeur $\alpha\ (\partial v_g/\partial k)$ est positive ou négative. Si elle est positive, les vitesses de phase ν/η des deux ondes de modulation sont réelles et proches de la vitesse de groupe $v_g = (\partial\omega/\partial k_0)$ de l'onde de départ. Si $\alpha\ (\partial v_g/\partial k) < 0$, les vitesses de phase comportent des termes correctifs imaginaires très petits, de sorte que l'une des ondes croît dans l'espace (c'est-à-dire lorsque x augmente pour ν donné) suivant la loi

$$\exp\left\{\frac{\nu x}{v_g^2} \sqrt{|\alpha\, \partial v_g/\partial k|}\right\}.$$

Ainsi, l'onde plane de départ devient instable et se sépare en des paquets d'ondes distincts. Une telle instabilité est dite *de modulation*.

La faible perturbation que nous avons postulée peut avoir son origine non seulement dans les bruits. C'est ainsi par exemple qu'en plus d'un faisceau lumineux intense, une onde lumineuse faible de même fréquence peut être introduite, sous un certain angle, dans la même région d'un milieu non linéaire. Cette onde de signal faible, jointe à l'onde forte, produira dans le milieu non linéaire un réseau dynamique de variation de l'indice de réfraction et, si les conditions indiquées plus haut sont réalisées, elle sera amplifiée au détriment de l'intensité de l'onde forte par suite de la diffraction sur le réseau. C'est précisément ce processus qui est à la base de l'holographie dynamique.

§ 22.3. Interaction non linéaire des ondes électromagnétiques

Une des propriétés les plus importantes des milieux optiquement non linéaires est que dans ces milieux

l'onde monochromatique ne peut pas se propager toute seule, de par elle-même : en même temps qu'elle doivent se propager des ondes constituées par ses harmoniques supérieurs et aux fréquences de combinaison.

En effet, écrivons les équations de Maxwell pour les composantes de Fourier des champs électrique et magnétique de fréquence ω:

$$\text{rot}\, \mathbf{E}(\omega) = i\mu_0\omega \mathbf{H}(\omega), \qquad \text{rot}\, \mathbf{H}(\omega) = -i\omega \mathbf{D}(\omega),$$

où **D** (ω) est la composante de Fourier du vecteur induction électrique: $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}^{L} + \mathbf{P}^{NL}$. En nous rappelant que $\mathbf{E}(\omega) + \varepsilon_0^{-1}\mathbf{P}^{L}(\omega) = \varepsilon(\omega)\,\mathbf{E}(\omega)$, récrivons la seconde de ces équations sous la forme

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\omega) = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon(\omega)\,\mathbf{E}(\omega) - i\omega\mathbf{P}^{NL}(\omega).$$

En faisant disparaître **H** (ω), nous obtenons l'équation d'onde pour **E** (ω):

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{E}(\omega) - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon(\omega)\,\mathbf{E}(\omega) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_0^{-1}\mathbf{P}^{NL}(\omega).$$

Dans le cas d'un milieu linéaire $\mathbf{P}^{NL} = 0$ et nous obtenons une équation d'onde homogène:

$$\Delta\mathbf{E}(\omega) + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\,\mathbf{E}(\omega) = 0.$$

Mais dans le cas d'un milieu non linéaire $\mathbf{P}^{NL} \neq 0$ et nous obtenons une équation d'onde inhomogène dans laquelle la polarisation non linéaire $\mathbf{P}^{NL}$ joue le rôle de source de champs. Comme $\mathbf{P}^{NL}$ s'exprime par une somme de différentes puissances du champ, les composantes de Fourier de la polarisation non linéaire $\mathbf{P}^{NL}(\omega)$ contiennent des produits des composantes de Fourier des champs ayant des fréquences différentes de ω (dont la somme algébrique donne ω). Les équations de Maxwell doivent également être écrites pour ces composantes, ces équations contiennent elles aussi des polarisations non linéaires et donc des composantes de Fourier des champs de nouvelles fréquences. Ainsi, nous sommes conduits à un système d'équations de Maxwell liées les unes aux autres. C'est seulement en négligeant la polarisation non linéaire que nous obtenons des équations indépendantes pour chacune des composantes de Fourier, ce qui signifie que les ondes de différentes fréquences se propagent indépendamment l'une de l'autre. Au contraire, si l'on tient compte de $\mathbf{P}^{NL}$, les ondes se trouvent liées l'une à l'autre et leur existence indépendante devient impossible.

Par exemple, dans le cas de la non-linéarité la plus simple d'ordre inférieur ($\mathbf{P}^{NL} \sim EE$) il y a interaction entre trois ondes de fréquences ω_1, ω_2 et $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ et nous obtenons pour les composanates de Fourier des champs $\mathbf{E}_1(\omega_1)$, $\mathbf{E}_2(\omega_2)$, $\mathbf{E}_3(\omega_3)$ un système d'équations d'onde non linéaires et liées de la forme

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{E}_1(\omega_1) - \left(\frac{\omega_1}{c}\right)^2 \varepsilon(\omega_1)\,\mathbf{E}_1(\omega_1) =$$
$$= \varepsilon_0^{-1}\left(\frac{\omega_1}{c}\right)^2 \hat{\chi}(\omega_1 = \omega_3 - \omega_2)\,\mathbf{E}_3(\omega_3)\,\mathbf{E}_2^*(-\omega_2)$$

(pour gagner en compacité, le vecteur de composantes $\chi_{ijl}E_jE_l$ est désigné par $\hat{\chi}\mathbf{EE}$). Ces équations sont à résoudre en tenant compte

des conditions aux limites : la continuité, sur la surface de séparation entre deux milieux, des composantes tangentielles de toutes les composantes de Fourier des vecteurs intensités des champs et celle des composantes normales de toutes les composantes de Fourier des vecteurs inductions (rappelons que les composantes de Fourier des vecteurs inductions électriques comportent des termes non linéaires $\mathbf{P}^{NL}$).

Souvent, vu la petitesse de la non-linéarité, il peut y avoir intérêt à résoudre le problème de la génération des ondes de fréquences de combinaison données par des champs harmoniques. Ce faisant, on suppose que les champs harmoniques produisent une onde de fréquence de combinaison, mais que le champ de cette dernière est sans effet sur les champs harmoniques de départ ou, autrement dit, on ne tient pas compte de l'interaction des ondes.

Expliquons maintenant l'effet dû à l'interaction des ondes. Examinons, par exemple, le problème de la génération du deuxième harmonique. Prenons comme plan $z = 0$ la surface de séparation des milieux non linéaire et linéaire. Bornons-nous à examiner seulement le cas d'interaction de deux ondes : l'onde de départ de fréquence $\omega_1 = \omega$ et le deuxième harmonique $\omega_2 = 2\omega$. En posant

$$\mathbf{E}_1(\omega) = \mathbf{e}_1 A_1(z)\, e^{i\mathbf{k}_1\mathbf{r}}, \quad \mathbf{E}_2(2\omega) = i\mathbf{e}_2 A_2(z)\, e^{i\mathbf{k}_2\mathbf{r}},$$

où $\mathbf{e}_{1,2}$ sont les vecteurs polarisations des ondes et $A_{1,2}(z)$, leurs amplitudes (dépendantes de z), nous obtenons deux équations différentielles pour $A_1(z)$ et $A_2(z)$ qui revêtent dans le cas de $\mathbf{k}_2 = 2\mathbf{k}_1$ la forme suivante :

$$\frac{dA_1}{dz} = -CA_1A_2, \quad \frac{dA_2}{dz} = CA_1^2,$$

où $C = \omega^2 [\mathbf{e}_1\chi(2\omega)\, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1]/(2\varepsilon_0 k_1 c^2)$. Nous nous intéressons à la génération du deuxième harmonique, c'est-à-dire à la solution pour laquelle $A_2(0) = 0$, $A_1(0) \neq 0$. Elle est de la forme

$$A_2(z) = A_1(0)\, \mathrm{th}\, [CA_1(0)\, z], \quad A_1(z) = A_1(0)\, \mathrm{ch}^{-1} [CA_1(0)\, z].$$

La *longueur caractéristique d'interaction non linéaire* peut être définie par

$$l^{NL} = [CA_1(0)]^{-1}.$$

Sa valeur numérique se calcule à l'aide de la formule

$$l^{NL} = [CA_1(0)]^{-1} = \frac{\varepsilon_0 N\lambda}{2\pi\chi(2\omega)\, A_1(0)},$$

où λ est la longueur d'onde dans le vide et N, l'indice de réfraction (linéaire). Pour le cristal KH_2PO_4, $\chi(2\omega) \approx 1{,}77 \cdot 10^{-24} F \cdot V^{-1}$. En posant l'amplitude initiale $A_1(0) = \frac{1}{2} \cdot 2{,}7 \cdot 10^7$ V/m, nous obtenons $l^{NL} = 0{,}005$ m pour $\lambda = 694{,}3$ nm.

En pratique, on a réussi à transformer en rayonnement du deuxième harmonique près de 80% de puissance d'émission d'un laser à rubis. Remarquons que dans un milieu sans pertes la totalité de la puissance de rayonnement principal peut être convertie en deuxième harmonique.

§ 22.4. Effet Mandelstam-Brillouin

Les ondes électromagnétiques interagissent non seulement les unes avec les autres mais également avec les ondes d'autres types, par exemple acoustiques, et dans les ferromagnétiques, aussi avec les ondes de spin. Examinons d'abord l'interaction entre les ondes électromagnétiques et les ondes acoustiques.

Les déformations élastiques des corps solides et la variation de densité des gaz et des liquides ont pour effet une variation de l'indice de réfraction de la substance. C'est pourquoi les déformations élastiques variables dans le temps et dans l'espace, c'est-à-dire les ondes acoustiques, influent sur la propagation des ondes électromagnétiques. La vitesse de phase des oscillations acoustiques est très inférieure à la vitesse de la lumière (pour les corps solides et liquides $v_s/c \sim 10^{-5}$, pour les gaz, ce rapport est encore plus petit), si bien que cette influence peut être traitée comme une diffraction des ondes électromagnétiques par un réseau, presque immobile, constitué par les oscillations acoustiques et ayant un indice de réfraction variable. La diffusion d'une onde lumineuse sur une onde acoustique porte le nom d'*effet Mandelstam-Brillouin*.

Cet effet peut s'interpréter le plus simplement dans le language quantique, en considérant que la lumière est un ensemble de photons, c'est-à-dire de particules d'énergie $\hbar\omega$ et d'impulsion $\hbar\mathbf{k}$ (ω et $\mathbf{k}$ étant la fréquence et le vecteur d'onde de l'onde lumineuse), et le son est un ensemble de phonons, de particules d'énergie $\hbar\Omega$ et d'impulsion $\hbar\mathbf{q}$ (plus exactement, de quasi-particules à quasi-impulsion $\hbar\mathbf{q}$; Ω et $\mathbf{q}$ étant la fréquence et le vecteur d'onde de l'onde sonore).

Les processus d'interaction élémentaires sont l'émission et l'absorption d'un phonon par un photon. Ces processus sont régis par les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion :

$$\hbar\omega \pm \hbar\Omega = \hbar\omega', \qquad \hbar\mathbf{k} \pm \hbar\mathbf{q} = \hbar\mathbf{k}'$$

(les signes « + » et « — » se rapportent à l'absorption et à l'émission du phonon, ω' et $\mathbf{k}'$ étant la fréquence et le vecteur d'onde de la lumière diffusée). En tenant compte que $\omega = ck$, $\omega' = ck'$ et $\Omega = v_s q$, nous voyons que la diffusion de la lumière par le son doit vérifier les relations

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k} \pm \mathbf{q}, \quad \frac{ck'}{N'} = \frac{ck}{N} \pm v_s q,$$

où $N \equiv N(\omega)$, $N' \equiv N(\omega')$ sont les indices de réfraction. Puisque $v_s \ll c$, $\omega' \approx \omega$ et donc $k' \approx k$, si bien que le triangle formé par trois vecteurs **k**, **k**′, **q** est presque isocèle (fig. 22.4). Cela signifie que le vecteur d'onde du son est lié à la diffusion angulaire θ par la relation $q = 2k \sin(\theta/2)$, et la fréquence du son, par la relation

$$\Omega = 2\omega N(\omega) \frac{v_s}{c} \sin \frac{\theta}{2}.$$

La fréquence maximale du son correspond à l'angle de diffusion $\theta = \pi$, c'est-à-dire à la diffusion de la lumière en sens opposé.

Le changement de fréquence de la lumière étant un phénomène non linéaire, nous pouvons lui associer une polarisation non linéaire $\mathbf{P}^{\mathrm{NL}}(\omega')$. Ce vecteur est une fonction bilinéaire du champ électrique $\mathbf{E}(\omega)$ de l'onde de fréquence ω et du tenseur de déformation $u_{ij}(\Omega)$ correspondant à l'onde sonore de fréquence Ω:

$$P_i^{\mathrm{NL}}(\omega') = \xi_{ijlm} E_j(\omega)\, u_{lm}(\Omega),$$

où ξ_{ijlm} est un certain tenseur du quatrième rang qui caractérise la relation entre les champs électromagnétique et acoustique (nous avons omis le facteur de phase $\exp\{i(\mathbf{k}+\mathbf{q})\mathbf{r} - i(\omega + \Omega)t\}$).

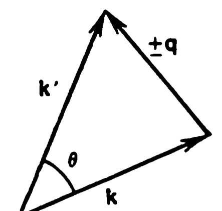


Fig. 22.4. Position relative des vecteurs **k**, **k**′, **q** lors de la diffusion de Mandelstam-Brillouin

Jusqu'ici nous n'avons pas touché à l'origine des phonons acoustiques. Ils peuvent être tant des phonons excités par des sources extérieures, que des phonons thermiques liés aux vibrations thermiques du réseau cristallin. S'il s'agit des phonons thermiques, leur nombre se détermine par la fonction de distribution de Planck

$$N_{\mathbf{q}} = \left(\exp \frac{\hbar v_s q}{T} - 1\right)^{-1},$$

et dans un solide sont possibles trois polarisations du phonon, alors que dans les liquides et les gaz une seule polarisation.

Les phonons peuvent être excités par la même onde électromagnétique qu'ils diffusent (*diffusion stimulée de Mandelstam-Brillouin*). Cet effet est basé sur le fait que l'interaction des ondes électromagnétiques se propageant dans un corps solide fait naître une contrainte supplémentaire dont le tenseur σ_{ij}^E est une fonction bilinéaire des intensités des champs: $\sigma_{ij}^E = \xi_{ijlm} E_l E_m$ (ξ est le même tenseur que dans la formule donnant $\mathbf{P}^{\mathrm{NL}}$). Exprimons ce tenseur moyennant les composantes de Fourier

$$\sigma_{ij}^E(\Omega) = \xi_{ijlm} E_l(\omega)\, E_m^*(\omega').$$

La contrainte supplémentaire variable σ_{ij}^{E} provoquera une déformation variable **u** et suivant l'équation de la théorie de l'élasticité:

$$\rho \frac{\partial^2 u_l}{\partial t^2} - \mathscr{E} \Delta u_l = \frac{\partial \sigma_{ij}^{E}}{\partial x_j}$$

(ρ étant la masse volumétrique, $\mathscr{E} = \rho v_s^2$). En d'autres termes, les champs de fréquences voisines ω, ω' font naître des phonons de fréquence $\Omega = \omega' - \omega$.

Si nous adjoignons à cette équation les équations d'onde pour les champs **E** (ω) et **E** (ω'), qui contiennent les polarisations non linéaires $P_i^{NL} = \xi_{ijlm} u_{jl} E_m$, nous obtiendrons un système de trois équations différentielles liées. En résolvant ce système dans l'approximations du champ donné, c'est-à-dire en considérant que **E** (ω) est donné, nous en arrivons à la conclusion suivante: les amplitudes des deux ondes secondaires (électromagnétique et sonore) augmentent simultanément (certes, au détriment de l'énergie de l'onde électromagnétique de départ).

D'une manière analogue à la diffusion combinatoire sur les oscillations acoustiques, il peut se produire une *diffusion combinatoire sur les ondes de spin*. La fréquence maximale d'une onde de spin étant $\omega_s \sim 10^{13}\ s^{-1}$, on a toujours $\omega \gg \omega_s$ dans le domaine optique, si bien que les vecteurs d'onde de l'onde de spin et de la lumière sont liés à l'angle de diffusion par la même relation $q = 2k \sin (\theta/2)$ que dans le cas des phonons ($\omega_s \equiv \omega_s$ (**q**) étant la fréquence de l'onde de spin). Dans le domaine optique, le mécanisme principal de la diffusion de l'onde qui assure la liaison entre les ondes est l'effet Faraday (dans le champ magnétique lentement variable de l'onde de spin), tandis que lors de la diffusion des ondes hertziennes ultracourtes un rôle prépondérant est joué par la modulation de la perméabilité magnétique μ (entrant dans l'expression de l'indice de réfraction $N = \sqrt{\varepsilon\mu}$) par le champ de l'onde de spin.

FORMULES FONDAMENTALES

Polarisation non linéaire	$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 + \mathbf{P}$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}^L + \mathbf{P}^{NL}$. $P_i^L = \chi_{ij} E_j$, $P_i^{NL} = \chi_{ijl} E_j E_l$. $P_i^{NL}(\omega_3) = \chi_{ijl}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) E_j(\omega_1) E_l(\omega_2)$
Distance focale lors de l'autofocalisation	$z_f = \frac{r_0}{2} \frac{(2N_0/N_2)^{1/2}}{E_0}$
Lois de conservation dans la diffusion de la lumière par le son	$\hbar \mathbf{k}' = \hbar \mathbf{k} \pm \hbar \mathbf{q}$, $\hbar\omega' = \hbar\omega \pm \hbar\Omega$

CHAPITRE 23

ÉMISSION D'ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

§ 23.1. Potentiels retardés

Comme il a été montré au chapitre 4, la connaissance des distributions spatiales des charges et courants stationnaires permet de déterminer les champs électrique et magnétique qu'ils engendrent. Passons maintenant au problème général de la détermination des champs produits par des charges en mouvement quelconque et par des courants variables. Bien entendu, la résolution de ce problème exige d'avoir recours aux équations de Maxwell.

Supposons d'abord que les charges et les courants se trouvent dans le vide et donc utilisons les équations de Maxwell pour le vide:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0,$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \varepsilon_0\,\mathrm{div}\,\mathbf{E} = \rho.$$

Dans le cas de champs statiques nous avons exprimé les intensités des champs par l'intermédiaire du potentiel scalaire φ et du potentiel vecteur $\mathbf{A}$ et nous avons obtenu pour ces potentiels des équations du type d'équation de Poisson. Nous avons ainsi abouti, au lieu de deux grandeurs vectorielles $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$, à une grandeur vectorielle et une grandeur scalaire, ce qui a permis de réduire le nombre de grandeurs indépendantes de six à quatre. Essayons maintenant de le faire dans le cas général de champs variables. Posons à cet effet

$$\mu_0\mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\varphi.$$

où $\mathbf{A}$ et φ sont certaines fonctions de coordonnées et du temps pour l'instant inconnues (et, on peut dire, auxiliaires). Si nous portons ces expressions dans la première paire d'équations de Maxwell, celles-ci seront satisfaites quelles que soient les valeurs de $\mathbf{A}$ et φ. Cela signifie que les expressions écrites ci-dessus sont équivalentes à la première paire d'équations de Maxwell. Si nous introduisons ces expressions dans la deuxième paire d'équations de Maxwell,

nous obtiendrons

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2}\left(-\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right),$$

$$\varepsilon_0 \text{ div}\left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi\right) = \rho.$$

Jusqu'ici les grandeurs **A** et φ n'ont été aucunement liées l'une à l'autre. Imposons-leur maintenant une condition supplémentaire (*condition de Lorentz*)

$$\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

En tenant compte que

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}, \quad \text{div grad } \varphi = \Delta \varphi,$$

nous obtenons

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}.$$

Ces équations diffèrent des équations pour φ et **A** déduites pour le cas des champs constants par la présence de dérivées secondes par rapport au temps. Nous appellerons φ et **A** comme précédemment potentiel scalaire et potentiel vecteur du champ électromagnétique et vu que les équations obtenues se réduisent, en l'absence de charges et de courants, à l'équation d'onde bien connue $\Delta f - (1/c^2) \times \times \partial^2 f/\partial t^2 = 0$, nous leur donnerons le nom d'équations d'onde avec sources.

Il s'agit maintenant de déterminer comment on peut résoudre de telles équations. Il est bien connu que l'équation

$$\Delta f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -g,$$

où g est une fonction connue de **r** et t, possède une infinité de solutions. Sa solution générale est la somme d'une solution particulière de l'équation inhomogène et de la solution générale de l'équation homogène (c'est-à-dire de l'équation à $g = 0$), mais il y a une infinité de solutions générales qui correspondent à diverses ondes capables de se propager dans le vide.

Pour trouver une solution particulière, mettons à profit le principe de superposition qui est valable pour toute équation linéaire. Suivant ce principe, si l'on connaît les solutions particulières f_1 et f_2 pour deux inhomogénéités g_1 et g_2, la solution particulière pour $g = g_1 + g_2$ sera la somme $f = f_1 + f_2$. Pour cette raison il nous suffit maintenant de résoudre le problème suivant: soit une charge ponctuelle q se trouvant à l'origine des coordonnées et dépen-

dant du temps, on demande de déterminer le potentiel scalaire φ produit par cette charge. Dans ce cas $\rho = q(t)\,\delta(\mathbf{r})$, où $\delta(\mathbf{r})$ est la fonction delta tridimensionnelle que nous avons utilisée maintes fois et qui s'annule pour $\mathbf{r} \neq 0$, prend une valeur infinie pour $\mathbf{r} = 0$ et est normée de telle sorte que

$$\int\limits_V F(\mathbf{r})\,\delta(\mathbf{r})\,dV = F(0)$$

($F(\mathbf{r})$ étant toute fonction suffisamment lisse et V, un volume quelconque contenant le point $\mathbf{r} = 0$).

Comme la densité volumique de charge ρ s'annule pour $\mathbf{r} \neq 0$, le potentiel φ vérifie dans ces conditions l'équation

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (\mathbf{r} \neq 0).$$

Nous devons chercher une solution à symétrie sphérique de cette équation, c'est-à-dire admettre que le potentiel φ dépend uniquement de $r = |\mathbf{r}|$ et de t. Dans ce cas

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right),$$

et nous sommes conduits à l'équation

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0.$$

Si nous introduisons au lieu de φ une nouvelle fonction $\chi = r\varphi$, nous obtiendrons

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = 0.$$

A une telle équation, que nous avons déjà rencontrée à propos de l'étude des ondes planes, correspondait (si r est remplacé par x) une onde plane unidimensionnelle, de sorte que nous pouvons écrire immédiatement sa solution :

$$\chi = \chi_1(t - r/c) + \chi_2(t + r/c),$$

où χ_1, χ_2 sont deux fonctions quelconques. La fonction χ_1 décrit une onde qui se propage depuis l'origine des coordonnées, et la fonction χ_2, une onde qui se propage vers l'origine des coordonnées, ce qui explique le nom d'*onde sphérique divergente* donné à la fonction $\varphi_1 = \chi_1/r$ et celui d'*onde sphérique convergente* donné à la fonction $\varphi_2 = \chi_2/r$. La source placée à l'origine des coordonnées peut bien entendu créer seulement une onde divergente, aussi pouvons-nous poser tout de suite $\chi_2 \equiv 0$.

Remarquons qu'à de petites distances de la charge le champ doit avoir une structure électrostatique. En effet, pour $r \ll ct$ les dérivées

spatiales de φ sont beaucoup plus grandes que les dérivées temporelles, de sorte que, de façon approchée, $\varepsilon_0 \Delta\varphi = -\rho$ lorsque $r \ll ct$. Cela signifie que quand $r \ll ct$ nous avons $\varphi(r, t) = q(t)/(4\pi\varepsilon_0 r)$, d'où nous tirons pour r et t quelconques

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r} q\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Nous voyons que le potentiel (et donc le champ) produit par une charge variable se détermine par la valeur de cette charge non à l'instant t mais à un instant antérieur $t^* = t - r/c$; la grandeur $t - t^* = r/c$ est le temps mis par l'onde électromagnétique pour parcourir la distance entre le point d'emplacement de la charge et le point d'observation. On l'appelle *temps de retard*, et le potentiel $\varphi = q(t^*)/(4\pi\varepsilon_0 r)$ ainsi défini est dit *retardé*.

Si nous avions posé $\chi_1 = 0$ (au lieu de $\chi_2 = 0$) nous aurions obtenu une solution sous forme d'un *potentiel* dit *avancé*: $\varphi(r, t) = q(t + r/c)/(4\pi\varepsilon_0 r)$. Elle a un sens s'il y a une onde sphérique qui converge vers l'origine des coordonnées ; pour cette raison on utilise les potentiels avancés lors de la résolution des problèmes dans un espace limité, par exemple, dans un guide d'ondes (mais non dans un espace libre illimité).

Il nous reste de généraliser le résultat obtenu au cas de distribution quelconque des charges. En remarquant que $\rho(\mathbf{r}, t) \equiv \int dV' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}', t)$ et en appliquant le principe de superposition, nous obtenons

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right)}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV',$$

où $dV' = dx'\, dy'\, dz'$. Une formule analogue peut s'écrire également pour le potentiel vecteur retardé:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\mu_0 \mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right)}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'.$$

§ 23.2. Potentiels de Liénard-Wiechert

Montrons comment à l'aide des formules générales exprimant les potentiels retardés on peut trouver les potentiels produits par une particule ponctuelle chargée animée d'un mouvement quelconque. Remarquons au préalable que les potentiels retardés peuvent être mis sous forme d'intégrales à quatre dimensions:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \delta\left(t' - t + \frac{1}{c}|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|\right) dV'\, dt',$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{4\pi |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \delta\left(t' - t + \frac{1}{c}|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|\right) dV'\, dt'.$$

La fonction delta introduite plus haut a été éliminée par l'intégration sur dt'. Suivant la définition de la fonction δ, dans les arguments de ρ et $\mathbf{j}$ on doit poser $t' = t - |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|/c$ conformément à l'explication de l'effet de retard donnée au paragraphe précédent.

Soit maintenant une charge ponctuelle e en mouvement quelconque sur une trajectoire $\mathbf{r} = \mathbf{r}_e(t)$. Il est évident que

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t)), \quad \mathbf{j} = e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t)),$$

où $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}_e(t)$ est la vitesse de la charge. En portant ces expressions dans les formules de φ et $\mathbf{A}$ et en faisant disparaître par intégration sur $\mathbf{r}'$ une des fonctions delta, nous obtenons

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')|} \delta\left(t' - t + \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')|\right) dt',$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 e}{4\pi} \int \frac{\mathbf{v}(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')|} \delta\left(t' - t + \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')|\right) dt'.$$

L'intégration par rapport à t' est facile à effectuer en appliquant la règle générale de l'intégration des expressions contenant la fonction delta d'un argument compliqué:

$$\int g(x)\,\delta(f(x) - \alpha)\,dx = \left(\frac{g(x)}{|df/dx|}\right)_{f(x)=\alpha}.$$

En y posant $f(t') = t' + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')|/c$ et en remarquant que $df/dt' = 1 - \mathbf{n}\mathbf{v}(t')/c$, nous obtenons

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')| (1 - \mathbf{n}\mathbf{v}(t')/c)},$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 e\mathbf{v}(t')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')| (1 - \mathbf{n}\mathbf{v}(t')/c)},$$

où $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire orienté dans la direction de $\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')$ et t' est lié à t par la relation $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')|/c$. Ces potentiels portent le nom de *potentiels de Liénard-Wiechert*. Dans le cas d'un mouvement non relativiste ($v \ll c$), les expressions entre parenthèses figurant aux dénominateurs de ces formules doivent être remplacées par l'unité.

Connaissant les potentiels et en utilisant les relations générales

$$\mu_0\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi,$$

on peut calculer les intensités des champs produits par une charge animée d'un mouvement quelconque. (Dans ce cas, les potentiels sont à dériver par rapport aux coordonnées du point d'observation.)

Nous nous contenterons d'indiquer le résultat final:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},\ t)=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{(\mathbf{n}-\mathbf{v}/c)(1-v^2/c^2)}{(1-\mathbf{nv}/c)^3R^2}\right\}_{t'}+$$
$$+\frac{\mu_0 e}{4\pi}\left[\frac{\mathbf{n}}{(1-\mathbf{nv}/c)^3R}[(\mathbf{n}-\mathbf{v}/c)\dot{\mathbf{v}}]\right]_{t'},\quad \mathbf{H}=c\varepsilon_0[\mathbf{nE}],$$

où $\mathbf{R}(t)=\mathbf{r}-\mathbf{r}_e(t)$, $\mathbf{n}=\mathbf{R}/R$, $\dot{\mathbf{v}}=d\mathbf{v}/dt$ et l'indice t' inférieur dont sont affectés les crochets et les accolades indique que toutes les grandeurs sont prises compte tenu du retard, c'est-à-dire à l'instant $t'=t-R(t')/c$.

On remarquera que les champs électrique et magnétique sont perpendiculaires l'un à l'autre. Les champs comportent deux composantes: l'une décroît avec la distance comme R^{-2} et l'autre, comme R^{-1}. La seconde composante est perpendiculaire au vecteur $\mathbf{n}$ et proportionnelle à l'accélération $\dot{\mathbf{v}}$; c'est elle qui est responsable de l'émission d'énergie. La première composante a un caractère statique et décrit le champ coulombien de la charge rapporté au référentiel en mouvement.

§ 23.3. Emission dipolaire

Déterminons les champs à une grande distance des charges qui les produisent: $r \gg a$, où a sont les dimensions de la région où sont concentrées les charges. Dans ce cas nous pouvons négliger r' devant r au dénominateur de l'expression générale pour le potentiel retardé obtenue au § 23.1. Puis, en négligeant les termes quadratiques en $r'^2 \sim a^2$, on peut mettre $r(1-\mathbf{rr}'/r^2)$ au lieu de $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$. Il vient

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},\ t)=\frac{\mu_0}{4\pi r}\int \mathbf{j}\left(\mathbf{r},\ t-\frac{r}{c}\left[1-\frac{\mathbf{rr}'}{r^2}\right]\right)dV'.$$

Si le déplacement des charges est relativement lent, de telle sorte que $T \gg a/c$ (T étant le temps caractéristique de leur déplacement), on peut également ne pas tenir compte du terme, proportionnel à r', figurant entre crochets de l'argument de $\mathbf{j}$; autrement dit, on peut négliger totalement le retard interne, c'est-à-dire la différence entre les temps de retard des différentes charges du système. Dans le cas d'un mouvement périodique, $T \sim \lambda/c$, où λ est la longueur d'onde de l'onde émise par les charges. Ainsi, lorsque $r \gg a$ et $\lambda \gg a$, nous avons

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},\ t)=\frac{\mu_0}{4\pi r}\int \mathbf{j}\left(\mathbf{r},\ t-\frac{r}{c}\right)dV'$$

ou, en passant à la sommation sur les charges constitutives,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},\ t)=\frac{\mu_0}{4\pi r}\sum_i e_i\mathbf{v}_i\left(t-\frac{r}{c}\right).$$

En remarquant que le moment dipolaire d'un système de charges est $\mathbf{d}(t) = \sum_i e_i \mathbf{r}_i(t)$, nous obtenons finalement

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},\ t) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\,\dot{\mathbf{d}}\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Ainsi, à une grande distance d'un système de charges se déplaçant lentement ($r \gg a$, $\lambda \gg a$), le potentiel vecteur est proportionnel à la dérivée par rapport au temps du moment dipolaire; une telle émission est dite *dipolaire*. (Si la distribution des charges présente une symétrie telle que $\mathbf{d} = 0$, le retard interne $\mathbf{rr}'/(cr)$ ne peut pas être négligé; plus loin nous reviendrons à ce cas.)

Cherchons maintenant les champs engendrés par le système de charges que nous considérons. L'intensité de champ magnétique $\mathbf{H}$ est liée à $\mathbf{A}$ par la relation $\mu_0\mathbf{H} = \text{rot}\,\mathbf{A}$, ce qui permet d'écrire

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},\ t) = \text{rot}\,\frac{\dot{\mathbf{d}}(t - r/c)}{4\pi r}.$$

En utilisant la formule $\text{rot}\,\chi\mathbf{b} = \chi\,\text{rot}\,\mathbf{b} + [\text{grad}\,\chi,\ \mathbf{b}]$, où χ est un scalaire et $\mathbf{b}$ un vecteur, nous avons

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi r}\left[\nabla\dot{\mathbf{d}}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] + \frac{1}{4\pi}\left[\text{grad}\,\frac{1}{r}\,.\ \dot{\mathbf{d}}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right].$$

où ∇ est l'opérateur différentiel nabla (vecteur de composantes $(\partial/\partial x,\ \partial/\partial y,\ \partial/\partial z)$). La grandeur $\dot{\mathbf{d}}$ dépend des coordonnées dans la combinaison $t^* = t - r/c$, et comme $\partial r/\partial x = x/r$ (et de même pour $\partial r/\partial y$, $\partial r/\partial z$), il vient

$$\text{rot}\,\dot{\mathbf{d}}\left(t - \frac{r}{c}\right) = -\frac{1}{cr}\left[\mathbf{r}\ddot{\mathbf{d}}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right].$$

Puis, $\text{grad}\,(1/r) = -\mathbf{r}/r^3$ et donc

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},\ t) = \frac{1}{4\pi cr}\left[\ddot{\mathbf{d}}\left(t - \frac{r}{c}\right),\ \mathbf{r}\right] + \frac{1}{4\pi r^2}\left[\dot{\mathbf{d}}\left(t - \frac{r}{c}\right),\ \mathbf{r}\right].$$

Ici, le second terme est proportionnel à r^{-2} et le premier à r^{-1}, de sorte qu'à de grandes distances ($r \gg a$) seul le premier terme a de l'importance, ce qui permet d'écrire en définitive

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi cr}\left[\ddot{\mathbf{d}}\left(t - \frac{r}{c}\right),\ \mathbf{r}\right].$$

En opérant de façon identique, on calcule l'intensité du champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r},\ t)$; nous indiquerons seulement le résultat final valable pour $r \gg a$ en module $\sqrt{\varepsilon_0}E = \sqrt{\mu_0}H$, le champ $\mathbf{E}$ est dirigé perpendiculairement à $\mathbf{H}$ et $\mathbf{r}$, de sorte que $\sqrt{\varepsilon_0}\mathbf{E} = (\sqrt{\mu_0}/r)[\mathbf{H},\ \mathbf{r}]$. Ainsi,

à de grandes distances, les champs produits par des charges variables et des courants variables décroissent en raison inverse de la première puissance de la distance.

Sous ce rapport ils diffèrent considérablement des champs statiques. En effet, comme il a été établi aux chapitres 1, 4, les champs électrostatiques produits par une charge et un dipôle décroissent respectivement comme r^{-2} et r^{-3}, alors que le champ magnétique d'un courant continu (de dimensions finies) décroît comme r^{-3}. Ainsi,

les champs variables décroissent beaucoup plus lentement que les champs statiques.

C'est précisément à la décroissance des champs produits par des charges et courants variant suivant la loi de r^{-1} qu'est lié le phénomène très important, à savoir la possibilité d'émission d'ondes électromagnétiques par de tels courants et charges. Pour expliquer ce phénomène, calculons le flux d'énergie électromagnétique $\mathcal{J}$ à travers une surafce fermée Σ entourant le système de charges et de courants considéré : $\mathcal{J} = \int_{\Sigma} \mathbf{S} d\sigma$, où $\mathbf{S} = [\mathbf{EH}]$ est le vecteur de Poynting et $d\boldsymbol{\sigma}$, l'élément de surface. Supposons, pour fixer les idées, que la surface Σ est une sphère de grand rayon R ($R \gg a$). En faisant usage des expressions obtenues plus haut pour les champs et en tenant compte que pour une sphère $d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n}r^2 do$, où $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire de la normale à la sphère et do, l'élément d'angle solide, nous obtenons

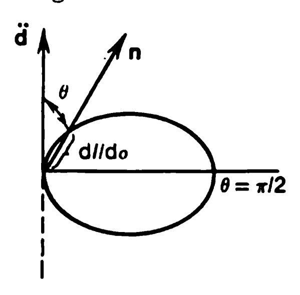


Fig. 23.1. Diagramme de directivité de l'émission dipolaire

$$\mathcal{J} = \int d\mathcal{J}, \quad d\mathcal{J} = \frac{1}{(4\pi)^2 \varepsilon_0 c^3} [\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]^2 do.$$

Nous voyons qu'à de grandes distances R le flux d'énergie $\mathcal{J}$ ne dépend pas de R et donc tend vers une limite constante lorsque $R \to \infty$. Cette limite est appelée *intensité de rayonnement* (en l'occurrence, de l'émission dipolaire). La grandeur $d\mathcal{J}$ peut s'interpréter comme l'intensité de rayonnement dans l'élément d'angle solide do. En introduisant l'angle θ que font entre eux les vecteurs $\mathbf{n}$ et $\ddot{\mathbf{d}}$, nous voyons que $d\mathcal{J}$ est proportionnelle à $\sin^2\theta$; cette variation angulaire détermine le *diagramme de directivité de l'émission dipolaire* (fig. 23.1).

Soulignons que dans le cas des champs statiques les grandeurs proportionnelles à $[\mathbf{EH}]$ décroissent plus vite que r^{-2} et, pour cette raison, les flux correspondants tendent vers zéro lorsque $r \to \infty$. C'est la raison pour laquelle dans le cas des champs statiques il n'y a pas d'émission. Cependant, il faut se garder de penser que la grandeur $[\mathbf{EH}]$ est dénuée de sens physique. Elle a toujours le sens de densité de flux d'énergie électromagnétique. Envisageons, par exemple,

un conducteur cylindrique parcouru par un courant continu. Il est aisé de s'assurer que le vecteur **S** est dirigé vers l'intérieur du conducteur et que le flux total **S** est égal à la chaleur dégagée dans le conducteur par effet Joule.

En intégrant $d\mathcal{J}$ sur l'angle solide, nous trouverons l'intensité totale de l'émission dipolaire:

$$\mathcal{J}=\frac{1}{6\pi\varepsilon_0c^3}\,\ddot{\mathbf{d}}^2.$$

Si le moment dipolaire varie suivant une loi harmonique: $\mathbf{d}=\mathbf{d}_0\cos\omega t$, où $\mathbf{d}_0$ est un vecteur constant, la valeur moyenne (pendant une période d'oscillations) de $\mathcal{J}$ a pour expression

$$\langle\mathcal{J}\rangle=\frac{\omega^4}{12\pi\varepsilon_0c^3}\,\mathbf{d}_0^2.$$

Nous voyons que l'intensité (moyennée), de rayonnement croît avec la fréquence ω proportionnellement à la quatrième puissance de cette fréquence.

Les formules obtenues sont également applicables dans le cas où le système n'est constitué que d'une seule charge en mouvement. Dans ce cas $\mathbf{d}=e\mathbf{r}$ et $\ddot{\mathbf{d}}=e\mathbf{w}$, où $\mathbf{w}$ est l'accélération de la charge, si bien que la formule exprimant l'intensité de rayonnement prend la forme

$$\mathcal{J}=\frac{e^2w^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}\,.$$

Une charge en mouvement accéléré émet obligatoirement, et l'énergie émise par unité de temps est proportionnelle au carré de l'accélération.

Cette formule n'est valable que pour des vitesses non relativistes $v\ll c$. En effet, la formule générale donnant l' intensité de rayonnement ne tient pas compte du retard interne: $a\ll cT$. Mais $T\sim a/v$, où v est la vitesse de mouvement de la charge, d'où il résulte que $v\ll c$.

Si une particule chargée se déplace dans un champ magnétique constant d'induction **B**, $\mathbf{w}=e\,[\mathbf{vB}]$ et donc l'intensité de rayonnement s'exprime par la formule

$$\mathcal{J}=\frac{e^4v^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}\,B^2\sin^2\vartheta$$

(ϑ étant l'angle formé entre les vecteurs **v** et **B**).

Considérons encore l'émission d'un électron attiré par le noyau suivant la loi de Coulomb: $v=-Ze/(4\pi\varepsilon_0r)$. Dans ce cas l'électron peut se déplacer suivant une circonférence avec une accélération $w=v^2/a$, où a est le rayon de l'orbite électronique. En remar-

quant que $m_e w = eE = Ze^2/(4\pi\varepsilon_0 a^2)$, nous obtenons

$$\mathcal{J} = \frac{2Z^2e^6}{3\,(4\pi\varepsilon_0)^3\, m_e^2 c^3 a^4}$$

(m_e étant la masse de l'électron).

L'énergie de l'électron dans l'atome a pour valeur

$$W = \frac{mv^2}{2} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{-Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

(le signe « — » s'explique par la finitude du mouvement). En partant de cette formule, il est facile d'évaluer le temps pendant lequel sera émise l'énergie $|W|$:

$$\tau \sim \frac{|W|}{\mathcal{J}} \sim \frac{ac}{Z}\left(\frac{a}{r_0}\right)^2 .$$

où la grandeur $r_0 = e^2/(4\pi\varepsilon_0 mc^2)$ est appelée *rayon classique de l'électron*.

Appliquons cette formule au modèle planétaire classique de l'atome, par exemple de l'atome d'hydrogène ($Z = 1$). Dans ce cas $a \sim 10^{-10}$ m et donc $\tau \sim 10^{-9}$ s. Telle doit être, suivant le modèle classique, la vie moyenne de l'atome d'hydrogène. Nous voyons que l'émission d'ondes électromagnétiques par un électron atomique rend impossible l'explication de la stabilité de l'atome dans le cadre de la physique classique basée sur la mécanique de Newton et l'électrodynamique de Maxwell. C'est cette contradiction de la physique classique, résolue par Bohr dans ses célèbres postulats (1913), qui a été une des raisons principales de la création de la physique quantique.

Comme nous l'avons déjà dit, dans certains cas le moment dipolaire est identiquement nul (ou se conserve) par suite de la symétrie du système de charges émetteur, de sorte que l'émission dipolaire devient impossible. Il est donc nécessaire d'étudier, en plus de l'émission dipolaire, d'autres types possibles de rayonnement. A cet effet, on doit tenir compte de l'effet de retard interne.

En reprenant la formule générale qui exprime le potentiel vecteur retardé

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r}\int \mathbf{j}\left(t - \frac{1}{c}\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| + \frac{\mathbf{r}'\mathbf{n}}{c}\right) dV',$$

où $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, nous garderons les deux premiers termes dans le développement de l'expression sous le signe d'intégration suivant les puissances du retard interne $\mathbf{r}'\mathbf{n}/c$. Nous obtiendrons

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r}\int \mathbf{j}\, dV' + \frac{\mu_0}{4\pi cr}\frac{\partial}{\partial t}\int (\mathbf{r}'\mathbf{n})\,\mathbf{j}\, dV', \qquad \mathbf{j} \equiv \mathbf{j}\left(t - \frac{1}{c}\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right)$$

ou encore, en passant aux charges ponctuelles,

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r}\sum e\mathbf{v} + \frac{\mu_0}{4\pi cr}\frac{\partial}{\partial t}\sum e\mathbf{v}\,(\mathbf{r}'\mathbf{n})$$

(toutes les grandeurs figurant au second membre sont prises compte tenu du retard, c'est-à-dire à l'instant $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|/c$, où $\mathbf{r}(t)$ est le rayon vecteur de la charge).

Mettons le second terme sous la forme suivante:

$$\mathbf{v}(\mathbf{rn}) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(\mathbf{nr}) + \frac{1}{2}\mathbf{v}(\mathbf{nr}) - \frac{1}{2}\mathbf{r}(\mathbf{nv}) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(\mathbf{nr}) + \frac{1}{2}[[\mathbf{rv}]\,\mathbf{n}].$$

Puis notons qu'on peut ajouter à **A** un vecteur quelconque parallèle à **n**: le champ n'en sera pas changé. En nous rappelant les définitions des moments quadrupolaire et magnétique d'un système de charges

$$D_{ij} = \sum e\,(3x_i x_j - r^2\delta_{ij}), \quad \mathbf{m} = \frac{1}{2}\sum e\,[\mathbf{rv}],$$

nous pouvons mettre facilement l'expression du potentiel vecteur sous la forme suivante:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{\ddot{\mathbf{d}}}{r} + \frac{\ddot{\mathbf{D}}}{6cr} + \frac{[\dot{\mathbf{m}}\mathbf{n}]}{cr}\right),$$

où **D** est un vecteur de composantes $D_i = D_{ij}n_j$.

Connaissant A, on peut calculer les champs et donc l'intensité de rayonnement. Bornons-nous à indiquer la formule définitive

$$\mathcal{I} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2 + \frac{1}{180c^5}\dddot{D}_{ij}^2\right) + \frac{\mu_0}{6\pi c^3}\ddot{\mathbf{m}}^2.$$

Le premier terme au second membre de cette expression traduit la formule déjà connue de l'intensité de rayonnement dipolaire; les deuxième et troisième termes déterminent les intensités respectivement de rayonnement *quadrupolaire* ($\mathcal{I}_Q$) et *magnéto-dipolaire* ($\mathcal{I}_m$). Signalons que pour tout système réduit à deux particules le rayonnement magnéto-dipolaire est nul; il n'est pas difficile de montrer que le moment magnétique d'un système constitué de deux particules est proportionnel au moment cinétique et donc se conserve ($\dot{\mathbf{m}} = 0$).

§ 23.4. Antenne

Les résultats obtenus aux §§ 23.1, 23.3 permettent d'expliquer le principe de fonctionnement de l'antenne utilisée pour l'émission d'ondes radio-électriques. L'antenne se présente sous la forme d'un conducteur filiforme le long duquel est excité un courant alternatif à répartition bien déterminée. Nous allons examiner un cas concret d'une antenne linéaire de longueur d, excitée au centre, à l'aide d'une ligne coaxiale par exemple (fig. 23.2). Si l'excitation est produite à une fréquence déterminée ω, la distribution du courant I le long de l'antenne (suivant l'axe z) est sinusoïdale et aux extrémités de

l'antenne ($z = \pm d/2$) le courant est nul:

$$I(z, t) = I_0 \sin\left(\frac{1}{2} kd - k|z|\right) e^{-i\omega t},$$

où $k = \omega/c$ et I_0 est l'intensité maximale du courant d'antenne, déterminée par l'amplitude I_m du courant dans l'intervalle entre les deux parties de l'antenne (au milieu de l'antenne): $I_0 = I_m \sin^{-1}(kd/2)$.

Cherchons le champ électromagnétique créé par l'antenne. Au préalable, transformons l'expression du potentiel vecteur relativement au cas du courant filiforme. A cet effet, dans l'expression générale de **A** il convient de poser $\mathbf{j}dV = I d\mathbf{l}$, où $d\mathbf{l}$ est l'élément de longueur du conducteur filiforme et I, l'intensité du courant qui le parcourt. En outre, en nous intéressant au champ à grande distance de l'antenne, nous devons remplacer dans l'expression

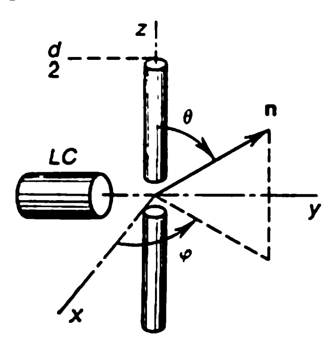


Fig. 23.2. Antenne filiforme excitée au centre (LC, ligne coaxiale)

$$t' = t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{r}'\mathbf{n}}{c}$$

le retard interne $\mathbf{r}'\mathbf{n}/c$ par $z \cos\theta/c$, où z est la coordonnée d'un point de l'antenne et θ l'angle que l'axe z fait avec la direction dans laquelle on calcule le potentiel vecteur ($\mathbf{n}$ étant le vecteur unitaire orienté dans cette direction, φ, l'angle polaire). Finalement nous obtenons pour A_z, qui est la seule composante non nulle du potentiel vecteur, l'expression suivante:

$$A_z(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int I\left(z, t - \frac{r}{c} + \frac{z}{c}\cos\theta\right) dz.$$

En y portant l'expression indiquée plus haut pour l'intensité du courant d'antenne, nous obtenons

$$A_z(\mathbf{r}, t) = \frac{I_0\mu_0}{4\pi r} e^{-i\omega(t - r/c)} \int_{-d/2}^{+d/2} \sin\left(\frac{kd}{2} - k|z|\right) e^{ikz\cos\theta} dz.$$

Le calcul de l'intégrale, qui est élémentaire, donne

$$A_z(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 I_0 e^{i(kr - \omega t)}}{2\pi kr \sin^2\theta} \left\{\cos\left(\frac{1}{2} kd \cos\theta\right) - \cos\frac{kd}{2}\right\}.$$

A grande distance de l'antenne, dans la zone d'onde, où $kr \gg 1$, l'induction du champ magnétique est liée à **A** par la relation $\mathbf{B} = ik[\mathbf{nA}]$, d'où $B = k|A_z|\sin\theta$. L'intensité du champ électrique $\mathbf{E} = c[\mathbf{Bn}]$ est dirigée perpendiculairement à **B**. Il est facile

d'en trouver le vecteur de Poynting et l'intensité $d\mathcal{J}$ du rayonnement dans l'élément do d'angle solide autour de la direction **n**:

$$d\mathcal{J} = \frac{I_0^2}{8\pi^2\varepsilon_0 c \sin^2\theta}\left\{\cos\left(\frac{1}{2}kd\cos\theta\right) - \cos\frac{kd}{2}\right\}^2 do.$$

Comme $\mathbf{E} = -ikc\,[\mathbf{n}\,[\mathbf{nA}]] = -ikc\,\{\mathbf{n}\,(\mathbf{nA}) - \mathbf{A}\}$, le rayonnement est polarisé dans un plan passant par l'antenne et le point d'observation.

Dans le cas des ondes longues, lorsque $kd \ll 1$, la formule exprimant $d\mathcal{J}$ prend la forme

$$d\mathcal{J} = \frac{I_m^2}{128\pi^2\varepsilon_0 c}(kd)^2\sin^2\theta\, do,$$

$$I_m = I_0 \sin(kd/2).$$

Cette formule correspond à l'approximation dipolaire parce qu'elle suppose que la longueur d'onde de l'onde émise $\lambda \gg d$. L'intensité de rayonnement totale s'obtient par intégration sur do:

$$\mathcal{J} = I_m^2\,(kd)^2/(48\pi\varepsilon_0 c).$$

Nous voyons que dans le cas des ondes longues l'intensité de rayonnement est proportionnelle au carré du rapport des dimensions de l'antenne à la longueur d'onde.

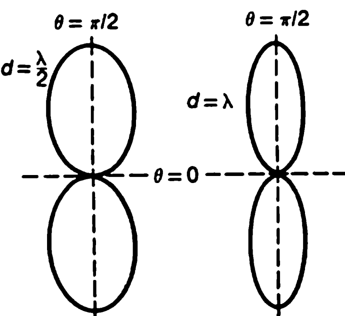


Fig. 23.3. Diagrammes de directivité d'une antenne demi-onde et d'une antenne en onde entière

Reportons-nous maintenant à la formule générale de $d\mathcal{J}$ qui est valable pour toutes les valeurs de kd. Les plus intéressants sont deux cas: lorsque la longueur de l'antenne est égale à une demi-longueur d'onde et lorsqu'elle l'est à une onde entière, c'est-à-dire lorsque $kd = \pi$ et $kd = 2\pi$. Dans ces cas

$$\frac{d\mathcal{J}}{do} = \frac{I_0^2}{8\pi^2\varepsilon_0 c\sin^2\theta}\begin{cases}\cos^2\dfrac{\pi\cos\theta}{2} & (kd = \pi),\\[2mm] 4\cos^4\dfrac{\pi\cos\theta}{2} & (kd = 2\pi).\end{cases}$$

Les variations de $d\mathcal{J}/do$, c'est-à-dire les diagrammes de directivité de l'antenne, déterminées par ces formules sont montrées sur la figure 23.3. Les intensités totales de rayonnement sont données par les formules

$$\mathcal{J} = \frac{I_0^2}{8\pi\varepsilon_0 c}\begin{cases}2{,}44 & (kd = \pi),\\ 6{,}70 & (kd = 2\pi).\end{cases}$$

Nous voyons que l'intensité de rayonnement d'une antenne en onde entière ($d = \lambda$) est près de trois fois celle d'une antenne demi-onde ($d = \lambda/2$).

Avant de clore ce paragraphe, examinons sommairement la transmission, à l'aide d'une antenne, de signaux et notamment de la parole humaine. Le plus souvent, à cette fin, on module l'amplitude d'intensité du courant d'antenne I_0 par le signal à transmettre. Si, par exemple, le signal représenté en tant que fonction du temps est $\eta(t)$, l'amplitude de courant d'antenne I_0 doit varier dans le temps au rythme du signal, c'est-à-dire être de la forme

$$I_0 \equiv I_0(t) = \bar{I}_0 [1 + \alpha\eta(t)],$$

où $\bar{I}_0$ est une constante et α, un certain nombre inférieur à l'unité (*taux de modulation*). Il est clair que si toutes les fréquences du signal sont très inférieures à la fréquence ω d'excitation (« fréquence porteuse ») de l'antenne, la modulation du courant dans l'antenne sera sans effet sur le caractère du rayonnement. Le champ engendré par un courant étant proportionnel à l'intensité de ce courant, il porte à l'endroit d'observation une information sur le signal, à savoir le champ en tant que fonction du temps a la forme représentée par la figure 23.4. Ici, les sinusoïdes étroites correspondent à la fréquence ω et l'enveloppe est celle de variation de $1 + \alpha\eta(t)$. Le problème consiste maintenant à conserver seulement cette enveloppe. A cet effet, à l'endroit d'observation, le champ est au préalable amplifié (à l'aide d'un amplificateur à haute fréquence ω) et ensuite détecté, c'est-à-dire que la moitié inférieure de la courbe $E = E(t)$ est coupée (par un dispositif de redressement quelconque). Après la détection le champ est amplifié aux basses fréquences et envoyé dans un appareil d'enregistrement de telles fréquences, par exemple, un appareil téléphonique ou télégraphique. Nous n'allons examiner ici ni les détails du processus de détection, ni le fonctionnement de l'antenne de réception.

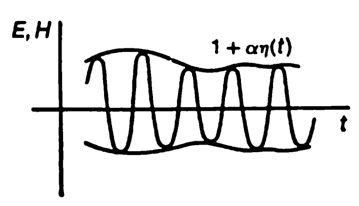


Fig. 23.4. Modulation d'une onde à haute fréquence

§ 23.5. Rayonnement d'une charge relativiste

Au § 23.3 nous avons trouvé l'intensité du rayonnement dipolaire d'une particule chargée en mouvement. Les formules qui y ont été obtenues ne sont valables que dans le cas non relativiste ($v \ll c$). Proposons-nous maintenant de déterminer l'intensité de rayonnement d'une particule dont la vitesse n'est pas négligeable comparativement à celle de la lumière. Il n'est pas difficile de le faire si l'on utilise les formules déjà existantes pour le rayonnement d'une particule non relativiste. En effet, quelle que soit la vitesse d'une particule on peut toujours passer à un système de référence dans lequel

cette particule se trouve, à un instant donné, au repos et donc l'intensité de son rayonnement est connue. Aussi, le problème consiste-t-il à déterminer comment varie, conformément aux transformations de Lorentz, l'intensité de rayonnement au passage d'un référentiel à un autre.

Pour répondre à cette question, récrivons la formule donnant l'intensité de rayonnement sous la forme

$$d\mathscr{E} = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \mathbf{w}^2 \, dt,$$

où $d\mathscr{E}$ est l'énergie émise pendant le temps dt. Rappelons maintenant que le temps et l'énergie se transforment de la même façon, de sorte que le carré de l'accélération est un invariant relativiste qu'on doit exprimer seulement par l'intermédiaire des grandeurs se rapportant au référentiel de départ (dans lequel la particule est animée d'une grande vitesse). En remarquant que

$$\mathbf{w}^2 = \frac{1}{m^2} \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^2,$$

où $\mathbf{p}$ est l'impulsion et m, la masse de la particule, il suffit d'effectuer le changement $(d\mathbf{p}/dt) \to (dp_\mu/d\tau)^2$, où $p_\mu \equiv (\mathbf{p}, i\mathscr{E}/c)$ est le quadrivecteur énergie-impulsion de la particule et $d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$ l'accroissement du temps propre de la particule correspondant à l'intervalle de temps dt dans le référentiel de départ.

Ainsi, la formule générale de $d\mathscr{E}/dt$, valable pour toutes les vitesses de la particule, est de la forme

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 m^2 c^3} \left(\frac{dp_\mu}{d\tau} \right)^2 = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 m^2 c^3} \left[\left(\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\mathscr{E}}{d\tau} \right)^2 \right],$$

ou encore, si toutes les grandeurs sont exprimées moyennant la vitesse $\mathbf{v}$ et l'accélération $\mathbf{w} = d\mathbf{v}/dt$, de la forme

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \frac{\mathbf{w}^2 - [\mathbf{v}\mathbf{w}]^2/c^2}{(1 - v^2/c^2)^3}.$$

On obtient l'énergie émise totale en intégrant cette expression par rapport au temps:

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{w}^2 - [\mathbf{v}\mathbf{w}]^2/c^2}{(1 - v^2/c^2)^3} \, dt.$$

Si la particule se déplace dans un champ électromagnétique, alors, comme nous l'avons vu au chapitre 7,

$$\mathbf{w} = \frac{e}{m} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left\{ \mathbf{E} + [\mathbf{v}\mathbf{B}] - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{E}) \right\}$$

et donc

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 m^2 c^3} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{(\mathbf{E} + [\mathbf{vB}]^2) - \frac{1}{c^2}(\mathbf{Ev})^2\right\} \frac{dt}{1 - v^2/c^2}.$$

On peut, à l'aide de ces formules, calculer le rayonnement émis par l'électron dans les accélérateurs linéaire et cyclique.

Lorsque l'électron se déplace dans un champ magnétique uniforme d'induction **B**, le rayon de l'orbite et la fréquence de rotation s'expriment par les formules:

$$r = \frac{m_e v}{eB\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \omega_B = \frac{v}{r} = \frac{eB}{m_e}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

et l'intensité de rayonnement par la formule

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{e^4 B^2 v^2}{6\pi\varepsilon_0 m_e^2 c^3 (1 - v^2/c^2)}.$$

Dans le cas ultrarelativiste il est commode de mettre cette formule sous la forme suivante:

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{e^4 B^2}{6\pi\varepsilon_0 m_e^2 c}\left(\frac{\mathscr{E}}{m_e c^2}\right)^2.$$

Dans ce cas l'intensité de rayonnement est proportionnelle au carré de l'énergie $\mathscr{E}$ de la particule. Le rayonnement est concentré principalement au voisinage du plan de l'orbite électronique dans le domaine des angles $\Delta\theta \sim mc^2/\mathscr{E}$. La répartition spectrale du rayonnement présente un maximum aigu, le rayonnement étant concentré principalement dans le domaine des fréquences

$$\omega \sim \omega_B\left(\frac{\mathscr{E}}{m_e c^2}\right) = \frac{eB}{m_e}\left(\frac{\mathscr{E}}{m_e c^2}\right)^2.$$

§ 23.6. Force de frottement de rayonnement

Si l'émission d'énergie électromagnétique est considérée comme un processus continu (et une telle considération découle des équations de Maxwell), la perte d'énergie de la particule par rayonnement d'ondes électromagnétiques peut s'interpréter de façon phénoménologique comme le résultat de l'action d'une certaine force analogue à la force de frottement et appelée *force de frottement de rayonnement*. En désignant cette force par $\mathbf{f}_r$, nous pouvons dire que le travail effectué par cette force $\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_r \mathbf{v} dt$ pendant l'intervalle de temps (t_1, t_2) doit être égal à la différence $W_2 - W_1$ entre les énergies de la particule à ces instants (**v** étant la vitesse de la particule).

En remarquant que

$$W_2 - W_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{J}\, dt,$$

où $\mathcal{J} = e^2 \mathbf{w}^2/(6\,\pi\varepsilon_0 c^3)$ est l'intensité de rayonnement, nous obtenons pour la détermination de $\mathbf{f}_r$ l'équation suivante:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}_r \mathbf{v}\, dt = -\frac{e}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{w}^2\, dt.$$

Pour déterminer $\mathbf{f}_r$, plaçons-nous dans l'hypothèse où le rayonnement a une faible influence sur le mouvement de la particule, c'est-à-dire peut être considéré comme une faible perturbation. Dans le cas d'un mouvement périodique (en négligeant le frottement de rayonnement) de la particule de fréquence ω_0 cela signifie que pour $t_2 = t_1 + 2\pi/\omega_0$ les égalités $\mathbf{v}(t_2) = \mathbf{v}(t_1)$, $\mathbf{w}(t_2) = \mathbf{w}(t_1)$ doivent être vérifiées avec une haute précision. C'est pourquoi, si nous transformons par parties l'intégrale

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{w}^2\, dt = \int_{\mathbf{v}(t_1)}^{\mathbf{v}(t_2)} \mathbf{w}\, d\mathbf{v} = \mathbf{w}\mathbf{v}\,\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathbf{w}}{dt}\, \mathbf{v}\, dt,$$

le terme en dehors du signe d'intégration disparaît, si bien que l'équation de $\mathbf{f}_r$ devient

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\mathbf{f}_r - \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \frac{d\mathbf{w}}{dt}\right) \mathbf{v}\, dt = 0.$$

Cette intégrale doit s'annuler identiquement pour toutes les valeurs de $\mathbf{v}(t)$, de sorte que

$$\mathbf{f}_r = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \frac{d\mathbf{w}}{dt}.$$

C'est l'expression définitive de la force de frottement de rayonnement. On remarquera que

cette force est proportionnelle à la dérivée de l'accélération par rapport au temps.

Soulignons que cette expression n'est applicable que dans le cas où la force $\mathbf{f}_r$ est petite par rapport à d'autres forces s'exerçant sur la particule. On peut s'en assurer sur un exemple simple en considérant l'action de la force de frottement de rayonnement sur une particule libre. L'équation du mouvement serait dans ce cas de la forme

$$m\mathbf{w} = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \frac{d\mathbf{w}}{dt},$$

d'où

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 e^{\frac{3c}{2r_0} t},$$

où $\mathbf{w}_0$ est l'accélération à l'instant initial et $r_0 = e^2/(4\pi\varepsilon_0 m_e^2 c^2)$ le rayon classique de l'électron. Nous voyons que si la particule n'était soumise qu'à la seule force de frottement de rayonnement, elle devrait s'accélérer indéfiniment malgré les pertes d'énergie par rayonnement. L'absurdité de cette conclusion montre que c'est avec une extrême prudence qu'on doit utiliser l'expression de la force de frottement de rayonnement et seulement dans le cas où cette force est petite devant les autres forces appliquées à la particule.

Au paragraphe suivant, en considérant l'action de la force de frottement de rayonnement sur un oscillateur harmonique, nous obtiendrons

un des critères d'applicabilité de la notion de frottement par rayonnement: $\lambda \gg r_0$, où λ est la longueur d'onde de l'onde émise et r_0, le rayon classique de l'électron. Pour des longueurs d'onde inférieures à r_0 (ou comparables à r_0) l'électrodynamique classique conduit à une contradiction et donc n'est pas applicable.

Un autre critère d'applicabilité de l'électrodynamique classique peut être obtenu si l'on considère l'action de la force de frottement de rayonnement sur une particule en mouvement dans un champ électromagnétique. L'équation du mouvement d'une telle particule est de la forme

$$m\dot{\mathbf{v}} = eE + e[\mathbf{v}\mathbf{B}] + \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\ddot{\mathbf{v}}.$$

Dans un système de référence dans lequel la charge est, à un instant donné, au repos (la force de frottement de rayonnement étant négligée) nous avons

$$\ddot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m}\dot{\mathbf{E}} + \frac{e}{m}[\dot{\mathbf{v}}\mathbf{B}] = \frac{e}{m}\left(\dot{\mathbf{E}} + \frac{e}{m}[\mathbf{E}\mathbf{B}]\right),$$

ce qui permet de récrire la force de frottement de rayonnement sous la forme suivante:

$$\mathbf{f}_r = \frac{e^3}{6\pi\varepsilon_0 m c^3}\left(\dot{\mathbf{E}} + \frac{e}{m}[\mathbf{E}\mathbf{B}]\right).$$

Comparons le deuxième terme entre parenthèses à la force $e\mathbf{E}$. La condition que la force de frottement de rayonnement soit faible se réduit dans ce cas à l'inégalité

$$cB \ll e/(\varepsilon_0 r_0^2).$$

Nous concluons de là que

des champs trop intenses ne peuvent pas, eux non plus, être envisagés en électrodynamique classique.

Posons-nous maintenant un problème dans lequel la force $\mathbf{f}_r$ est petite par rapport à d'autres forces agissant sur la particule et l'utilisation de la notion de force de frottement de rayonnement conduit à des résultats ayant un sens physique déterminé, c'est le problème d'un oscillateur harmonique chargé. Si m est la masse et ω_0 la fréquence propre de l'oscillateur, son rayon vecteur satisfait, compte tenu du frottement de rayonnement, à l'équation

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{2r_0}{3c} \dddot{\mathbf{r}}.$$

Cherchons une solution de cette équation de la forme $\mathbf{r} = \mathbf{a}e^{(-i\omega t)}$, où $\mathbf{a}$ et ω sont l'amplitude et la fréquence d'oscillations (en général, complexes). Nous obtiendrons une équation cubique par rapport à ω:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{2r_0}{3c} i\omega^3.$$

Parmi les trois solutions de cette équation deux seulement doivent avoir un sens physique, à savoir celles pour lesquelles ω^2 est proche de ω_0^2. En négligeant des termes quadratiques en $\omega - \omega_0$, nous trouverons

$$\omega = \pm\omega_0 - i\frac{r_0}{3c}\omega_0^3 \equiv \omega_0 - i\gamma/2\,; \quad \gamma \equiv \frac{4\pi r_0}{3\lambda}\omega_0.$$

Ainsi, $\mathbf{r} = \mathbf{a} \exp\{-i\omega_0 t - \gamma t/2\}$, c'est-à-dire que les oscillations s'amortissent lentement, suivant une loi exponentielle. Nous voyons que dans le problème de l'oscillateur harmonique chargé le frottement de rayonnement est tout à fait analogue au frottement ordinaire.

§ 23.7. Largeur d'une raie spectrale

Lorsqu'il y a un frottement quelconque, non nécessairement celui de rayonnement, l'oscillateur cesse d'effectuer des oscillations rigoureusement harmoniques et donc d'émettre des ondes parfaitement monoharmoniques. Une question se pose: quel sera le spectre de fréquences émises par un tel oscillateur?

Pour répondre à cette question, exprimons l'énergie émise totale $\mathscr{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{J} dt$ (où $\mathscr{J} = \ddot{\mathbf{d}}^2/(6\pi\varepsilon_0 c^3)$) par l'intermédiaire de la composante de Fourier du moment dipolaire de l'oscillateur:

$$\ddot{\mathbf{d}}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\ddot{\mathbf{d}}(t)\frac{dt}{2\pi}.$$

Suivant la formule d'inversion de Fourier

$$\ddot{\mathbf{d}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\ddot{\mathbf{d}}_\omega \, d\omega,$$

de sorte que

$$\mathscr{E} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \, dt = (6\pi\varepsilon_0 c^3)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dt \, d\omega \, d\omega' e^{-i(\omega-\omega')t} \ddot{\mathbf{d}}_\omega \ddot{\mathbf{d}}_{\omega'}.$$

Rappelons que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega-\omega')t} \, dt = 2\pi\delta(\omega - \omega'),$$

où δ est la fonction delta que nous avons déjà utilisée à de nombreuses occasions, qui est nulle lorsque $\omega \neq \omega'$ et infinie lorsque $\omega = \omega'$ et normée de telle sorte que son intégrale soit égale à l'unité. L'apparition de cette fonction permet d'effectuer l'intégration sur ω':

$$\mathscr{E} = \int d\mathscr{E}_\omega, \quad d\mathscr{E}_\omega = (3\varepsilon_0 c^3)^{-1} |\ddot{\mathbf{d}}_\omega|^2 \, d\omega.$$

Nous voyons que l'énergie émise est représentable par une intégrale, sur les fréquences, de la grandeur $|\ddot{\mathbf{d}}_\omega|^2/(3\varepsilon_0 c^3)$ qui a ainsi le sens de *densité spectrale de l'énergie émise.*

La répartition spectrale du rayonnement est généralement caractérisée par la *forme de la raie* $f(\omega)$, c'est-à-dire par le rapport de l'énergie émise dans l'intervalle de fréquence $(\omega, \omega + d\omega)$ à l'énergie émise totale: $f(\omega)\, d\omega = d\mathscr{E}_\omega/\mathscr{E}$. Nous voyons que dans le rayonnement dipolaire $f(\omega) = C^{te} |\ddot{\mathbf{d}}_\omega|^2$, où Cte est une constante de normalisation.

Cherchons maintenant la composante de Fourier de $\ddot{\mathbf{d}}_\omega$ pour un oscillateur effectuant des oscillations amorties. Si l'oscillateur commence à osciller à l'instant $t = 0$, nous avons suivant les résultats obtenus au paragraphe précédent

$$\ddot{\mathbf{d}} = -e\mathbf{a}\omega_0^2 e^{-i\omega_0 t - \gamma t/2}.$$

Nous pouvons donc écrire

$$\ddot{\mathbf{d}}_\omega = \frac{-e\mathbf{a}\omega_0^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega_0-\omega)t - \frac{\gamma}{2}t} \, dt = \frac{e\mathbf{a}\omega_0^2/(2\pi)}{-i(\omega_0 - \omega) - \gamma/2}.$$

La constante de normalisation figurant dans $f(\omega)$ est facile à déterminer. En définitive, nous obtenons

$$f(\omega)=\frac{\gamma/(2\pi)}{(\omega-\omega_0)^2+(\gamma/2)^2}.$$

Nous voyons qu'un oscillateur à faible amortissement émet dans un intervalle de fréquence étroit au voisinage de sa fréquence propre ω_0 ; la largeur $\Delta\omega$ de cet intervalle est égale au coefficient d'amortissement γ (fig. 23.5).

Si l'oscillateur ne perd son énergie que par rayonnement, de sorte que de toutes les forces qui le freinent il suffit de prendre en compte le seul frottement de rayonnement, la raie prend sa largeur minimale possible $\gamma = 4\pi r_0\omega_0/(3\lambda)$. Cette grandeur est appelée *largeur naturelle de raie.*

La largeur naturelle de raie est déterminée par le fait lui-même du rayonnement, c'est-à-dire par l'interaction entre le système émetteur et le champ de rayonnement.

Si le système émetteur interagit encore avec d'autres objets physiques, ces interactions conduisent elles aussi à un élargissement de raies. Les élargissements provoqués par divers mécanismes des interactions s'ajoutent de telle sorte que si $\Delta\omega_i$ est la largeur effective de raie due au i-ième mécanisme, la largeur de raie totale $\Delta\omega = \sum_i \Delta\omega_i$.

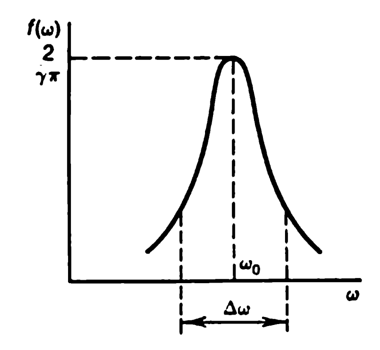


Fig. 23.5. Forme de raie d'un oscillateur

Chacune des largeurs de raie partielles $\Delta\omega_i$ est liée de façon très simple à la durée de vie effective τ_i du système radiant correspondant au i-ième mécanisme de l'interaction. C'est ainsi que la durée de vie d'un oscillateur dont l'amortissement des oscillations est dû à l'existence même du rayonnement est $\tau_r = 1/\gamma$, et la largeur naturelle de raie $\Delta\omega = \gamma = 1/\tau_r$. Des relations analogues sont également valables pour d'autres mécanismes de l'élargissement de la raie, c'est-à-dire que $\Delta\omega_i = 1/\tau_i$, si bien que

$$\Delta\omega = \sum (1/\tau_i).$$

A divers mécanismes de l'élargissement correspondent des formes différentes de la raie qui ne se confondent pas dans le cas général avec la forme naturelle obtenue plus haut.

Considérons de plus près l'élargissement de raie dû aux collisions des systèmes émetteurs, par exemple des oscillateurs l'un avec

l'autre. S'il n'y avait pas de collisions, l'oscillateur émettrait une onde monochromatique de fréquence ω_0, c'est-à-dire que $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)$. Par suite des collisions le champ n'aura cette forme que dans un certain intervalle de temps $(0, \tau)$, après quoi il y aura une collision et les intervalles τ obéissent à une loi statistique. Nous supposerons que la probabilité $w(\tau)d\tau$ pour que l'intervalle de temps avant collision se situe entre τ et $\tau + d\tau$ se définisse par la formule

$$w(\tau)\,d\tau = \frac{1}{\tau_{\text{coll}}} \exp(-\tau/\tau_{\text{coll}}),$$

où τ_{coll} est la valeur moyenne de τ (rappelons que $\int w(\tau)\,d\tau = 1$).

Déterminons maintenant la composante de Fourier du champ de rayonnement $\mathbf{E}_\omega$:

$$\mathbf{E}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(t)\, e^{i\omega t} \frac{dt}{2\pi} = \mathbf{E}_0 \int_0^{\tau} e^{i(\omega-\omega_0)t} \frac{dt}{2\pi} = \frac{\mathbf{E}_0}{2\pi} \frac{e^{i(\omega-\omega_0)\tau} - 1}{i(\omega-\omega_0)}.$$

En formant $|\mathbf{E}_\omega|^2$, déterminons l'intensité de rayonnement. Il nous reste à moyenner la dernière grandeur sur τ. Finalement nous obtenons

$$\langle|\mathbf{E}_\omega|^2\rangle = \int_0^{\infty} |\mathbf{E}_\omega|^2 w(\tau)\,d\tau = \left(\frac{E_0}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{(\omega-\omega_0)^2 + 1/\tau_{\text{coll}}^2}.$$

Nous voyons que la forme de la raie due aux collisions coïncide avec la forme naturelle : quant à la largeur de la raie, il se trouve qu'elle est égale à $\gamma_{\text{coll}} = 1/\tau_{\text{coll}}$.

FORMULES FONDAMENTALES

Equations d'onde avec sources	$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\rho/\varepsilon_0$, $\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mathbf{j}$
Potentiels retardés	$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{1}{c}\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert\right)}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert} dV'$, $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{1}{c}\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert\right)}{\lvert\mathbf{r}-\mathbf{r}'\rvert} dV'$
Intensité différentielle de rayonnement dipolaire	$d\mathcal{J} = \frac{1}{(4\pi)^2\varepsilon_0 c^3}[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]^2\, do$

Intensité intégrale de rayonnement dipolaire	$\mathcal{J} = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$
Intensité de rayonnement quadrupolaire	$\mathcal{J}_Q = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\dddot{D}_{ij}^2}{180c^5}$, $D_{ij} = \Sigma e(3x_i x_j - r^2\delta_{ij})$
Intensité de rayonnement magnétique dipolaire	$\mathcal{J}_{\mathfrak{m}} = \frac{\mu_0 \ddot{\mathfrak{m}}^2}{6\pi c^3}$, $\mathfrak{m} = \frac{1}{2}\sum e[\mathbf{rv}]$
Intensité de rayonnement d'une antenne ($\lambda \gg d$)	$\mathcal{J} = \frac{I_{\mathfrak{m}}^2}{48\pi\varepsilon_0 c}(kd)^2$
Energie émise en 1 s par une particule en mouvement dans un champ magnétique	$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{e^4 B^2 v^2}{6\pi\varepsilon_0 m_e^2 c^3 (1-v^2/c^2)}$
Fréquence du maximum de répartition spectrale de rayonnement cyclotronique	$\omega \sim \frac{eB}{m_e}\left(\frac{\mathcal{E}}{m_e c^2}\right)^2$
Forme naturelle de raie spectrale	$f(\omega) = \frac{\gamma/(2\pi)}{(\omega-\omega_0)^2+(\gamma/2)^2}$, $\gamma = \frac{4\pi}{3}\frac{r_0\omega_0}{\lambda}$

CHAPITRE 24

INTERACTION DES PARTICULES CHARGÉES ET D'UN RAYONNEMENT AVEC LA MATIÈRE

§ 24.1. Diffusion des particules dans le champ coulombien des noyaux atomiques

Le passage des particules chargées et de photons à travers la matière donne lieu à plusieurs effets dus à l'interaction électromagnétique. Nous commencerons leur étude par la diffusion élastique des particules chargées provoquée par le champ coulombien des noyaux atomiques de la substance *.

Si l'on néglige l'effet d'écran du aux électrons atomiques gravitant autour du noyau, la force exercée sur la particule est égale à Zze^2/r^2, où Ze et ze sont les charges respectivement du noyau et de la particule et r, leur distance. La masse du noyau sera supposée beaucoup plus grande que la masse M de la particule. Dans ce cas, le noyau peut être considéré comme étant au repos, alors que la particule suit une hyperbole et l'angle de diffusion θ est lié au paramètre d'impact b par la relation

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\frac{Zze^2}{Mbv^2},$$

où v est la vitesse de la particule (fig. 24.1).

Cette formule est valable en mécanique non relativiste, lorsque $v \ll c$. Pour de faibles valeurs de l'angle de diffusion elle prend la forme

$$\theta=\frac{2Zze^2}{Mbv^2}.$$

Le sens physique de cette dernière formule est facile à saisir si l'on tient compte que $\theta \sim \Delta p/p$, c'est-à-dire que l'angle de diffusion est proportionnel au rapport de l'impulsion Δp perdue par la particule (et dirigée perpendiculairement à l'impulsion initiale $\mathbf{p}$ de la particule) à la valeur de p. Il est évident que $\Delta p = \int zeE_\perp\, dt$, où $E_\perp \sim$ $\sim Ze^2/b^2$ est la composante perpendiculaire de l'intensité du champ produit par le noyau, et l'intervalle de temps effectif qui présente de l'importance dans l'intégrale, c'est-à-dire le temps de collision, est de l'ordre de grandeur de $\tau \sim b/v$; nous pouvons donc écrire

$$\Delta p \sim zeE_\perp\tau \sim Zze^2/(bv).$$

---

* Dans ce chapitre nous utilisons le système d'unités de Gauss.

Le résultat exact $\Delta p = 2Zze^2/(bv)$ diffère de cette évaluation par le facteur 2. En divisant Δp par p, nous trouverons l'angle de diffusion :

$$\theta = 2Zze^2/(pbv).$$

Cette formule est valable pour toutes les valeurs de la vitesse de la particule, y compris dans le cas relativiste ($v \sim c$). Pour des vitesses non relativistes $p = Mv$, ce qui nous amène à la formule obtenue plus haut pour l'angle de diffusion.

La diffusion est généralement caractérisée par la *section efficace différentielle* $d\sigma$ que l'on définit par la relation

$$d\sigma = dN/I,$$

où dN est le nombre de particules diffusées en 1 s dans un intervalle d'angle $(\theta, \theta + d\theta)$ et I, la densité de flux des particules incidentes,

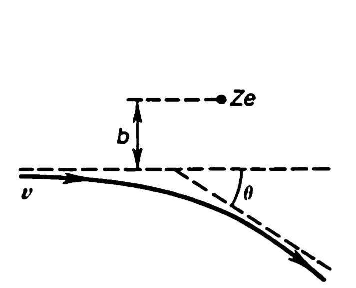


Fig. 24.1. Trajectoire d'une particule dans le champ du noyau atomique

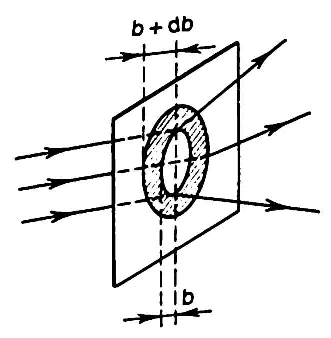


Fig. 24.2. Etablissement de la formule pour la section efficace différentielle de diffusion

c'est-à-dire le nombre de particules tombant en 1 s sur l'unité de surface perpendiculaire à leur vitesse initiale. Comme le paramètre d'impact b est univoquement lié à l'angle de diffusion, il est évident que toutes les particules tombant sur un anneau de rayons b, $b + db$ seront diffusées dans l'intervalle d'angle qui nous intéresse (fig. 24.2). Cela signifie que

$$d\sigma = 2\pi b db.$$

En utilisant la relation entre b et θ indiquée plus haut, nous en tirons

$$d\sigma = \left(\frac{Zze^2}{2Mv^2}\right)^2 \frac{do}{\sin^4(\theta/2)},$$

où $do = 2\pi \sin\theta \, d\theta$ est l'élément d'angle solide dans lequel est effectuée la diffusion. Cette formule est appelée *formule de Rutherford.* On remarquera que

lorsque les angles de diffusion sont faibles, $d\sigma \sim d\theta/\theta^3$, ce qui signifie que dans le champ coulombien la diffusion est principalement celle à petits angles.

La section efficace $d\sigma$ de diffusion caractérise un acte individuel de diffusion. Or, le passage de la particule à travers une substance, par exemple, une mince feuille de métal, donne lieu à de nombreux actes de diffusion. L'angle de déviation résultant des diffusions multiples vaut la somme statistique des petits angles de déviation dus aux actes de diffusion individuels parce que ces angles peuvent être considérés comme des grandeurs aléatoires. Cela signifie que la distribution de la déviation résultante selon les angles est une distribution gaussienne, c'est-à-dire que la probabilité de diffusion dans l'intervalle d'angle $(\theta, \theta + d\theta)$ s'exprime par la formule

$$P(\theta)\,d\theta = C \exp\left\{-\frac{\theta^2}{2\langle\theta^2\rangle}\right\} d\theta,$$

où $\langle\theta^2\rangle$ est la valeur moyenne du carré de l'angle de diffusion multiple et C, une constante qui se détermine par la condition de normalisation $\int P(\theta)\,d\theta = 1$.

Cherchons maintenant $\langle\theta^2\rangle$. Comme des collisions sont statistiquement indépendantes l'une de l'autre, cette valeur est égale à la valeur moyenne du carré de l'angle de diffusion lors d'une collision individuelle, valeur moyenne pour de différentes trajectoires, c'est-à-dire pour de différentes paramètres d'impact. Si N est la densité de noyaux et l, la longueur du chemin de la particule (dans le cas d'une feuille de métal mince, son épaisseur), le nombre de collisions se produisant dans le volume d'un cylindre creux de hauteur l dont la base est un anneau de rayons b et $b + db$, est égale à $Nl2\pi b db$, de sorte que la valeur de $\langle\theta^2\rangle$ s'exprime par la formule

$$\langle\theta^2\rangle = Nl \int_{b_{min}}^{b_{max}} \theta^2(b)\,2\pi\,b db = \frac{8\pi N l Z^2 z^2 e^4}{p^2 v^2} \ln \frac{b_{max}}{b_{min}}\,.$$

Les limites d'intégration sur b se déterminent par des considérations suivantes. Si la charge du noyau était totalement mise sous écran pour $b > b_{max}$ et ne l'était pas du tout pour $b < b_{max}$, la valeur de b_{max} serait déterminée de façon absolument rigoureuse ; or, une telle frontière nette n'existe pas, de sorte qu'on prend comme b_{max} le rayon de l'atome $a_0 Z^{-1/3}$, où $a_0 = \hbar^2/(m_e e^2)$ est le rayon de Bohr et m_e, la masse de l'électron.

La valeur de b_{min} se détermine par l'angle de déviation maximal lors d'un acte de diffusion individuel. Lors de la diffusion dans le champ coulombien, seuls les petits angles de diffusion présentent de l'importance, et comme la formule donnant $\langle\theta^2\rangle$ est peu sensible au choix de b_{min} (qui n'intervient que sous le signe du logarithme),

on peut considérer que b_{min} correspond à un angle de diffusion $\theta \sim 1$, c'est-à-dire que $b_{min} = 2Zze^2/(pv)$. En introduisant ces valeurs de b_{max} et de b_{min} dans la formule pour $\langle\theta^2\rangle$, nous obtenons finalement

$$\langle\theta^2\rangle = \frac{8\pi N l Z^2 z^2 e^4}{p^2 v^2} \ln \frac{a_0 p v}{2Z^{4/3} z e^2} .$$

§ 24.2. Pertes d'énergie par ionisation

En traversant la matière la particule chargée non seulement subit une diffusion élastique mais perd encore de l'énergie. Cette perte se produit selon deux mécanismes principaux : premièrement, la particule cède une partie de son énergie aux électrons atomiques qui passent à un état excité ou quittent les atomes, et deuxièmement, étant animée d'un mouvement accéléré, la particule émet des ondes électromagnétiques qui emportent une certaine énergie. Dans le cas du premier mécanisme, on dit que la perte d'énergie est due à l'ionisation (bien que c'est seulement l'excitation et non l'ionisation de l'atome qui puisse se produire), alors que le deuxième mécanisme est baptisé rayonnement de freinage ou bremsstrahlung (de l'allemand *Bremsen*, freinage, et *Strahlung*, radiation, rayonnement).

Etudions d'abord les pertes par ionisation. Supposons qu'à la distance b de la trajectoire d'une particule possédant la charge ze, la masse M et la vitesse v, se trouve un électron dont la vitesse v_e sera supposée petite par rapport à v pendant toute la durée de l'interaction entre les particules. Pour déterminer l'énergie cédée par la particule à cet électron, il est nécessaire de connaître l'impulsion transmise dans la collision, mais nous avons déjà rencontré un tel problème au paragraphe précédent. En nous rappelant que l'impulsion transmise à l'électron $\Delta p = 2ze^2/(bv)$, nous obtenons l'expression suivante pour l'énergie cédée à l'électron :

$$\frac{(\Delta p)^2}{2m_e} = \frac{2z^2e^4}{m_e b^2 v^2} .$$

Multiplions l'énergie transmise dans une seule collision par le nombre de collisions de la particule avec les électrons. Sur un parcours unité la particule subit $2\pi n b \mathrm{d}b$ collisions pour lesquelles le paramètre d'impact est compris dans l'intervalle $(b, b + \mathrm{d}b)$, si bien que la perte d'énergie sur un parcours unité aura pour expression

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = 2\pi n \int_{b_{max}}^{b_{min}} \frac{(\Delta p)^2}{2m_e} b \mathrm{d}b = \frac{4\pi z^2 e^4 n}{m_e v^2} \ln \frac{b_{max}}{b_{min}} ,$$

où n est la densité d'électrons et b_{max} et b_{min} sont les limites d'intégration qui se déterminent à partir des considérations suivantes.

Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, le temps efficace au cours duquel le champ de la particule agit sur l'électron est $\tau \sim b/v$. Cette valeur est valable pour un cas non relativiste; si $v \sim c$, la durée de la collision se trouve réduite à $\tau \sim (b/v) \times \times \sqrt{1 - v^2/c^2}$. Pour que notre calcul des pertes soit correct, l'électron du milieu doit être considéré comme libre, ce qui exige que soit satisfaite l'inégalité $\tau \ll T$, où T est la période d'oscillations de l'électron dans l'atome. Un calcul précis montre que si cette inégalité n'est pas vérifiée, l'énergie acquise par l'électron est négligeable; elle est proportionnelle au facteur exponentiel exp $(-\omega\tau)$, où $\omega = 2\pi/T$ est la fréquence d'oscillations de l'électron. Ainsi,

$$b_{max} = \frac{v}{\langle\omega\rangle \sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

où $\langle\omega\rangle$ est la valeur moyenne de la fréquence d'oscillations des électrons dans les atomes de la substance.

La limite d'intégration inférieure b_{min} doit être posée égale à la longueur d'onde de De Broglie $\lambda = h/p$, où $p = m_e v/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ est l'impulsion de l'électron, car l'introduction du paramètre d'impact considéré comme une grandeur classique n'a un sens physique que si l'inégalité $b > \lambda$ est vérifiée. (En toute rigueur, ces formules font intervenir comme v la vitesse de l'électron dans le système du centre des masses des particules entrant en collision et comme m_e, leur masse réduite. En nous intéressant à une particule lourde, animée d'une grande vitesse, nous identifions v à la vitesse d'une telle particule et m à la masse de l'électron.) Ainsi,

$$b_{min} = \frac{\hbar}{mv} \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

et la formule donnant les pertes d'énergie prend sa forme définitive suivante:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi z^2 e^4 n}{mv^2} \ln \frac{mv^2}{\hbar \langle\omega\rangle (1 - v^2/c^2)} .$$

Cette *formule* est dite *de Bohr*. Un calcul plus précis conduit à la *formule de Bethe*:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi z^2 e^4 n}{m_e v^2} \left(\ln \frac{2m_e v^2}{\langle I \rangle \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} - \frac{v^2}{c^2} \right),$$

où $\langle I \rangle$ est le *potentiel d'ionisation moyen* des atomes de la substance (approximativement $I \sim 13{,}6\ Z$ eV, où Z est le numéro atomique).

Les formules indiquées ci-dessus sont valables pour des particules lourdes et non pour les électrons parce qu'elles ont été obtenues dans l'hypothèse où la particule ne dévie pratiquement pas au cours de son passage à travers la matière. Si la particule traversant la matière est un électron, les pertes d'énergie doivent se calculer dans le cadre de la mécanique quantique. Nous nous contenterons d'indiquer le résultat appartenant à Bethe:

$$-\frac{dE}{dx}=\frac{2\pi e^4 n}{m_e v^2}\left[\ln\frac{mv^2K}{2\langle I^2\rangle\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}-\right.$$
$$\left.-\ln 2\left(2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}-1+\frac{v^2}{c^2}\right)+1-\frac{v^2}{c^2}\right],$$

où

$$K=\frac{m_e c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-m_e c^2.$$

Ayant déterminé les pertes d'énergie de la particule, on peut calculer sa *longueur de parcours* R, c'est-à-dire le chemin qu'elle parcourt jusqu'à un arrêt complet:

$$R=\int_{E_0}^{0} dE\left(\frac{dE}{dx}\right)^{-1},$$

où E_0 est l'énergie initiale de la particule. La longueur R varie suivant une loi approchée $R\sim E^{3/2}$. Pour les particules α se déplaçant dans l'air à la température de 15 °C elle est donnée par la formule approchée $R_\alpha\approx 0{,}32\ E^{3/2}$ cm, où E s'exprime en MeV.

Indiquons les valeurs de $-dE/d\xi\equiv-\rho^{-1}dE/dx$ (ρ étant la densité de la substance) pour les électrons en mouvement dans l'air:

E, eV	$-dE/d\xi$, MeV/(g·cm^{-2})	E, eV	$-dE/d\xi$, MeV/(g·cm^{-2})
10^4	19,5	10^8	2,47
10^5	3,67	10^9	2,79
10^6	1,69	10^{10}	3,48
10^7	1,95		

Les données pour les particules lourdes se déplaçant dans l'air et dans le plomb sont indiquées sur le tableau ci-dessous:

Particules	E, MeV	$-dE/d\xi$, MeV/(g·cm⁻²)	
		dans l'air	dans le plomb
Protons	1	300	150
	10	47	27,5
	100	7,6	5,0
	1 000	2,3	1,6
	10 000	2,3	1,6
Deutérons	2	300	
	20	47	
	200	7,6	
	2 000	2,3	
	20 000	2,3	
Mésons μ	0,112	300	
	1,12	47	
	11,2	7,6	
	112	2,3	
	1 120	2,3	
Particules α	4	1200	
	40	188	
	400	30	
	4 000	9,2	
	40 000	9,2	

Indiquons également les longueurs de parcours des électrons en fonction de leur énergie (exprimée en unités de m_ec^2; rappelons que $1m_ec^2 = 0,5$ MeV):

Substance	Longueur de parcours d'un électron (en cm) en fonction de son énergie (en unités de m_ec^2)				
	0,1	1	10	100	1000
Air	4,4	160	10^3	$1,7\cdot10^6$	$6,3\cdot10^4$
Eau	$4,7\cdot10^{-3}$	0,19	2,6	19	78
Plomb	$9\cdot10^{-4}$	$3,7\cdot10^{-2}$	0,3	1,25	2,5

§ 24.3. Bremsstrahlung

Lorsque l'électron entre en collision avec une particule quelconque ou avec un système de particules, sa diffusion s'accompagne de l'émission d'un photon. Ce phénomène est désigné sous le terme de bremsstrahlung. En particulier, l'électron émet des photons lorsqu'il se déplace dans le champ coulombien produit par le noyau (ou par le noyau et les électrons atomiques qui l'entourent). C'est précisément le deuxième mécanisme de la perte d'énergie par une particule chargée au cours de son passage à travers la matière qui a été mentionné au paragraphe précédent.

Soulignons une fois de plus

que pour émettre un photon l'électron doit obligatoirement interagir avec d'autre particules; un électron libre se déplaçant dans le vide ne peut émettre aucun rayonnement.

Cela est une conséquence directe des lois de conservation de l'impulsion et de l'énergie qui gouvernent tous les processus. En effet, soient $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ les impulsions et $E_1 = c\sqrt{m^2c^2 + p_1^2}$, $E_2 = c\sqrt{m^2c^2 + p_2^2}$ les énergies de l'électron avant et après l'émission et soient $\hbar\mathbf{k}$ et $\varepsilon = \hbar ck$ l'impulsion et l'énergie du photon émis. Alors, $E_1 = E_2 + \hbar ck$, $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 + \hbar\mathbf{k}$, d'où il résulte, pour l'angle ϑ que font entre eux les vecteurs $\mathbf{k}$ et $\mathbf{p}_2$, la relation $\cos\vartheta = E_2/(cp_2)$ qui ne peut pas être satisfaite parce qu'on a toujours $E > cp$.

Passons à la détermination de la section efficace du bremsstrahlung de l'électron:

$$d\sigma_\gamma = dN_\gamma/I,$$

où dN_γ est le nombre de photons émis en 1 s dans un angle solide do et ayant des fréquences comprises dans l'intervalle $(\omega, \omega + d\omega)$ et I, la densité de flux électronique (nombre d'électrons tombant en 1 s sur une surface de 1 m^2 perpendiculaire à la vitesse $\mathbf{v}$ des électrons).

Considérons d'abord le domaine des faibles énergies de l'électron ($v \ll c$). Dans ce cas l'émission a un caractère dipolaire et son intensité s'exprime par la formule connue

$$d\mathcal{J} = \frac{1}{4\pi c^3}[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]^2\, do,$$

où $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire orienté dans la direction de rayonnement et $\mathbf{d}$, le moment dipolaire d'un seul électron $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$, si bien que

$$d\mathcal{J} = \frac{e^2}{4\pi c^3}[\ddot{\mathbf{r}}\mathbf{n}]^2\, do.$$

Nous nous intéressons à la répartition spectrale du rayonnement et devons donc développer $\ddot{\mathbf{d}}$ en intégrale de Fourier:

$$\ddot{\mathbf{d}} = \frac{1}{2\pi} \int \ddot{\mathbf{d}}_\omega e^{-i\omega t} d\omega,$$

introduire cette expression dans la formule donnant $d\mathcal{J}$ et intégrer $d\mathcal{J}$ par rapport au temps. Nous trouverons alors l'énergie totale $d\mathcal{E}$ émise dans l'élément d'angle solide:

$$d\mathcal{E} = \int \mathcal{J}\, dt = \int \mathcal{E}_\omega \, d\omega,$$

où $\mathcal{E}_\omega$ est la densité spectrale de rayonnement. Nous avons déjà fait un tel calcul au § 23.7 et montré que

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{do}{2(2\pi)^2 c^3} |[\ddot{\mathbf{d}}_\omega \mathbf{n}]|^2.$$

La formule obtenue pour $d\mathcal{E}_\omega$ est valable dans l'approximation dipolaire lorsque $v \ll c$ et l'énergie $\hbar\omega$ du photon émis est petite par rapport à l'énergie de l'électron, c'est-à-dire pour le domaine des fréquences peu élevées. Dans ce cas $\ddot{\mathbf{d}}_\omega$ est facile à calculer; en effet, en posant $\omega \to 0$ dans l'expression de la composante de Fourier $\ddot{\mathbf{d}}_\omega = \int \ddot{\mathbf{d}}(t) \exp(i\omega t) dt$, nous obtenons

$$\ddot{\mathbf{d}}_\omega = \int \ddot{\mathbf{d}}(t)\, dt = \dot{\mathbf{d}}_2 - \dot{\mathbf{d}}_1,$$

où $\dot{\mathbf{d}}_1$ et $\dot{\mathbf{d}}_2$ sont les valeurs du moment dipolaire avant et après l'émission. En tenant compte que dans notre cas $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$, nous obtenons finalement

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{e^2}{2(2\pi)^2 c^3} [(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)\, \mathbf{n}]^2 \, d\omega \, do \qquad (\hbar\omega \ll E_{1,2}),$$

où $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ et E_1, E_2 sont les valeurs des vitesses et des énergies de l'électron avant et après l'émission. En divisant cette expression par l'énergie $\hbar\omega$ du photon, nous trouvons la probabilité dw_γ de l'émission du photon dans la direction $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$ dans l'intervalle d'angle solide do et l'intervalle de fréquence $(\omega, \omega + d\omega)$:

$$d\omega_\gamma = \frac{e^2}{2(2\pi)^2 c^3 \hbar\omega} \left[\frac{\mathbf{k}}{k} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)\right]^2 d\omega \, do$$

($\hbar k$ est l'impulsion du photon).

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer la section efficace de bremsstrahlung dans le cas non relativiste et dans le domaine des fréquences faibles. Le processus d'émission est alors sans effet sur le mouvement de l'électron. En d'autres termes, l'électron est diffusé comme si aucun rayonnement n'existait (la diffusion elle-

même est nécessaire pour l'émission parce qu'elle est à l'origine de l'accélération de l'électron et donc du fait que $\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{v}_1$), si bien qu'il suffit de multiplier la formule de Rutherford introduite au § 24.1 pour la section efficace de la diffusion élastique par la probabilité dw_γ d'émission du photon pour obtenir la section efficace $d\sigma_r$ du bremsstrahlung. En remarquant que les impulsions $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}_2$ de l'électron avant et après la diffusion ont le même module et par conséquent $|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2| = 2p_1 \sin(\theta/2)$, on peut écrire la formule de Rutherford sous la forme suivante:

$$d\sigma = \frac{(2mZe^2)^2}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^4} do_2,$$

où do_2 est l'élément d'angle solide du vecteur $\mathbf{p}_2$. Ainsi, nous obtenons en définitive

$$d\sigma_r = \frac{Z^2 e^6 \, d\omega \, do \, do_2}{2\pi^2 c (\hbar\omega)^3 (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^4} [\hbar \mathbf{k} (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)]^2.$$

Cette formule se rapporte au domaine non relativiste. Pour calculer la section efficace $d\sigma_r$ dans le cas relativiste où $v_1 \sim c$, il faut avoir recours à la mécanique quantique. Nous nous contenterons d'indiquer certains résultats.

Le spectre d'émission, c'est-à-dire la section efficace $d\sigma_r$ intégrée sur l'angle de diffusion de l'électron et l'angle de sortie du photon, se détermine dans le champ coulombien du noyau dans le domaine ultrarelativiste ($E_{1,2} \gg mc^2$) par la formule

$$d\sigma_r = 4Z^2 r_0^2 \alpha \left[1 + \left(1 - \frac{\hbar\omega}{E_1}\right)^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{\hbar\omega}{E_1}\right)\right]\left[\ln \frac{2E_1}{mc^2} + \ln\left(\frac{E_1}{\hbar\omega} - 1\right) - \frac{1}{2}\right]\frac{d\omega}{\omega},$$

où $r_0 = e^2/(m_e c^2)$ est le rayon classique de l'électron et $\alpha = e^2/(\hbar c) \sim 1/137$ est une constante qui caractérise l'intensité d'interaction électromagnétique (on l'appelle *constante de structure fine*). Nous voyons que pour un rapport $\hbar\omega/E_1$ donné la section efficace de bremsstrahlung s'accroît approximativement comme $\ln [E_1/(mc^2)]$.

Le bremsstrahlung trouve des applications, en particulier, pour la production de photons dans les amplificateurs électroniques; dans ce cas $E_1 = C^{te}$, de sorte que le spectre du bremsstrahlung se trouve égal, de façon grossièrement approchée, à $d\omega/\omega$ (il va sans dire que suivant la loi de conservation de l'énergie il est obligatoire que $\hbar\omega < (E_1 - mc^2)$).

Après avoir déterminé $d\sigma_r$ il est facile de trouver les pertes d'énergie des électrons par bremsstrahlung sur un parcours unité:

$$\left(-\frac{dE}{dx}\right)_r = N \int_0^{E_1 - mc^2} \hbar\omega \frac{d\sigma_r}{d\omega} d\omega$$

(N étant la densité de noyaux). Si nous écrivons cette grandeur sous la forme

$$\left(-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)_r = NE_1\Phi_r,$$

nous obtiendrons pour Φ_r dans les cas non relativiste ($E_1/(mc^2) - 1 \ll 1$) et ultrarelativiste ($E_1 \gg mc^2$) les formules suivantes:

$$\Phi_r = \frac{16}{3} Z^2 r_0^2 \alpha \quad \left(\frac{E_1}{mc^2} - 1 \ll 1\right),$$

$$\Phi_r = 4Z^2 r_0^2 \alpha \left(\ln \frac{2E_1}{mc^2} - \frac{1}{3}\right) \quad \left(\frac{E_1}{mc^2} \gg 1\right).$$

Nous voyons que dans le domaine non relativiste le rapport de l'énergie émise à l'énergie initiale ne dépend pas de l'énergie initiale, alors dans le domaine ultrarelativiste il croît proportionnellement au logarithme de l'énergie. Cette dernière conclusion n'est pourtant valable que si l'on néglige la mise sous écran de la charge du noyau par les électrons atomiques; si l'on tient compte de cet effet d'écran, l'expression entre parenthèses doit être remplacée par ($\ln (183/Z^{1/3}) + 1/18$) et Φ_r sera lui aussi indépendant de l'énergie E_1.

Comparons maintenant les pertes par rayonnement de l'électron à ses pertes par ionisation examinées au paragraphe précédent. En supposant que $E_1 \gg mc^2$ et en remarquant que $n = ZN$, récrivons la formule de Bethe exprimant les pertes par ionisation sous la forme

$$\left(-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\right)_i = 8\pi N Z r_0^2 m_e c^2 \ln \frac{E_1}{\sqrt{\langle I \rangle mc^2}},$$

où $\langle I \rangle$ est la valeur moyenne du potentiel d'ionisation de l'atome.

Ainsi, dans le cas ultrarelativiste, nous avons

$$\frac{(-\mathrm{d}E/\mathrm{d}x)_r}{(-\mathrm{d}E/\mathrm{d}x)_i} = \frac{ZE_1\alpha}{4\pi m_e c^2} \cong \frac{ZE_1}{1600\, m_e c^2}.$$

Les pertes d'énergie de l'électron par ionisation et par rayonnement deviennent égales pour une énergie de l'électron $E_e \sim 800$ MeV/Z, ce qui correspond à $\sim$10 MeV pour le plomb, à $\sim$ 25 MeV pour le cuivre et à $\sim$ 100 MeV pour l'air.

§ 24.4. Influence de la polarisation du milieu sur les pertes par ionisation

En examinant (v. § 24.2) les pertes d'énergie par ionisation, nous avons vu qu'elles se déterminent par le champ produit par la particule chargée en mouvement à l'endroit où se trouve l'électron atomique. Nous avons résolu le problème des pertes dans l'hypothèse où il n'y avait qu'une seule particule en mouvement et un seul électron

atomique. Or, l'électron se trouve dans un milieu qui est polarisé par la particule en mouvement ; il en résulte un affaiblissement du champ à l'endroit où se trouve l'électron, de sorte que l'énergie perdue par l'électron est plus petite que celle qu'il perdrait s'il était isolé. Ainsi, la polarisation du milieu doit conduire à une réduction des pertes par ionisation (*effet Fermi*).

Pour donner la théorie quantitative de cet effet, reportons-nous aux équations de Maxwell pour les champs dans un milieu matériel :

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div}(\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) = 4\pi\rho_e,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0,$$

où $\mathbf{P}$ est le vecteur polarisation du milieu et ρ_e, $\mathbf{j}$ sont les densités de charge et de courant liées à la particule en mouvement. Si la particule est animée d'un mouvement uniforme de vitesse $\mathbf{v}$, sa trajectoire est de la forme $\mathbf{r} = \mathbf{v}t$ et donc, en utilisant la fonction delta tridimensionnelle $\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$, on peut représenter les grandeurs ρ_e et $\mathbf{j}$ sous la forme

$$\rho_e = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t), \qquad \mathbf{j} = q\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t),$$

où q est la charge de la particule. Quant au vecteur polarisation du milieu, dans le cas le plus simple il peut être déterminé (comme nous l'avons déjà fait aux §§ 16.2, 16.3) en partant du concept des électrons atomiques considérés comme certains oscillateurs. Si ω_0 est la fréquence et γ le coefficient d'amortissement de l'oscillateur, la polarisabilité du milieu s'exprime par la formule

$$\alpha(\omega) = \frac{e^2 n/m}{-\omega^2 - 2i\gamma\omega + \omega_0^2}$$

(n étant la densité d'électrons).

Nous nous intéressons au problème à symétrie cylindrique, de sorte que pour direction de référence nous choisirons celle de mouvement de la particule (le long de laquelle nous dirigeons l'axe des z). Dans ces conditions, toutes les grandeurs peuvent être développées en intégrale de Fourier suivant la fréquence ω et la projection z du vecteur d'onde k_z :

$$f(\mathbf{r}, t) = \int f_{\omega, k_z}(\rho) \exp\{-i\omega t + ik_z z\}\, d\omega\, dk_z,$$

où $f_{\omega, k_z}(\rho)$ est une certaine fonction $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. La composante de Fourier de la fonction delta est facile à trouver si on se rappelle que $\int dt \exp(i\xi t) = 2\pi\delta(\xi)$; en désignant cette composante de Fourier par $\Delta_{\omega, k_z}(\rho)$, on obtient

$$\Delta_{\omega, k_z}(\rho) = \frac{\delta(x)\,\delta(y)}{(2\pi)^2}\int \exp\{i\omega t - ik_z z\}\,\delta(z - vt)\, dz\, dt =$$

$$= \frac{\delta(x)\,\delta(y)}{(2\pi)^2}\int \exp\{it(\omega - vk_z)\}\, dt = \frac{\delta(x)\,\delta(y)}{2\pi}\,\delta(\omega - vk_z)$$

(le produit $\delta(x)\,\delta(y)$ entrant dans cette expression dépend de x et y sous forme de la combinaison $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ et non séparément de x et de y).

Exprimons maintenant les intensités des champs moyennant le potentiel vecteur **A**:

$$\mathbf{H}=\operatorname{rot}\mathbf{A},\quad \mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}.$$

Pour la détermination de la composante de Fourier du potentiel vecteur nous obtiendrons l'équation suivante:

$$\left[k_z^2-\Delta_\rho-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\right]\mathbf{A}_{\omega,\,k_z}(\rho)=\frac{4\pi q}{c}\mathbf{v}\frac{\delta(x)\,\delta(y)}{2\pi}\delta(\omega-vk_z),$$

où Δ_ρ est le laplacien par rapport à la variable ρ:

$$\Delta_\rho f=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right).$$

On peut évidemment chercher une solution de cette équation sous la forme

$$\mathbf{A}_{\omega,\,k_z}(\rho)=\frac{4\pi q}{c}\mathbf{v}\delta(\omega-vk_z)\,u(\rho),$$

où $u(\rho)$ se détermine à partir de l'équation

$$\left[\omega^2\left(\frac{1}{v^2}-\frac{\varepsilon(\omega)}{c^2}\right)-\Delta_\rho\right]u(\rho)=\frac{\delta(x)\,\delta(y)}{2\pi}.$$

Nous voyons que la fonction $u(\rho)$ vérifie une équation d'onde homogène (bidimensionnelle) partout sauf au point $x=y=0$, c'est-à-dire que

$$\Delta_\rho u(\rho)+s^2u(\rho)=0,\qquad s^2\equiv\omega^2\left(-\frac{1}{v^2}+\frac{\varepsilon(\omega)}{c^2}\right)\qquad(\rho\neq0).$$

Multiplions par ρ l'équation de u contenant les fonctions delta au second membre et intégrons-la sur $d\rho$. En tenant compte que pour une grandeur à symétrie cylindrique l'intégration sur $dx\,dy$ est équivalente à celle sur $2\pi\rho\,d\rho$, nous obtenons

$$\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)_{\rho\to0}=1.$$

On peut en tirer la conclusion suivante: pour trouver le potentiel vecteur il faut résoudre une équation homogène pour $u(\rho)$ avec la condition aux limites imposée à la dérivée de cette fonction au point $\rho=0$.

A une telle équation satisfait la fonction cylindrique $K_0(is\rho)$. On sait que la dérivée de K_0 s'exprime par une fonction cylindrique K_1, si bien que par l'intermédiaire de ces deux fonctions on peut exprimer facilement toutes les composantes des champs électrique et magnétique.

Lorsque les champs électriques et magnétiques sont connus, nous pouvons calculer la densité de flux d'énergie S_b à travers la surface d'un certain cylindre de rayon b entourant la trajectoire de la particule. En divisant S_b par v, nous obtenons l'énergie W_b perdue par la particule sur un parcours unité et correspondant aux paramètres d'impact supérieurs à la valeur choisie de b:

$$W_b=\frac{c}{4\pi v}\int[\mathbf{EH}]\,d\mathbf{s}$$

(l'intégration étant effectuée sur la surface du cylindre de rayon b). La grandeur W_b s'exprime moyennant les fonctions cylindriques:

$$W_b = \frac{e^2 b}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{-1}{\varepsilon(\omega) v^2} + \frac{1}{c^2} \right) \omega s^* K_1(-is^* b) K_0(isb) \, d\omega.$$

Cette intégrale est facile à calculer pour des valeurs suffisamment petites de b. Pour un milieu transparent ($\gamma \to 0$) la solution est de la forme

$$W_b = \frac{2\pi e^4 n}{mv^2} \left\{ \ln \frac{mv^2}{3{,}17\, \pi e^2 n b^2} + \ln \frac{\varepsilon_0 - 1}{\varepsilon_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} - \frac{v^2}{c^2} \right\} \left(v < \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}} \right),$$

$$W_b = \frac{2\pi e^4 n}{mv^2} \left\{ \ln \frac{mv^2}{3{,}17\, \pi e^2 n b^2} - \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\varepsilon_0 - 1} \right\} \left(v > \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}} \right),$$

où $\varepsilon_0 = 1 + 4\pi e^2 n/(m\omega_0^2)$ est la constante diélectrique dans le domaine des basses fréquences.

Il est intéressant de comparer les formules obtenues à l'expression des pertes par ionisation qui ne tient pas compte de la polarisation du milieu. Nous avons déjà examiné ces pertes au § 24.2. Toutefois nous ne pouvons pas appliquer directement les résultats du § 24.2, mais devons refaire le calcul, cette fois pour un cylindre de petit rayon b et non pour un milieu infini. Contenterons-nous d'indiquer les conclusions définitives. Il se trouve que

la polarisation du milieu a pour effet de réduire les pertes par ionisation

(ce résultat devient visible même par une comparaison directe des formules du § 24.2 et de celles obtenues au paragraphe actuel: quand $E \gg mc^2$, la valeur de W_b tend vers une limite constante tandis que les pertes déterminées au § 24.2 croissent comme $\ln [E/(mc^2)]$. Un calcul précis montre que la prise en compte de la polarisation du milieu conduit pour $E = 10^3 \, mc^2$ à une réduction des pertes de deux fois pour l'eau et de $^1/_4$ pour l'air (pour $b = 10^{-8}$ cm).

§ 24.5. Rayonnement de Vavilov-Cerenkov

La valeur de W_b obtenue au paragraphe précédent détermine les pertes d'énergie de la particule si le paramètre d'impact excède la valeur donnée de b. Nous avons indiqué l'expression générale de W_b et analysé le cas de faibles valeurs de b, de l'ordre des distances interatomiques (répondant physiquement à des pertes d'énergie par ionisation dans des collisions à deux corps compte tenu de la polarisation du milieu).

Une question se pose: quel sera le comportement de W_b dans le cas de fortes valeurs de b? Rappelons que lorsque leur argument

augmente, les fonctions cylindriques oscillent rapidement ou décroissent suivant une loi exponentielle, de sorte que les intégrales qui les comprennent décroissent. Pour cette raison, il semble naturel que les pertes d'énergie diminuent lorsque le paramètre d'impact augmente du fait que les forces électromagnétiques qui les déterminent sont à de grandes distances presque totalement mises sous écran.

Mais la situation change radicalement si la vitesse de la particule est plus grande que la vitesse de phase des ondes électromagnétiques dans le milieu : $v > v_{\text{ph}} = c/\sqrt{\varepsilon(\omega)}$. Dans ce cas le domaine d'intégration dans la formule donnant W_b contient le point $s = 0$ au voisinage duquel l'argument de la fonction cylindrique garde une valeur finie quelque grande que soit la valeur de b (le milieu étant supposé transparent ($\text{Im}\,\varepsilon(\omega) = 0$), la grandeur s^2 est réelle). Dans ce cas, lorsque $b \to \infty$, la valeur de W_b se trouve différente de zéro et s'exprime par la formule

$$W_\infty = \frac{2\pi e^4 n}{mv^2}\left\{-\frac{v^2}{c^2} - \ln\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right\} \quad \left(v < \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}}\right),$$

$$W_\infty = \frac{2\pi e^4 n}{mv^2}\left\{-\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\varepsilon_0 - 1} + \ln\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 - 1}\right\} \quad \left(v > \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}}\right).$$

Quel est donc le sens de l'énergie qui s'éloigne à de très grandes distances de la particule ? Il est évident que c'est l'énergie d'ondes électromagnétiques émises par la particule (et non l'énergie d'excitation ou d'ionisation des atomes distincts). Un tel rayonnement est appelé *rayonnement de Vavilov-Cerenkov* (ou en abrégé, *rayonnement de Cerenkov* ou encore *effet Cerenkov*). (Cet effet a été découvert en 1934 par S. Vavilov et P. Cerenkov ; sa théorie a été développée par I. Tamm et I. Frank.)

C'est l'approche quantique qui permet d'expliquer au mieux la possibilité d'existence de l'effet Cerenkov. Nous avons déjà dit qu'une particule en mouvement uniforme dans le vide ne peut pas émettre un photon ; dans ces conditions les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion ne peuvent pas être observées à la fois :

$$E_1 = E_2 + \hbar\omega \text{ et } \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 + \hbar\mathbf{k},$$

où $E_{1,2} = c\sqrt{m^2c^2 + p_{1,2}^2}$ sont les énergies de l'électron avant et après l'émission, $\hbar\omega = \hbar ck$ et $\hbar\mathbf{k}$ sont l'énergie et l'impulsion du photon. Il n'en est plus de même pour un milieu d'indice de réfraction $N \equiv \sqrt{\varepsilon(\omega)} > 1$: maintenant l'énergie du photon d'impulsion $\hbar\mathbf{k}$ est égale à $\hbar\omega = \hbar ck/N$, c'est-à-dire plus petite que dans le vide, si bien que les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion peuvent être observées toutes les deux à la fois. En effet, en appliquant les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion, il est facile d'obtenir pour le cosinus de l'angle ϑ, que font entre eux les

vecteurs **k** et $\mathbf{p}_2$, l'expression suivante:

$$\cos\vartheta = \frac{v_{ph}}{v_2}\left[\frac{E_1}{E_2} - \frac{E_1 - E_2}{2E_2}\left(\frac{c^2}{v_{ph}^2} - 1\right)\right],$$

où $v_2 = p_2c^2/E_2$ et v_{ph} est la vitesse de phase de l'onde. Ainsi, lorsque $v > v_{ph}$, le photon peut être émis mais sous un angle bien déterminé par rapport à la direction de mouvement de la particule.

Si le photon n'emporte qu'une petite partie de l'impulsion de l'électron : $\hbar k \ll p_1$ (ce qui a lieu en particulier lorsque l'indice de réfraction est proche de l'unité), l'expression entre crochets devient égale à l'unité et

$$\cos\vartheta = v_{ph}/v \quad (\hbar k \ll p).$$

Sans indiquer les expressions pour le potentiel vecteur et les intensités des champs, remarquons seulement que suivant les résultats du paragraphe précédent leur variation en fonction de ρ, lorsque $\rho \to \infty$, est de la forme $f \sim \rho^{-1/2}\exp(is\rho)$, où comme précédemment

$$s^2 = \omega^2\left(\frac{\varepsilon(\omega)}{c^2} - \frac{1}{v^2}\right).$$

Pour des valeurs imaginaires de s, cette grandeur décroît exponentiellement (ce qui correspond à la mise sous écran des champs). Au contraire, si $v > v_{ph}$, la valeur de s devient réelle et les composantes du champ oscillent suivant la loi $f \sim \rho^{-1/2}\exp(is\rho)$ caractéristique d'une onde cylindrique divergente. On montre que l'énergie émise par la particule sur un parcours de longueur l s'exprime par la formule

$$\mathcal{E} = \frac{e^2 l}{c^2}\int\limits_{(\beta N > 1)}\left(1 - \frac{1}{\beta^2 N}\right)\omega\, d\omega,$$

où $\beta = v/c$ et N l'indice de réfraction, l'intégration étant effectuée sur le domaine de fréquences où $\beta N > 1$ (*formule de Tamm-Frank*).

L'effet Čerenkov peut encore s'expliquer comme résultat de la superposition des ondes émises de façon continue par la particule. Si $\omega \neq \mathbf{kv}$ l'énergie perdue par la particule pendant une demi-période est rigoureusement égale à l'énergie qu'elle acquiert pendant l'autre demi-période, de sorte qu'en moyenne l'énergie cédée par la particule à l'onde est nulle. Par contre, si $\omega = \mathbf{kv}$, c'est-à-dire que $\cos\vartheta = v_{ph}/v$, la particule se déplace avec l'onde, en se trouvant tout le temps en un point de même phase et donc transmet continuellement son énergie à l'onde.

Insistons sur le fait que

les pertes d'énergie par effet Cerenkov ne dépendent pas de la masse de la particule à la différence des pertes par bremsstrahlung qui diminuent lorsque la masse de la particule augmente.

Soulignons que les pertes d'énergie de la particule, que nous avons examinées au paragraphe précédent en tenant compte de la polarisation du milieu, comprennent automatiquement tant les pertes par ionisation que celles par effet Cerenkov (déterminées par la grandeur W_{∞}).

Le rayonnement Cerenkov a trouvé une application technique importante sous forme de *compteurs Cerenkov* de particules chargées.

§ 24.6. Diffusion du photon par l'électron

Passons maintenant à l'étude du passage des photons à travers la matière.

Il y a trois processus qui peuvent se produire lors de ce passage : l'absorption des photons avec excitation ou ionisation des atomes, la diffusion des photons sur les électrons atomiques et la transformation des photons en paires électron-positron.

Commençons par la diffusion d'un photon par un électron (*effet Compton*). Nous supposerons d'abord que l'énergie du photon est beaucoup plus grande que l'énergie de liaison de l'électron dans l'atome. Dans ce cas les électrons peuvent être considérés comme libres, si bien que doivent être observées les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion :

$$E_1 + \hbar\omega_1 = E_2 + \hbar\omega_2, \quad \mathbf{p}_1 + \hbar\mathbf{k}_1 = \mathbf{p}_2 + \hbar\mathbf{k}_2,$$

où les indices 1 et 2 servent à désigner les valeurs des grandeurs avant et après la diffusion. En tenant compte que $E = \sqrt{m_e c^2 + p^2}$ et $\omega = ck$, il est facile d'exprimer l'angle ϑ de diffusion du photon (angle entre $\mathbf{k}_1$ et $\mathbf{k}_2$) par l'intermédiaire des angles ϑ_1, ϑ_2 que le vecteur vitesse $\mathbf{v}_1$ de l'électron avant la diffusion fait avec $\mathbf{k}_1$ et $\mathbf{k}_2$:

$$1-\cos\vartheta = \frac{E_1}{\hbar\omega_2}\left(1-\frac{v_1}{c}\cos\vartheta_1\right) - \frac{E_1}{\hbar\omega_1}\left(1-\frac{v_1}{c}\cos\vartheta_2\right).$$

Si l'électron était initialement au repos ($v_1 = 0$, $E_1 = m_e c^2$, cela ne signifie en fait que $v_1 \ll v_2$, c'est-à-dire que la vitesse des électrons diffusés est grande par rapport à la vitesse des électrons atomiques), de cette relation il résulte la formule

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{1+\frac{\hbar\omega_1}{m_e c^2}(1-\cos\vartheta)}.$$

Elle est appelée *formule de Compton.*

Nous voyons que $\omega_2 \leqslant \omega_1$ (l'égalité a lieu pour $\vartheta = 0$) ; cela est naturel : si l'électron était initialement au repos, le photon ne peut que lui céder de l'énergie (mais non lui en prélever). Dans le cas limite de faibles énergies du photon ($\hbar\omega_1 \ll mc^2$), la fréquence du

photon ne change presque pas lors de la diffusion ; pour des photons très durs ($\hbar\omega_1 \gg mc^2$) la fréquence $\hbar\omega_2 = m_ec^2/(1 - \cos\vartheta)$ du photon diffusé cesse de dépendre de la fréquence du photon incident (la dernière formule cesse d'être valable pour des valeurs très faibles de l'angle de diffusion).

En partant de la relation entre ω_2 et ω_1, il est facile d'établir la relation entre les longueurs d'ondes correspondantes :

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_C\,(1 - \cos\vartheta),$$

où $\lambda_C \equiv 2\pi\hbar/(m_ec) \sim 2\pi\cdot 3{,}86\cdot 10^{-11}$ cm. Cette grandeur est appelée *longueur d'onde de Compton de l'électron.*

Comme nous l'avons vu, la fréquence du photon diffusé se détermine univoquement par l'angle de diffusion (pour une fréquence donnée du photon incident), alors que l'angle de diffusion lui-même peut être quelconque. Autrement dit, la diffusion de Compton se décrit (de même que tout autre processus quantique) par des lois statistiques et se caractérise par une section efficace différentielle

$$d\sigma = dN/I,$$

où dN est le nombre de photons diffusés sous des angles compris dans l'intervalle $(\vartheta, \vartheta + d\vartheta)$ et I, la densité de flux de photons incidents (c'est-à-dire le nombre de photons tombant en 1 s sur une surface de 1 cm² perpendiculaire au vecteur $\mathbf{k}_1$).

La section efficace différentielle peut être facilement déterminée pour des photons très mous ($\lambda \gg \lambda_C$) ; dans ce cas, on peut en général se passer de la notion de photon et faire le calcul dans le cadre de l'électrodynamique classique. En effet, supposons qu'une onde plane de fréquence ω, dont le champ électrique est de la forme $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{kr} - \omega t)$, tombe sur un électron. Sous l'action de ce champ l'électron se met en mouvement et comme $\lambda \gg \lambda_C$, c'est-à-dire que $\hbar\omega \ll mc^2$, l'énergie acquise par l'électron est faible et donc sa vitesse est petite. Pour cette raison l'accélération de l'électron n'est déterminée que par la force électrique : $\ddot{\mathbf{r}} = (e\mathbf{E}_0/m_e)\cos\omega t$ (l'électron est au repos à l'origine des coordonnées). L'électron en mouvement accéléré commence à émettre des ondes ; ce sont ces ondes qu'on doit considérer comme un rayonnement diffusé. L'intensité de ce rayonnement peut se déterminer au moyen de la formule générale valable pour l'émission dipolaire :

$$d\mathcal{J} = \frac{1}{4\pi c^3}(\ddot{\mathbf{d}})^2 \sin^2\theta\, do,$$

où $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$, θ est l'angle formé entre $\mathbf{k}'$ et $\ddot{\mathbf{r}}$ et do, l'élément d'angle solide dans lequel se situe le vecteur d'onde $\mathbf{k}'$ du rayonnement diffusé. En divisant $d\mathcal{J}$ par la densité de flux d'énergie de l'onde incidente $S = cE_0^2/(4\pi)$, nous obtenons la section efficace différentielle

de diffusion

$$d\sigma = r_0^2 \sin^2 \theta \, do, \quad \hbar\omega \ll m_e c^2,$$

où $r_0 = e^2/(m_e c^2)$ est le rayon classique de l'électron.

En intégrant l'expression obtenue sur les angles, nous trouverons la section efficace totale de diffusion d'un photon mou

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2.$$

Cette formule est appelée *formule de Thomson*, et la section $\sigma = 0{,}66 \cdot 10^{-24}$ cm², *section de Thomson.*

Jusqu'ici nous avons supposé que l'électron est libre, mais si la valeur de $\hbar\omega$ devient comparable à l'énergie de liaison de l'électron dans l'atome, l'électron ne peut plus être considéré comme une particule libre. Pour comprendre le caractère de diffusion dans ce cas, nous allons traiter l'électron comme un oscillateur classique. Sous l'effet du champ électrique un tel oscillateur effectue des oscillations forcées décrites par l'équation

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{e}{m_e} \mathbf{E}_0 \cos \omega t$$

(ω_0 étant la fréquence propre de l'oscillateur). En partant de cette équation, il est facile de déterminer $\mathbf{r}(t)$ et donc la grandeur $\ddot{\mathbf{d}} = e\ddot{\mathbf{r}}$ entrant dans la formule de l'émission dipolaire. Puis, en introduisant l'intensité d'émission dipolaire sous la forme de $d\mathcal{J} = S d\sigma$ (S étant comme précédemment la densité de flux d'énergie de l'onde incidente), nous trouverons la section efficace différentielle de diffusion :

$$d\sigma = r_0^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \sin^2 \theta \, do.$$

Cette section, à l'inverse de la section de Thomson, dépend de la fréquence du photon ; dans le domaine de très faibles fréquences ($\omega \ll \omega_0$) elle est proportionnelle à ω^4. En particulier, c'est cette variation avec la fréquence qui explique le bleu du ciel : c'est la partie ondes courtes de la lumière solaire qui subit une forte diffusion et donc pénètre dans l'œil de l'observateur.

Pour $\omega = \omega_0$, c'est-à-dire dans le cas de résonance, la formule écrite ci-dessus donne une valeur infinie de la section efficace ; elle est inapplicable parce qu'elle ne tient pas compte de l'effet d'amortissement. Comme nous avons pu nous en assurer à plusieurs occasions, la prise en compte de l'amortissement conduit à remplacer le dénominateur à la résonance] $(\omega_0^2 - \omega^2)^2$ par $[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]$, où γ est le coefficient d'amortissement, si bien qu'à la résonance

$$d\sigma = r_0^2 (\omega_0/\gamma)^2 \sin^2 \theta \, do.$$

Soulignons que l'électron atomique ne peut être considéré comme un oscillateur classique que de façon très approchée parce que l'ato-

me obéit à la mécanique quantique et non classique. C'est pourquoi la section efficace de diffusion d'une onde électromagnétique par l'atome s'exprime par une autre formule, plus compliquée que la formule pour la section efficace de diffusion par un oscillateur classique. Une chose importante est que par suite de la diffusion l'atome peut passer d'un état énergétique à un autre. C'est pourquoi la fréquence de l'onde diffusée peut devenir différente de celle de l'onde incidente. Si les fréquences de ces ondes sont ω_1 et ω_2, la formule générale donnant la section efficace différentielle de diffusion dans l'intervalle d'angle solide do_2 est de la forme

$$d\sigma = \omega_1\omega_2^3\, do_2 \left| \sum_s \frac{(\mathbf{e}_2\mathbf{d})_{2s}(\mathbf{e}_1\mathbf{d})_{s1}}{E_1 - E_s + \hbar\omega_1} + \frac{(\mathbf{e}_1\mathbf{d})_{2s}(\mathbf{e}_2\mathbf{d})_{s1}}{E_1 - E_s - \hbar\omega_2} \right|^2,$$

où $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ sont les vecteurs polarisation des deux ondes, $(\mathbf{ed})_{ij}$, les éléments de matrice du produit scalaire des vecteurs $\mathbf{d}$ et $\mathbf{e}$, E_1 et E_2, les énergies de l'atome avant et après la diffusion, liées par la loi de conservation de l'énergie, et la sommation est étendue à tous les états « intermédiaires » s de l'atome d'énergie E_s. Quand $\omega_1 = \omega_2$ (ce cas porte le nom de *diffusion cohérente*), la section efficace de diffusion est proportionnelle à ω^4 comme en théorie classique.

Revenons maintenant à l'effet Compton dans le cas où les énergies du photon ont des valeurs absolument quelconques. Dans ce cas la formule exprimant l'émission dipolaire n'est plus applicable ; il y a plus que cela : pour $\hbar\omega$ quelconque l'effet Compton ne peut pas en général être étudié dans le cadre de la physique classique, c'est-à-dire n'ayant recours qu'à la mécanique de Newton et à l'électrodynamique de Maxwell. Le fait est que si l'énergie du photon est comparable ou supérieure à l'énergie au repos de l'électron, ce dernier peut acquérir, lors de la collision avec le photon, une énergie considérable, et comme la distribution des photons diffusés suivant les directions (et donc suivant les énergies) obéit à des lois statistiques, l'électron diffusé obéira lui aussi à ces lois. Or, les lois statistiques déterminant le comportement de l'électron sortent du cadre de la physique classique et font l'objet de la mécanique quantique. En d'autres termes, la section efficace de diffusion d'un photon par un électron pour $\hbar\omega \gtrsim m_e c^2$ ne peut être déterminée que dans le cadre de l'électrodynamique quantique, en tenant compte des exigences imposées par la théorie de la relativité. Nous nous contenterons donc d'indiquer certains résultats obtenus dans la théorie de l'effet Compton.

La section efficace différentielle de diffusion (dans le cas de particules non polarisées) s'exprime par la formule

$$d\sigma = \frac{1}{2} r_0^2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} - \sin^2\vartheta\right) do,$$

où ϑ est comme précédemment l'angle de diffusion du photon (angle que font entre eux les vecteurs $\mathbf{k}_2$ et $\mathbf{k}_1$) et do, l'élément d'angle so-

lide du vecteur $\mathbf{k}_2$ (l'électron est supposé au repos avant la diffusion). Comme nous l'avons vu, la fréquence du photon diffusé se détermine par la fonction univoque de ϑ ; en introduisant dans cette formule la fonction ω_2 (ϑ) déterminée au début du paragraphe, nous

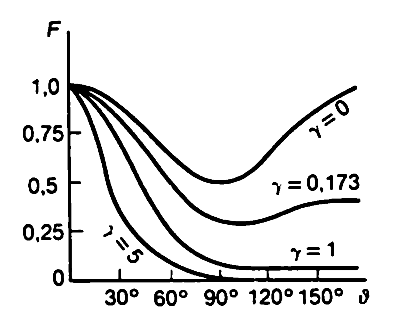


Fig. 24.3. Fonction $P = \frac{d\sigma}{do}\frac{1}{r_0^2}\frac{\omega_2}{\omega_1}$ caractérisant la répartition angulaire des photons diffusés dans l'effet Compton

Fig. 24.4. Fonction $\sigma/\left(\frac{8}{3}\pi r_0^2\right)$ décrivant la variation de la section efficace totale de l'effet Compton en fonction de l'énergie du photon incident

obtenons la distribution angulaire des photons diffusés. La variation de la grandeur $d\sigma/do$ en fonction de l'angle ϑ et du paramètre $\gamma = \hbar\omega_1/(m_ec^2)$ est montrée sur la figure 24.3.

En intégrant la section efficace différentielle sur les angles, nous obtenons la section efficace totale σ de l'effet Compton. La courbe de variation de σ en fonction de γ est représentée par la figure 24.4. Nous n'indiquerons les formules donnant σ que dans les cas ultrarelativiste ($\hbar\omega_1 \gg m_ec^2$) et non relativiste ($\hbar\omega_1 \ll m_ec^2$):

$$\sigma = \pi r_0^2 \frac{m_ec^2}{\hbar\omega_1}\left(\ln\frac{2\hbar\omega_1}{m_ec^2} + \frac{1}{2}\right) \quad (\hbar\omega_1 \gg m_ec^2),$$

$$\sigma = \frac{8}{3}\pi r_0^2\left(1 - 2\frac{\hbar\omega_1}{m_ec^2}\right) \quad (\hbar\omega_1 \ll m_ec^2)$$

(la dernière formule est évidemment la formule de Thomson et sa première correction suivant le paramètre γ).

§ 24.7. Effet photo-électrique et création de paires électron-positron

Si l'énergie d'un photon $\hbar\omega$ est plus grande que l'énergie de liaison de l'électron dans l'atome, c'est-à-dire l'énergie I d'ionisation de l'atome, le photon peut être absorbé par l'atome, et l'électron atomique quittera l'atome avec une énergie cinétique $T = \hbar\omega - I$. Ce phénomène dans lequel un électron est éjecté d'un atome par un photon est appelé *effet photo-électrique* (il a été découvert par Hertz

en 1887 et expliqué par Einstein en 1905 sur la base des conceptions quantiques sur la nature de la lumière).

Les électrons dans l'atome sont disposés sur des couches différentes dont chacune est caractérisée par sa propre énergie de liaison. La couche la plus intérieure est appelée couche K; elle contient deux électrons d'énergie de liaison approximativement égale à RZ^2, où $R = 13{,}6$ eV est la *constante de Rydberg* et Z, le numéro atomique. On a ensuite les couches L et M d'énergie de liaison plus faible, égales à $^1/_4 R\,(Z-5)^2$ et $^1/_9 R\,(Z-13)^2$. L'énergie de liaison la plus faible est celle des électrons disposés sur des orbites optiques, de sorte que pour leur arrachement il suffit un photon de la plus faible fréquence.

Lorsque la fréquence augmente, les photons sont absorbés par des électrons disposés sur des couches de plus en plus profondes. A l'instant où l'énergie du photon incident devient égale à l'énergie de liaison d'un électron appartenant à une couche quelconque, le nombre de photons absorbés accuse une brusque augmentation. La variation du nombre N de photons absorbés en fonction de la fréquence est représentée schématiquement par la figure 24.5. Le point en lequel l'absorption subit un saut dû à l'éjection des électrons K est appelé *bord* de la bande K d'absorption. La fréquence correspondant est $\omega_K = I_K/\hbar$, où I_K est l'énergie de liaison d'un électron K.

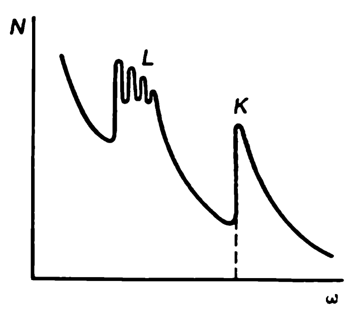


Fig. 24.5. Variation du nombre de photons absorbés en fonction de la fréquence

L'effet photo-électrique (de même que tout autre effet quantique) se caractérise par sa *section efficace* qui est définie comme le rapport du nombre d'électrons éjectés en 1 s à la densité de flux de photons incidents. Pour les électrons K la section efficace de l'effet photo-électrique est donnée par la formule

$$\sigma_K = \frac{128\pi e^2 \omega_K^3}{3 m_e \omega^4} \exp\{-4\xi \operatorname{arc\,ctg} \xi\} (1-\exp(-2\pi\xi))^{-1},$$

où $\xi = \omega_K^{1/2} (\omega - \omega_K)^{-1/2}$ et le système d'unités adopté est celui dans lequel $\hbar = c = 1$.

L'expression sus-indiquée se rapporte à un seul électron K (dans l'atome ils sont au nombre de deux). Si nous faisons la somme des expressions analogues (bien que beaucoup plus compliquées) sur tous les électrons d'un atome, nous obtiendrons la section efficace de l'effet photo-électrique σ_{ph} rapportée à un atome.

Connaissant σ_{ph} il est facile d'établir comment les photons sont absorbés dans la matière. Si N est la densité d'atomes, la longueur de parcours du photon par rapport à l'effet photo-électrique a pour

valeur

$$l_{ph} = \frac{1}{N\sigma_{ph}}$$

et par conséquent la diminution relative du nombre de photons sur un parcours dx est dx/l_{ph}. Soit maintenant $n \equiv n(x)$ le nombre de photons dans la matière absorbante à la distance x de sa frontière. Alors, $dn = -n dx/l_{ph}$, d'où

$$n(x) = n_0 e^{-x/l_{ph}} = n_0 e^{-N\sigma_{ph} x},$$

où n_0 est le nombre de photons à l'entrée de l'absorbeur.

En variant par sauts brusques, la section efficace de l'effet photoélectrique diminue lorsque la fréquence augmente. Pour $\omega > \omega_K$, elle devient petite et c'est l'effet Compton qui commence à jouer un rôle principal. Il convient pourtant d'avoir en vue que dans l'effet Compton il se produit la diffusion et non l'absorption des photons, de sorte que cet effet apporte une contribution aux pertes d'énergie (et de l'impulsion dirigée) du faisceau de photons initial et non à la densité totale de photons.

Si l'énergie d'un photon est supérieure à $2m_ec^2 \sim 1$ MeV, un nouveau processus entre en jeu, c'est la *création de paires électron-positron*. Le positron e^+ ne diffère de l'électron e^- que par le signe de sa charge, si bien que la paire e^+e^- est électriquement neutre de même que le photon. C'est pourquoi du point de vue de la loi de conservation de la charge électrique le photon peut donner naissance à une paire électron-positron, mais vu que l'énergie au repos de la paire est égale à $2m_ec^2$, l'énergie du photon doit être dans ce cas plus grande que $2m_ec^2$. Toutefois,

un seul photon dans le vide ne peut pas créer une paire électron-positron parce que les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion ne seront pas observées toutes les deux à la fois.

Pour qu'un seul photon puisse créer une paire électron-positron, il est nécessaire que soit présente une autre particule, par exemple, un noyau atomique. La section efficace totale de création de la paire dans le champ du noyau (compte tenu de l'effet d'écran) a pour expression

$$\sigma_p = \frac{2Z^2e^6}{9m_c^2c^5\hbar}\left\{14\ln(183\,Z^{-1/3}) - \frac{1}{3}\right\}$$

(Z étant le numéro atomique). Par rapport à ce processus, la longueur de parcours du photon dans la matière est $l_n = 1/(N\sigma_p)$, où N est la densité de noyaux, si bien que l'intensité de flux photonique varie suivant la loi $n = n_0 e^{-x/l_n}$. Remarquons que la longueur de parcours d'un électron rapide par rapport au bremsstrahlung est de l'ordre de grandeur de l_n.

Il y a un phénomène lié aux processus de bremsstrahlung et de création de paires électron-positron, c'est le phénomène d'*avalanche électromagnétique* dont l'essentiel est le suivant. Supposons qu'un électron rapide ayant une énergie de l'ordre de 1 gigaélectron-volt pénètre dans une couche de matière. En subissant un freinage dans le champ coulombien des noyaux, il émet des photons d'énergie du même ordre de grandeur, les photons créent des paires électron-positron, après quoi le processus se répète: chacune des particules constitutives de la paire émet des photons, qui créent à leur tour des paires, et ainsi de suite (fig. 24.6).

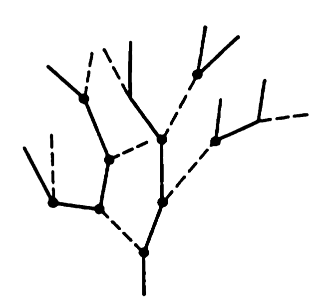


Fig. 24.6. Avalanche électromagnétique

Les lignes en traits continus correspondent aux électrons et positrons, les lignes en traits interrompus aux photons

Ainsi, il se forme à partir d'une seule particule rapide, de l'électron, une multitude de particules secondaires: électrons, positrons et photons d'énergies plus faibles. On dit que ces particules constituent une avalanche électromagnétique. Cette avalanche cesse de se produire lorsque l'énergie des particules tombe à des valeurs telles que dans le freinage des photons commence à prévaloir l'effet Compton, et dans celui des électrons, les pertes par ionisation.

Il est clair que la particule initiale de l'avalanche est non nécessairement un électron ; l'avalanche peut être provoquée avec le même succès par un photon énergique.

Evaluons le nombre de particules dans l'avalanche à une profondeur x (à compter depuis l'endroit d'entrée de la particule primaire). Comme la longueur de parcours du photon dans le processus de création de paires et la longueur de parcours de l'électron (et du positron) dans le processus de bremsstrahlung sont d'un même ordre de grandeur, nous pouvons introduire une certaine longueur de parcours moyenne de la particule d'avalanche:

$$l = \mathrm{C^{te}}/(N\sigma),$$

où $\sigma = e^2/(\hbar c)\, Z^2 r_0^2$ est une constante numérique de l'ordre de l'unité. Le nombre de particules dans l'avalanche à la profondeur x a pour expression

$$n\,(x) \sim 2^{x/l}.$$

Si E_0 est l'énergie de la particule primaire, l'énergie moyenne des particules à la profondeur x est égale, suivant la loi de conservation de l'énergie, à $E_x \sim E_0 2^{-x/l}$. L'avalanche cesse lorsque cette grandeur atteint la valeur critique E_C pour laquelle les pertes d'énergie de l'électron par ionisation deviennent plus grandes que les pertes

par rayonnement ($E(x) \sim E_C$). Pour une certaine valeur de x, que nous désignerons par l_m, le nombre de particules dans l'avalanche sera maximal. Il est évident que

$$l_m \sim \langle l \rangle \left(\ln \frac{E_0}{E_C}\right) / \ln 2.$$

Dès que le nombre de particules dans l'avalanche passe par son maximum, l'avalanche commence à s'évanouir progressivement.

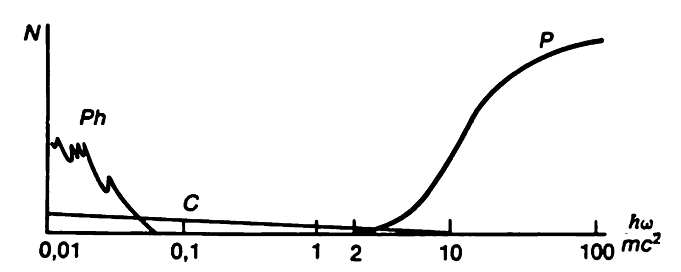


Fig. 24.7. Représentation schématique de la variation du nombre N de photons absorbés en fonction de leur énergie initiale:
P, création de paires électron-positron; *C*, effet Compton; *Ph*, effet photo-électrique

Revenons, avant de clore ce paragraphe, aux principaux processus d'absorption des photons. Le caractère général de variation de l'absorption en fonction de l'énergie du photon est illustré à la figure 24.7; une telle variation pour le plomb est montrée sur la figure 24.8. On remarquera la présence d'un minimum aigu d'absorption, appelé *fenêtre de transparence*, des photons durs.

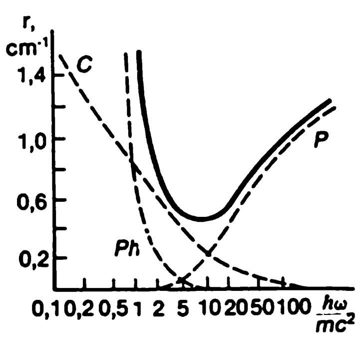


Fig. 24.8. Variation du coefficient d'absorption η de photons dans le plomb en fonction de leur énergie

Les lignes en traits interrompus désignent les contributions de différents effets, la ligne en traits continus correspond à l'absorption totale (les désignations sont les mêmes que sur la figure 24.7)

§ 24.8. Emission et absorption des photons par les atomes

Si un atome est à un état excité, il peut passer à l'état fondamental ou à un autre état excité d'énergie plus faible en émettant, lors de ce passage, un photon d'énergie

$$\hbar\omega_{i\to f} = E_i - E_f,$$

où i, f désignent les états initial et final et E_i, E_f sont les niveaux énergétiques initial et final de l'atome. Inversement, si un photon d'énergie $\hbar\omega_{i\to f}$ tombe sur un atome à l'état f cet atome peut passer à l'état i d'énergie $E_i = E_f + \hbar\omega_{i\to f}$ en absorbant le photon.

Ces relations énergétiques traduisent la loi de conservation de l'énergie lors de l'émission et de l'absorption d'un photon.

Elles ont joué un rôle des plus importants dans la mise sur pied de la physique quantique et font partie des postulats connus de Bohr (1913) à l'aide desquels Bohr a réussi à expliquer la stabilité de l'atome et le caractère discret des spectres atomiques.

Les deux processus — l'émission et l'absorption du photon (de même que l'effet photo-électrique et les divers processus de diffusion) — obéissent à des lois statistiques, c'est-à-dire se caractérisent par des probabilités bien déterminées. Dans le cas des processus se déroulant avec la participation des photons ces probabilités présentent la propriété remarquable de dépendre du nombre n_ω de photons présents avant le processus considéré, à savoir: la probabilité w_- d'absorption d'un photon de fréquence ω en 1 s est proportionnelle au nombre n_ω de tels photons, alors que la probabilité w_+ d'émission est proportionnelle au nombre de tels photons plus une unité, c'est-à-dire à $(n_\omega + 1)$, les coefficients de proportionnalité étant égaux pour les deux processus. Autrement dit,

$$\frac{w_-}{w_+} = \frac{n_\omega}{n_\omega + 1} .$$

En récrivant cette égalité sous la forme

$$w_+ = (n_\omega + 1)\, w_0, \quad w_- = n_\omega w_0,$$

où w_0 est indépendante de n_ω, nous voyons que la probabilité d'émission d'un photon est la somme de deux termes: w_0 et $n_\omega w_0$. Le premier terme traduit la probabilité d'émission dans le cas où les photons de fréquence émise étaient absents avant l'émission ; on l'appelle probabilité d'*émission spontanée*. Le deuxième terme est proportionnel au nombre n_ω de photons de fréquence émise présents avant l'émission: il décrit une *émission* dite *induite* ou *stimulée*. Quant à la probabilité w_- d'absorption d'un photon, elle est égale à celle d'émission stimulée. Les notions d'émissions spontanée et stimulée ont été introduites par Einstein (1917) qui a établi la relation entre les probabilités d'émission et d'absorption, ce qui explique le nom de *coefficient d'Einstein* donné parfois au coefficient w_0.

Le calcul du coefficient w_0 relève de la compétence de la mécanique quantique parce que les processus d'émission et d'absorption des photons sont régis par des lois statistiques. Néanmoins, dans un cas très important, lorsque la longueur d'onde λ du photon est grande par rapport aux dimensions du système émetteur, en l'occurrence aux dimensions a de l'atome, la probabilité w_0 peut être liée à l'intensité de l'effet classique qui est l'émission dipolaire.

Nous avons déjà parlé d'une telle liaison au § 24.3, en égalant l'intensité de l'émission dipolaire

$$d\mathcal{J} = (4\pi c^3)^{-1} e^2 \langle \mathbf{r}^2 \rangle\, \omega_0^4 \sin^2 \vartheta \, do$$

(ω_0 est la fréquence propre de l'oscillateur, ϑ, l'angle que le moment dipolaire $e\mathbf{r}$ fait avec $\mathbf{k}$; la valeur de $\mathbf{r}^2$ est moyennée dans le temps) à l'énergie $\hbar\omega\, dw$ emportée par les photons, où dw est la probabilité d'émission d'un photon en 1 s (les grandeurs $d\mathcal{J}$ et dw se rapportent à un même élément d'angle solide du photon émis). Ainsi, $dw = d\mathcal{J}/(\hbar\omega)$.

Un calcul précis de mécanique quantique montre que lorsque $\lambda \gg a$, il suffit de remplacer dans cette formule la fréquence ω_0 du dipôle (oscillateur) par la fréquence $\omega_{i\to f}$ du photon émis et d'entendre par le carré du moment dipolaire moyenné pendant une période d'oscillations $e^2 \langle \mathbf{r}^2 \rangle$ la grandeur $2e^2 \mid \mathbf{r}_{i\to f} \mid^2$, où $\mathbf{r}_{i\to f}$ est un élément dit de matrice $\mathbf{r}$ entre les états i et f défini par

$$\mathbf{r}_{i\to f} = \int \psi_f^* (\mathbf{r})\, \mathbf{r} \psi_i (\mathbf{r})\, d^3r,$$

et ψ_i, ψ_f sont les fonctions d'onde atomiques pour les états i, f. Ainsi, il vient

$$dw = \frac{e^2\omega_{i\to f}^3}{2\pi\hbar c^3} |\mathbf{r}_{i\to f}|^2 \sin^2 \vartheta\, do.$$

En effectuant l'intégration de dw sur l'angle solide do, nous obtenons la probabilité totale d'émission spontanée d'un photon de fréquence $\omega_{i\to f}$, c'est-à-dire

$$w_0 = (3\hbar c^3)^{-1} 4e^2\omega_{i\to f}^3 |\mathbf{r}_{i\to f}|^2.$$

Les valeurs de $\mid \mathbf{r}_{i\to f} \mid^2$ (de même que celles de $\langle \mathbf{r}^2 \rangle$) sont de l'ordre de grandeur de a^2, ce qui permet d'écrire

$$w_0 \sim \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 \omega \sim \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 \frac{\omega}{137} .$$

Nous voyons que pour les rayons X (lorsque λ n'est que légèrement supérieure à a) la probabilité d'émission pendant une période d'onde est égale à environ 1/100, et pour la lumière visible elle est de l'ordre de 10^{-10} à 10^{-11}.

Connaissant la relation d'Einstein entre les probabilités d'émission et d'absorption de la lumière, nous pouvons résoudre le problème suivant. Soit une enceinte fermée remplie d'un milieu à l'équilibre thermodynamique, dont les atomes émettent et absorbent des photons. Il est clair que le gaz de photons qui en résulte passera finalement à l'équilibre thermique. Quelle sera la distribution des photons suivant les énergies?

Pour répondre à cette question rappelons que la distribution des atomes à l'équilibre thermique selon leur énergie se détermine par la formule de Boltzmann $N = C \exp [-E/(k_B T)]$, où T est la température, k_B, la constante de Boltzmann et C, une constante de normalisation. Aussi, les nombres d'atomes aux états d'énergies E_i et

E_f ont-ils pour expressions respectives

$$N_i = C\exp\left(-\frac{E_i}{k_BT}\right),\quad N_f = C\exp\left(-\frac{E_f}{k_BT}\right).$$

Considérons maintenant les transitions $i \to f$ des atomes avec émission d'un photon de fréquence $\omega \equiv \omega_{i\to f}$ et les transitions inverses $f \to i$ avec absorption d'un tel photon. Nous avons vu que les probabilités de telles transitions, rapportées à un seul atome, sont liées par la relation

$$w_+/w_- = (n_\omega + 1)/n_\omega,$$

où n_ω est le nombre de photons contenus dans l'enceinte fermée que nous considérons. Mais nous avons encore N_i atomes d'énergie E_i et N_f atomes d'énergie E_f; cela signifie que le rapport entre les nombres totaux de photons émis et absorbés a pour expression

$$\frac{w_+N_i}{w_-N_f} = \mathrm{e}^{\frac{E_f-E_i}{k_BT}}\,\frac{n_\omega+1}{n_\omega} = \frac{n_\omega+1}{\mathrm{e}^{\frac{\hbar\omega}{k_BT}}\,n_\omega}.$$

A l'équilibre, les nombres de photons émis et absorbés doivent être égaux, c'est-à-dire que $w_+N_i = w_-N_f$, si bien que $n_\omega + 1 = n_\omega \exp[\hbar\omega/(k_BT)]$. D'où nous tirons pour n_ω

$$n_\omega = \frac{1}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/(k_BT)} - 1}.$$

Cette formule est appelée *formule* ou *distribution de Planck*. (Nous l'avons déjà utilisée maintes fois non seulement pour les photons mais également pour les phonons ou magnons. Elle a été établie par Planck en 1900.)

Imaginons maintenant que tous les atomes sont éliminés de l'enceinte. Mais les atomes des parois de l'enceinte émettent et absorbent elles aussi les photons et si les parois sont à l'équilibre thermodynamique, le gaz de photons le sera aussi. Dans ce cas, les photons sont émis et absorbés par des parois macroscopiques dont le spectre énergétique est continu et donc le spectre des photons est lui aussi continu. Nous en arrivons à une conclusion importante:

un gaz de photons en état d'équilibre à la température T (*rayonnement dit d'équilibre* ou *du corps noir*) se caractérise toujours, indépendamment de son origine, par la distribution de Planck des photons selon leur énergie.

La formule de Planck peut encore s'obtenir d'une autre façon si l'on tient compte que le nombre de photons est obligatoirement discret et donc l'énergie du rayonnement de fréquence donnée ω ne peut prendre que des valeurs discontinues $\mathscr{E}_n = n\hbar\omega$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Nous considérerons un tel rayonnement comme un certain corps ou un système physique; la probabilité pour qu'un tel système possède

à l'équilibre l'énergie $\mathscr{E}_n$ est proportionnelle à $\exp[-\mathscr{E}_n/(k_B T)]$. Il est facile d'en tirer l'expression pour l'énergie moyenne $\mathscr{E}_n$ du photon :

$$\langle \mathscr{E}_n \rangle = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathscr{E}_n \exp[-\mathscr{E}_n/(k_B T)]}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \exp[-\mathscr{E}_n/(k_B T)]}$$

ou le nombre (moyen statistique) de photons de fréquence ω :

$$n_\omega = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} n \exp[-n\hbar\omega/(k_B T)]}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \exp[-n\hbar\omega/(k_B T)]}.$$

En effet, désignons par $Z(\xi)$ la somme de la progression géométrique :

$$Z(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\xi} = \frac{1}{1-e^{-\xi}}, \quad \xi \equiv \frac{\hbar\omega}{k_B T}.$$

Alors $\langle \mathscr{E}_n \rangle = \hbar\omega n_\omega$ et

$$n_\omega = -\frac{1}{Z(\xi)} \frac{dZ(\xi)}{d\xi} = \frac{e^{-\xi}}{1-e^{-\xi}} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/(k_B T)} - 1}.$$

Nous sommes conduits de nouveau à la distribution de Planck.

Cherchons l'intensité de l'émission thermique. Considérons à cet effet une cavité en forme d'un parallélépipède rectangle de côtés A, B, C. Sur la frontière de la cavité doivent être satisfaites les conditions aux limites imposées aux champs, mais pour ne pas examiner ici cette question en détail, on peut procéder un peu différemment, à savoir supposer que les champs sont périodiques de périodes A, B et C suivant les axes x, y et z. Puisque les champs dans la cavité de symétrie considérée ont la forme d'ondes planes $\exp(i\mathbf{kr} - i\omega t)$, où $\mathbf{k}$ est le vecteur d'onde et $\omega = ck$, leur variation en fonction de la coordonnée x se détermine par le facteur $\exp(ik_x x)$. Pour que cette fonction soit périodique de période A, il faut que soit satisfaite la condition $k_x A = 2\pi n_1$, où n_1 est un nombre entier. Des conditions analogues doivent être accomplies pour les projections de $\mathbf{k}$ sur les axes y et z. Il en résulte que

$$k_x = 2\pi n_1/A, \quad k_y = 2\pi n_2/B, \quad k_z = 2\pi n_3/C.$$

Ces formules permettent de numéroter les ondes dans la cavité. Nous voyons qu'à chaque triplet de nombres entiers n_1, n_2, n_3 correspond un vecteur d'onde et donc deux ondes de polarisation $\mathbf{e}$ différente (rappelons que $\mathbf{ek} = 0$). Il est clair que si A, B, C sont

grandes, notre condition de périodicité ne trouble pratiquement pas la continuité du spectre parce que les projections des vecteurs d'onde de deux ondes de $n_{1,2,3}$ voisins diffèrent de $2\pi/A$, $2\pi/B$, $2\pi/C$ et ces quantités tendent vers zéro quand $A, B, C \to \infty$.

Nous pouvons maintenant déterminer le nombre d'ondes comprises dans les intervalles $(k_x, k_x + \Delta k_x)$, $(k_y, k_y + \Delta k_y)$, $(k_z, k_z + \Delta k_z)$. Il est évident que le nombre d'ondes est égal à $\Delta N = 2\Delta n_1 \,\Delta n_2\, \Delta n_3$ et comme $\Delta n_1 = A\Delta k_x/(2\pi)$, etc., il vient $\Delta N = 2\,(2\pi)^{-3}\, V\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z$, où $V = ABC$ est le volume de la cavité.

En passant aux différentielles, nous obtenons

$$dN = 2\,(2\pi)^{-3} V d^3k \quad (d^3k \equiv dk_x\, dk_y\, dk_z).$$

Le numérateur de cette expression est un élément de volume dans l'espace **k**. Il est commode d'utiliser les coordonnées sphériques et non cartésiennes et de passer de k à la fréquence $\omega = ck$; alors il vient

$$dN = V\omega^2\, d\omega/(\pi^2 c^3).$$

L'énergie de ces ondes, c'est-à-dire des ondes comprises dans l'intervalle $(\omega, \omega + d\omega)$ a pour expression

$$d\mathcal{E}_\omega = \hbar\omega n_\omega\, dN = \frac{V\hbar\omega^3\, d\omega}{\pi^2 c^3 \left(\exp\dfrac{\hbar\omega}{k_B T} - 1\right)}.$$

En intégrant cette expression sur la fréquence, nous obtenons l'énergie totale du rayonnement en équilibre:

$$\mathcal{E} = \frac{V}{\pi^2 c^3}\int_0^\infty \frac{\hbar\omega^3\, d\omega}{\exp\dfrac{\hbar\omega}{k_B T} - 1}.$$

En introduisant au lieu de ω une nouvelle variable d'intégration $\xi = \hbar\omega/(k_B T)$, récrivons cette expression sous la forme

$$\mathcal{E} = \frac{V\,(k_B T)^4}{\pi^2 c^3 \hbar^3}\,\zeta, \quad \zeta \equiv \int_0^\infty \frac{\xi^3\, d\xi}{e^\xi - 1}.$$

L'intégrale ζ qui y figure n'est qu'une simple constante numérique égale à $\pi^4/15$. Ainsi,

L'énergie du rayonnement du corps noir est proportionnelle à la quatrième puissance de la température.

Quant à la dépendance de l'intensité vis-à-vis de la forme et du volume de l'enceinte, l'expression de $\mathcal{E}$ ne fait intervenir que le volume de l'enceinte; ce résultat est valable non seulement pour une enceinte en forme de parallélépipède mais également à l'enceinte de toute forme.

Nous voyons que l'intensité du rayonnement en équilibre est dépendante uniquement de la température de la source et ne dépend pas de la composition chimique de la source et d'autres facteurs. C'est pourquoi un tel rayonnement se caractérise par une haute stabilité de l'intensité, ce qui permet de l'utiliser comme étalon.

Fait curieux, tout notre Univers est rempli de rayonnement radio-électrique en équilibre qui n'a pas de source et correspond à la température $T = 2{,}7$ K. A ce qu'il paraît, ce rayonnement était en équilibre avec la substance chaude de l'Univers il y a d'ici quelques milliards d'années. A cette époque-là sa température était de $\sim 3 \cdot 10^8$ K. L'élargissement continu de l'Univers s'accompagne de l'augmentation de toutes les longueurs (y compris la longueur d'onde de rayonnement) et donc du refroidissement du rayonnement dont la fréquence moyenne $\langle \omega \rangle \sim k_B T/\hbar$, de même que la température T qui la détermine, est inversement proportionnelle à la longueur d'onde moyenne. C'est ainsi que l'élargissement de l'Univers a conduit à l'abaissement de la température du rayonnement au niveau actuel. Le fait lui-même d'existence de ce rayonnement est lié aux premières étapes de l'évolution de l'Univers, ce qui explique le qualificatif de « reliquat » qu'on lui donne.

§ 24.9. Masers et lasers

L'existence d'une émission stimulée à côté d'une émission spontanée est à la base du fonctionnement des oscillateurs et amplificateurs d'ondes électromagnétiques, produisant des faisceaux cohérents d'ondes d'intensité colossale qu'on appelle *masers* et *lasers* (le maser est l'abréviation de l'expression anglaise *Microwave Amplification* (*by*) *Stimulated Emission of Radiation* signifiant l'amplification de micro-ondes par émission stimulée de radiation, et le mot laser est le sigle de l'expression anglaise *Light Amplification* (*by*) *Stimulated Emission of Radiation* signifiant l'amplification de la lumière par émission stimulée de radiation). Le laser est donc un maser qui fonctionne à la fréquence des ondes lumineuses.

Cette méthode de génération d'ondes électromagnétiques a été découverte en U.R.S.S. par Bassov et Prokhorov et, indépendamment d'eux, aux Etats-Unis par Gordon, Zeiger et Townes en 1954-1955. La possibilité d'emploi de cette méthode pour l'amplification d'ondes radio-électriques a été indiquée plus tôt (1951) par les savants soviétiques Fabrikant, Voudinski et Boutaéva.

En étudiant au chapitre 16 les propriétés générales des susceptibilités électrique et magnétique, nous sommes arrivés à la conclusion que les parties imaginaires de ces grandeurs doivent être positives du fait qu'un milieu peut absorber mais non émettre l'énergie électromagnétique. Cette conclusion se rapporte à des milieux se trouvant à l'état d'équilibre complet. Mais au chapitre 17 nous avons vu

que dans un milieu hors d'équilibre (système plasma-faisceau) les oscillations peuvent s'accroître (et non s'amortir) et que dans le cas d'une telle croissance de l'instabilité de faisceau la partie imaginaire de la susceptibilité électrique devient (dans un certain intervalle de fréquence) négative.

Les milieux à partie imaginaire négative des susceptibilités (on les appelle parfois *milieux actifs*) peuvent être utilisés pour la production et l'amplification d'oscillations.

Expliquons les principes de réalisation d'un tel milieu et de son utilisation dans les masers et les lasers. Un milieu est non actif si la probabilité w_i pour que ce milieu se trouve à l'état d'énergie $\mathscr{E}_i$ diminue lorsque $\mathscr{E}_i$ augmente (on dit dans de tels cas que l'on a affaire à une *population normale des niveaux* énergétiques). En particulier, la population normale est caractéristique d'un milieu en équilibre thermique : pour un tel milieu, comme nous le savons, la probabilité w_i est donnée par la formule de Boltzmann $w_i \sim \sim \exp[-\mathscr{E}_i/(k_B T)]$.

Pour que le milieu devienne actif, il faut augmenter la probabilité des états excités des atomes ou, comme on dit encore, réaliser une *inversion de population* des niveaux d'énergie. (Il suffit bien entendu que la population inversée soit réalisée au moins pour deux niveaux.)

Dans le cas de masers on utilise à cette fin l'une de deux méthodes. La première (applicable seulement pour les gaz) consiste à utiliser des champs extérieurs pour séparer spatialement les atomes à l'état excité des atomes à l'état fondamental ; c'est l'ensemble des atomes excités qui constituera alors un milieu actif.

La seconde méthode (applicable tant aux gaz qu'aux liquides et solides) consiste à faire passer les atomes de l'état fondamental à un état excité sans leur séparation dans l'espace.

Supposons maintenant que le milieu actif soit obtenu par une méthode ou une autre. Comment peut-il être utilisé pour la production d'ondes électromagnétiques ? Si le milieu actif est abandonné à lui-même, ses atomes excités se désexciteront, c'est-à-dire passeront à l'état fondamental par émission d'une onde électromagnétique de fréquence $\omega_{ji} = (\mathscr{E}_j - \mathscr{E}_i)/\hbar$. Mais une telle transition spontanée sera désordonnée parce que les différents atomes émettent indépendamment l'un de l'autre et les phases des ondes émises ne seront aucunement corrélées entre elles.

Il est pourtant possible de faire de telle sorte que les atomes émettent en phase, c'est-à-dire avec une seule et même phase (et, bien entendu, sur une même fréquence). A cet effet, il faut « stimuler » les oscillateurs atomiques, c'est-à-dire sans permettre (plus exactement, sans prendre en compte) la spontanéité de l'émission, disposer de « crochets de détente » fonctionnant en synchronisme. On y arri-

ve en mettant à profit l'effet d'*émission stimulée*. Cet effet consiste en ce qu'un atome excité peut être forcé, sous l'action d'un rayonnement incident, d'émettre même dans le cas où il « ne pense pas » à émettre spontanément. Dans ces conditions la phase du rayonnement stimulé de l'atome n'est pas aléatoire mais est une grandeur bien fixée : elle se confond avec la phase du rayonnement stimulant. Cet effet est particulièrement intense à la résonance lorsque la fréquence du rayonnement stimulant est égale à celle de la transition atomique. En utilisant ce phénomène, nous parvenons à ce que tous les atomes excités émettent de façon cohérente, ce qui rend possible la réalisation d'un oscillateur engendrant des ondes électromagnétiques constitué d'un nombre colossal d'oscillateurs atomiques émettant en synchronisme et en phase.

Expliquons plus en détail le principe de fonctionnement d'un maser à gaz utilisant un faisceau moléculaire d'ammoniac NH_3. La molécule NH_3 possède beaucoup de niveaux énergétiques parmi lesquels il existe deux niveaux *1* et *2* d'énergies $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ voisines (telles que $\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 \equiv 2A = 10^{-4}$ eV, ce qui correspond à la fréquence $\omega/(2\pi) = (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)/(2\pi\hbar) = 2{,}4 \cdot 10^{10}$ s^{-1} ou à une longueur d'onde $\lambda = 1{,}25$ cm) et une chose importante est que dans les états *1* et *2* la molécule NH_3 possède un moment dipolaire électrique **d**. Aussi, dans un champ électrique E, les énergies des états *1* et *2* de la molécule NH_3 subissent-elles une variation en prenant les valeurs suivantes :

$$\mathcal{E}_1' = \mathcal{E}_0 - \sqrt{A^2 + E^2 d^2}, \quad \mathcal{E}_2' = \mathcal{E}_0 + \sqrt{A^2 + E^2 d^2},$$

où $\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2}(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)$.

Supposons maintenant qu'un faisceau étroit de gaz NH_3 passe par une région où règne un champ électrique inhomogène de forte intensité variant dans la direction perpendiculaire à celle de mouvement du faisceau. Par suite de l'inhomogénéité du champ les molécules se trouvent soumises à des forces : les molécules d'énergie $\mathcal{E}_1'$ dévient vers des champs plus forts (disons vers le haut), et celles d'énergie $\mathcal{E}_2'$, vers des champs plus faibles (vers le bas). Il en résulte la séparation du faisceau de molécules NH_3 en deux faisceaux d'énergies $\mathcal{E}_1'$ et $\mathcal{E}_2'$ (fig. 24.9). Après la séparation des faisceaux il n'est plus besoin que les molécules se déplacent dans un champ électrique constant. A la sortie du champ électrique l'énergie excédentaire $\mathcal{E}_2' - \mathcal{E}_2$ se transforme en énergie cinétique. La valeur de $\mathcal{E}_1' - \mathcal{E}_1$ étant petite (proportionnelle à E^2), nous la négligerons dans ce qui suit.

Maintenant nous devons obliger toutes les molécules d'énergie $\mathcal{E}_2$ d'émettre des photons simultanément et de façon cohérente. A cet effet, on fait passer le faisceau de ces molécules à travers une cavité résonnante R (fig. 24.10) dont la fréquence propre $\omega_0 = (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)/\hbar$.

Le problème consiste à faire de telle sorte que les molécules se trouvant dans la cavité passent de l'état excité d'énergie $\mathcal{E}_2$ à l'état fondamental d'énergie $\widetilde{\mathcal{E}}_1$ et que cette transition s'effectue en synchronisme et en phase. A cet effet, on introduit dans la cavité un champ électrique variable $\widetilde{E} = \widetilde{E}_0 \cos \omega t$, qui provoque la transition *2* → *1* des molécules s'accompagnant d'une émission stimulée sur la fréquence ω_0.

La probabilité de cette transition est particulièrement grande lorsqu'on réalise la condition de résonance $\omega = \omega_0$. Dans ce cas la

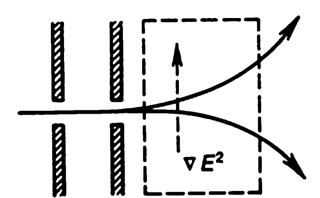


Fig. 24.9. Séparation d'un faisceau de molécules de gaz par un champ électrique inhomogène

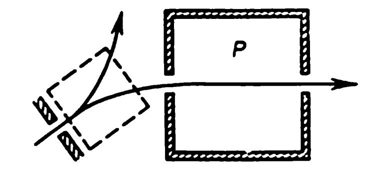


Fig. 24.10. Représentation schématique d'un maser à gaz

probabilité pour qu'une molécule d'énergie $\mathcal{E}_2$, qui est entrée dans la cavité à l'instant $t = 0$, passe vers l'instant t à l'état d'énergie $\mathcal{E}_1$ s'exprime par la formule $w_{2\to1}(t) = \sin^2 (\widetilde{E}td/\hbar)$. Il résulte de cette formule que le temps de passage de la molécule à travers la cavité $T = L/v$ (L étant la longueur de la cavité et v, la vitesse de la molécule) doit être réglé à une valeur telle que soit satisfaite l'égalité $\widetilde{E}Td/\hbar = \pi/2$. Alors la probabilité pour que la molécule entrant dans la cavité avec l'énergie $\mathcal{E}_2$ la quitte avec l'énergie $\mathcal{E}_1$ est égale à l'unité. Autrement dit, dans ce cas toutes les molécules entrant dans la cavité à l'état excité *2* en sortiront à l'état fondamental *1*. Dans ces conditions, chacune d'elles cédera à la cavité une énergie $\hbar\omega_0 = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$ sous forme d'énergie de l'onde électromagnétique.

Examinons le caractère du champ $\widetilde{E}$ qui provoque l'émission stimulée des molécules. Nous l'avons considéré comme donné. Dans ce cas notre maser, c'est-à-dire un système constitué d'un diviseur du faisceau de molécules et d'une cavité résonnante par laquelle passe le faisceau de molécules excitées, est un amplificateur de champ $\widetilde{E}$ et non un oscillateur.

Or, ce même appareil est capable de générer des ondes de fréquence ω_0. En effet, la cavité résonnante est toujours le siège d'un champ de fréquence ω_0 même si son amplitude est infime (par exemple, le champ dû aux fluctuations thermiques). Ce champ provoque

une émission stimulée qui sera amplifiée par le champ de départ. Le champ plus fort produira une émission stimulée plus intense qui sera amplifiée encore par le champ de départ, et ainsi de suite. De la sorte, il devient en principe possible d'amplifier en avalanche un champ de fréquence ω_0 quelque faible qu'il soit.

Mais pour qu'un tel *effet d'autoexcitation* puisse se manifester, certaines conditions doivent être accomplies. La principale est que l'énergie du champ électromagnétique qui prend naissance doit être plus grande que les pertes d'énergie dans la cavité résonnante. Pour cela il est nécessaire que le nombre N_2 de molécules à l'état *2*, entrant en 1 s dans la cavité, soit supérieur à une valeur critique. En effet, la puissance émise par le faisceau est égale à

$$P = \hbar\omega_0 N_2 w_{2\to 1}(t),$$

où $w_{2\to 1}(t)$ est la probabilité de transition $2 \to 1$ vers l'instant t. En supposant que t est suffisamment petit, nous posons $w_{2\to 1}(t) = (\pi \tilde{E}_0 T d/\hbar)^2$. Les pertes dans la cavité résonnante sont égales à $\omega_0 W/Q$, où Q est le facteur de qualité, $W = V\tilde{E}_0^2/(16\pi)$, l'énergie emmagasinée dans la cavité et V, le volume de la cavité. En supposant que dans l'expression de $w_{2\to 1}(t)$ le temps t est égal à L/v, nous tirons de l'égalité $P = \omega_0 W/Q$ l'expression suivante pour la valeur critique $N^{(C)}$ du nombre N_2:

$$N^{(C)} = \frac{\hbar v^2 S}{4\pi^2 L Q d^2},$$

où S est l'aire de la section droite de la cavité. L'évaluation du nombre critique $N^{(C)}$ montre qu'il est de l'ordre de 10^{13} molécules par seconde.

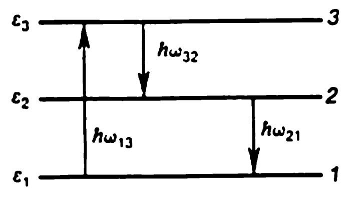


Fig. 24.11. Transitions dans un maser à trois niveaux

Expliquons maintenant la méthode de réalisation du milieu actif à l'aide de l'inversion de population des niveaux énergétiques sans séparation spatiale des atomes. Envisageons un maser à solide à trois niveaux (fig. 24.11) qui utilise un système à trois niveaux $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$ (il a été proposé par Bloembergen et Prokhorov).

Ce système absorbe un photon de fréquence ω_{31} et passe de l'état *1* à l'état *3*. La durée de vie de ce dernier est très petite, si bien qu'en émettant un photon de fréquence ω_{32} le système passe rapidement au niveau « de travail » *2* dont la durée de vie est longue de sorte que sa population peut être rendue comparable et même supérieure à celle de l'état fondamental *1*. C'est sur ces deux niveaux que fonctionne le maser, c'est-à-dire qu'il amplifie et génère la fréquence $\omega_{21} = (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)/\hbar$. Pour les masers à solide à trois niveaux cette fréquence se situe généralement dans le domaine optique. Dans ce cas, une cavité résonnante est impossible à réaliser (à cause de très petites

dimensions), aussi, dans les masers optiques, c'est-à-dire dans les lasers, utilise-t-on deux miroirs entre lesquels sont produites des ondes lumineuses stationnaires.

Dans un maser à trois niveaux il est possible de réaliser une inversion de population stationnaire. Pour nous en convaincre, écrivons l'équation du bilan pour les populations N_1, N_2, N_3 des niveaux *1*, *2*, *3*. Désignons par w_{ij} la probabilité de la transition $i \to j$, due aux vibrations du réseau cristallin et à d'autres processus de relaxation. Puis, soit W_{ij} la probabilité de la transition stimulée $i \to j$ due au champ de fréquence ω_{ij} appliqué (on suppose la présence d'un champ fort de saturation de fréquence ω_{31} et d'un champ faible de fréquence ω_{32}). Dans ce cas, la variation de la population N_3 du niveau *3* en fonction du temps se détermine par l'équation

$$\frac{dN_3}{dt} = w_{13}N_1 - w_{31}N_3 + w_{23}N_2 - w_{32}N_3 - W_{31}(N_3 - N_1) - \\ - W_{32}(N_3 - N_2).$$

Les variations des populations des niveaux *1* et *2* se déterminent par des équations analogues.

Remarquons que les probabilités w_{ij} et w_{ji} ne sont pas indépendantes l'une de l'autre : elles sont liées par le principe d'équilibre en détail. En effet, les populations en équilibre $\bar{N}$ des niveaux satisfont aux relations $\bar{N}_i w_{ij} = \bar{N}_j w_{ji}$, mais en équilibre thermique, suivant la distribution de Boltzmann, $\bar{N}_i \sim \exp[-\mathscr{E}_i/(k_B T)]$, ce qui permet d'écrire

$$\frac{w_{ji}}{w_{ij}} = \exp\left(-\frac{\hbar\omega_{ij}}{k_B T}\right) \approx 1 - \frac{\hbar\omega_{ij}}{k_B T}$$

(on suppose que $\hbar\omega \ll k_B T$). Dans l'approximation d'ordre zéro suivant le petit paramètre $\hbar\omega_{ij}/(k_B T)$ les populations de tous les trois niveaux sont égales, si bien que dans les termes où $N_{1,2,3}$ est multipliée par ce paramètre on peut poser $N_1 = N_2 = N_3 = {}^1/_3 N$ avec $N = N_1 + N_2 + N_3$. Ainsi, nous obtenons

$$\frac{dN_3}{dt} = w_{13}\left(N_1 - N_3 - N\frac{\hbar\omega_{31}}{3k_B T}\right) + \\ + w_{23}\left(N_2 - N_3 - N\frac{\hbar\omega_{32}}{3k_B T}\right) - W_{31}(N_3 - N_1) - W_{32}(N_3 - N_2).$$

Des équations analogues sont également valables pour dN_1/dt et dN_2/dt.

Le cas qui nous intéresse est celui de populations stationnaires lorsque $N_{1,2,3}$ est indépendante du temps. Le plus souvent la probabilité W_{31} est beaucoup plus grande que la probabilité W_{32} et toutes les probabilités de transitions thermiques (c'est-à-dire tous les w). Dans ces conditions, les populations stationnaires vérifient la rela-

tion suivante:

$$N_3-N_2=\frac{\hbar N}{3k_BT}\,\frac{w_{32}\omega_{32}-w_{21}\omega_{21}}{w_{32}+w_{12}+W_{32}}\,.$$

Il en résulte la *condition d'inversion de population*: $w_{32}\omega_{32}>w_{21}\omega_{21}$. En multipliant N_3-N_2 par $\hbar\omega_{32}W_{32}$, nous trouvons la puissance de sortie sur la fréquence ω_{32}:

$$P=\hbar\omega_{32}(N_3-N_2)\,W_{32}.$$

Comme exemple de système à trois niveaux, largement utilisé dans les lasers, on peut indiquer le cristal de rubis, le corindon Al_2O_3 avec des traces d'oxyde de chrome Cr_2O_3 (qui détermine la couleur caractéristique de rubis). Dans le réseau cristallin du rubis le chrome se trouve sous forme d'ions à charge triple Cr^{3+}; c'est le spectre de ces ions qui comporte trois niveaux utilisés pour le fonctionnement du laser. La longueur d'onde de pompage pour le rubis est de 556 nm, la longueur d'onde des ondes émises est de 692,9 et 694,3 nm (couleur rouge). Le laser à rubis peut fonctionner aussi bien par impulsions qu'en continu. En principe, les lasers permettent de réaliser l'émission dans un domaine de fréquence s'étendant de l'infrarouge lointain à l'ultraviolet avec une puissance de crête jusqu'à un gigawatt par impulsion ou une puissance en continu supérieure à quelques centaines de watts. Les lasers permettent d'obtenir des signaux de très grande pureté spectrale avec une stabilité de fréquence de l'ordre de 10^{-14}.

FORMULES FONDAMENTALES

Formule de Rutherford

$$d\sigma=\left(\frac{Zze^2}{2Mv^2}\right)^2\frac{d\omega}{\sin^4(\theta/2)}$$

Carré moyen de l'angle de diffusion

$$\langle\theta^2\rangle=\frac{8\pi NlZ^2z^2e^4}{p^2v^2}\ln\frac{a_0pv}{2Z^{4/3}ze^2}$$

Pertes par ionisation (formule de Bethe)

$$-\frac{dE}{dx}=\frac{4\pi z^2e^4n}{m_ev^2}\times\left(\ln\frac{2m_ev^2}{\langle I\rangle\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}-\frac{v^2}{c^2}\right)$$

Energie de l'émission de Vavilov-Cerenkov (formule de Tamm-Frank)

$$\mathscr{E}=\frac{e^2l}{c^2}\int\limits_{(\beta N>1)}\left(1-\frac{1}{\beta^2N}\right)\omega\,d\omega$$

Formule de Compton

$$\omega_2=\frac{\omega_1}{1+\frac{\hbar\omega_1}{m_ec^2}(1-\cos\vartheta)}$$

Section efficace de diffusion de Compton	$\sigma = \pi r_0^2 \frac{m_e c^2}{\hbar\omega_1} \times$ $\times \left(\ln \frac{2\hbar\omega_1}{m_e c^2} + \frac{1}{2}\right) (\hbar\omega_1 \gg m_e c^2),$ $\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \left(1 - 2\frac{\hbar\omega_1}{m_e c^2}\right) (\hbar\omega_1 \ll m_e c^2)$
Section efficace de création de paires électron-positron	$\sigma_p = \frac{2Z^2 e^6}{9m_e^2 c^5 \hbar} \times$ $\times \left\{14 \ln (183\, Z^{-1/3}) - \frac{1}{3}\right\}$
Probabilités d'émission et d'absorption d'un photon	$w_+ = (n_\omega + 1)\, w_0, \quad w_- = n_\omega w_0$
Probabilité d'émission spontanée	$w_0 = \frac{4e^2}{3\hbar c^3} \omega_{i\to f}^3 \lvert \mathbf{r}_{i\to f} \rvert^2$
Intensité de rayonnement du corps noir	$\mathscr{E} = \frac{\pi^4}{15} \frac{V (k_B T)^4}{\pi^2 c^3 \hbar^3}$

CONCLUSION

ÉVOLUTION DES CONNAISSANCES EN ÉLECTROMAGNÉTISME

Après avoir étudié les phénomènes électriques et magnétiques concrets nous reviendrons à la mise sur pied de la **théorie de l'électromagnétisme de Maxwell**, cette fois principalement pour expliquer l'interdépendance de la théorie de Maxwell et des autres théories physiques fondamentales et le développement de la science de l'électromagnétisme résultant de cette interdépendance.

Nous sommes partis de la loi de Coulomb pour l'interaction électrostatique des charges et de la loi d'Ampère pour l'interaction magnétostatique des courants. De par elles-mêmes, ces lois, bien que nouvelles et importantes, n'apportaient dans leur principe rien de nouveau à l'interprétation physique du monde : elle restait newtonienne, c'est-à-dire basée entièrement sur la mécanique universelle de Newton.

Les nouvelles lois ne faisaient, semblait-il, que souligner le caractère d'universalité de la mécanique newtonienne parce qu'elles décrivaient deux nouveaux types de forces, or, d'après Newton, les forces pouvaient être les plus variées. Autrement dit, l'électrostatique et l'électrodynamique des courants continus s'inscrivaient intégralement dans la dynamique générale de Newton et pouvaient en fait être considérées comme ses applications concrètes. C'est que les notions de champ électrique et de champ magnétique, bien qu'elles soient formellement introduites, n'avaient pas encore une vraie signification physique.

La situation a radicalement changé lorsque Faraday a découvert expérimentalement le phénomène et la loi de l'induction électromagnétique et Maxwell a prédit pour des raisons théoriques la possibilité de production de champ magnétique par un courant électrique variable (l'idée de courant de déplacement). Il est apparu que les champs variables pouvaient exister indépendamment des charges et des courants, en s'entretenant l'un l'autre. En d'autres termes, le champ électrique et le champ magnétique sont devenus de par eux-mêmes une réalité physique, ils ont cessé d'être une notion purement

formelle, un attribut de charges et de courants, qu'on peut utiliser mais on peut également ne pas utiliser.

La réalité des champs a trouvé son expression dans les **équations différentielles de Maxwell** qui traduisent les lois de mouvement des champs au même titre que les lois de Newton sont des lois de mouvement mécanique de la matière.

Le champ électromagnétique a pris sa place à côté de la substance.

On a commencé à baser l'interprétation physique du monde sur deux théories fondamentales: la mécanique de Newton et l'électrodynamique de Maxwell.

La science de l'électromagnétisme a donné naissance d'abord à l'électrotechnique et ensuite à la radiotechnique, ce qui a eu pour résultat une révolution technique et scientifique.

Mais le siècle d'or dans la physique n'a pas duré longtemps, quelque 50 années tout au plus. Au début de notre siècle il est devenu clair qu'entre les deux piliers de la science physique—la mécanique de Newton et l'électrodynamique de Maxwell—il y avait une contradiction fondamentale. Cette contradiction tenait tout d'abord à ce que suivant l'électrodynamique maxwellienne dans le vide peuvent se propager des ondes électromagnétiques libres, notamment, la lumière, et leur vitesse de propagation a une certaine valeur constante, la même pour tous les observateurs. Or, en mécanique newtonienne la vitesse des corps matériels ne peut pas être absolue, elle dépend toujours du système de référence et obéit à la loi classique de composition des vitesses, liée aux transformations classiques de Galilée.

Par rapport aux transformations de Galilée les lois de Newton sont invariantes; cela exprime l'impossibilité d'existence d'un référentiel d'inertie privilégié: tous ces systèmes de référence sont équivalents et indiscernables. Quant aux équations de Maxwell, elles ne sont pas invariantes par rapport aux transformations de Galilée et de ce fait on pourrait croire qu'elles admettent l'existence d'un système de référence privilégié dans lequel se propage précisément la lumière. Mais l'expérience de Michelson a démontré qu'un tel système n'existe pas parce que la vitesse de la lumière ne dépend ni du mouvement de la source lumineuse, ni de celui de l'observateur. On est forcé d'en conclure que les transformations de Galilée auxquelles on identifie l'équivalence de tous les référentiels d'inertie ne sont pas d'une application universelle.

Il y a plus que cela, l'électrodynamique de Maxwell permettait de conclure que la loi de l'égalité de l'action et de la réaction (la troisième loi de Newton) ne pouvait être considérée, elle non plus, comme une loi universelle. En effet, si deux corps sont liés l'un à l'autre par un rayon lumineux, ils ne peuvent pas exercer l'un sur l'autre les mêmes forces à un même instant parce que la lumière possède une impulsion mais se propage à une vitesse finie.

La contradiction entre la mécanique de Newton et l'électrodynamique de Maxwell a été levée par la **théorie de la relativité restreinte d'Einstein**, mais cela a été obtenu au prix de pertes considérables: il a fallu reconnaître que le temps ne pouvait plus être considéré comme le supposait la mécanique de Newton, qu'il est relatif et s'écoule différemment dans des systèmes de référence différents. La relation entre des instants de temps et des points de l'espace correspondant à un même événement dans des référentiels d'inertie différents se détermine par les transformations de Lorentz. Par rapport à ces transformations, les équations de Maxwell sont invariantes, alors que les équations de Newton ne le sont pas. C'est pourquoi Einstein a modifié les formulations des équations de la mécanique pour qu'elles deviennent elles aussi invariantes par rapport aux transformations de Lorentz.

Ainsi, la contradiction entre la mécanique classique de Newton et l'électrodynamique de Maxwell a été résolue par la théorie de la relativité d'Einstein et ceci a été fait au prix d'un remaniement de la mécanique, l'électrodynamique de Maxwell restant intacte. Le remplacement de la mécanique classique de Newton par la mécanique relativiste d'Einstein n'avait un sens réel que dans le domaine des fortes vitesses de la particule, de l'ordre de la vitesse de la lumière, alors que dans le domaine de mouvements non relativistes les deux théories classique sont pratiquement équivalentes.

En attendant, une nouvelle crise mûrissait dans le domaine non relativiste liée cette fois à l'existence des atomes.

L'atome est composé d'un noyau et d'électrons gravitant autour de ce noyau. Les vitesses des électrons étant non relativistes, il semblerait que pour l'étude du mouvement d'un électron nous sommes en droit d'utiliser la mécanique classique de Newton. D'un autre côté, suivant l'électrodynamique de Maxwell, un électron animé d'un mouvement accéléré doit émettre des ondes électromagnétiques qui emportent une certaine énergie, c'est-à-dire que l'atome doit perdre de l'énergie, et son énergie ne suffira qu'à assurer l'émission pendant un temps infime de l'ordre de 10^{-8} s. après quoi l'atome devra cesser d'exister. Autrement dit, dans le cadre de la physique classique — de la mécanique classique et de l'électrodynamique classique — il est impossible d'expliquer la stabilité de l'atome.

Pour trouver une issue à cette impasse il a fallu, de même que lors de construction de la théorie de la relativité, soumettre à un nouvel examen les notions fondamentales de la physique classique. Mais cette fois-ci ce n'est pas les concepts d'espace et de temps mais les idées classiques sur le caractère de mouvement qui ont fait l'objet d'une nouvelle analyse.

L'essentiel de ces idées consiste en ce que le mouvement d'une particule s'effectue toujours suivant une trajectoire déterminée. La

notion de mouvement est dans ce cas inséparable de celle de trajectoire.

Mais que signifie en fait le mouvement sur une trajectoire ? Ceci signifie qu'à chaque instant les notions de coordonnée de la particule et de sa vitesse ou de son impulsion ont un sens physique. Cependant, une utilisation simultanée de ces notions n'a aucun sens. Pour expliquer cette assertion, effectuons mentalement une expérience suivante (expérience de Heisenberg).

Soit un électron se déplaçant le long d'une droite, à une vitesse rigoureusement déterminée. Il s'agit de déterminer la position de cet électron.

A cet effet, éclairons l'électron, c'est-à-dire dirigeons sur lui un faisceau lumineux convergent. Du fait de la nature ondulatoire de la lumière, l'image donnée par un tel faisceau ne sera pas ponctuelle mais aura certaines dimensions de l'ordre de la longueur d'onde de la lumière utilisée. C'est pourquoi la précision de localisation de l'électron est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde de la lumière incidente. En diminuant la longueur d'onde de la lumière, on peut obtenir une précision de localisation de l'électron aussi élevée que l'on veut.

Pourtant, l'« illumination » de l'électron n'est pas un processus « inoffensif ». Comme la lumière possède une impulsion et l'illumination de l'électron donne lieu à une interaction de la lumière avec l'électron, celui-ci acquiert une certaine impulsion, ce qui provoque naturellement une variation de sa vitesse. Cette variation est d'autant plus forte que la longueur d'onde de la lumière est plus courte, c'est-à-dire que l'électron est localisé avec une précision plus élevée.

Ainsi, plus exacte est la localisation de l'électron, plus forte est la perturbation subie par son mouvement, c'est-à-dire plus grande est la variation de sa vitesse. La variation de l'impulsion de l'électron illuminé par une lumière et l'incertitude sur sa position sont telles que leur produit ne peut pas être inférieur à une certaine constante universelle qui n'est rien d'autre que la constante de Planck.

Cette relation de la plus haute importance établie pour la première fois par Heisenberg (on l'appelle **relation d'incertitude de Heisenderg**) est valable non seulement pour notre expérience effectuée par le pensée mais aussi pour toute autre expérience ayant pour but de connaître avec une précision totale à la fois la position et l'impulsion (la quantité de mouvement) d'une particule. En d'autres termes, la relation d'incertitude de Heisenberg est d'une application universelle.

Ne signifie-t-elle pas que nos possibilités de connaissance du monde extérieur sont limitées ? Une telle conclusion serait erronée. Le relation d'incertitude de Heisenberg signifie seulement qu'en

toute rigueur la notion de trajectoire est dénuée de sens et que ce n'est pas toujours qu'on peut l'utiliser. Mais ceci ne signifie aucunement que nos possibilités de connaissance du monde sont limitées. L'abandon de notion de trajectoire classique ne saurait être identifié à l'abandon de possibilités de connaissance du monde. Ce n'est pas la limitation de possibilités de connaissance du monde mais une limitation d'applicabilité de certaines notions classiques que signifie la relation de Heisenberg.

Si l'on pose de façon formelle la constante de Planck (on l'appelle encore constante quantique) égale à zéro, la corrélation entre la détermination de la coordonnée et celle de l'impulsion disparaîtra et nous seront conduits à la notion de trajectoire classique.

Ainsi, la mécanique classique doit être considérée comme un cas limite d'une théorie physique plus générale, ce cas limite correspond à l'annulation de la constante de Planck. Une telle théorie physique plus générale est constituée pas la **mécanique quantique** qui fait suite à la mécanique de Newton, à l'électrodynamique de Maxwell et à théorie de la relativité générale et restreinte d'Einstein. C'est une grande théorie physique qui a expliqué et décrit, d'un point de vue unique, de très nombreux phénomènes se rapportant à la physique quantique et notamment à la physique atomique.

La mécanique quantique fait associer à chaque grandeur physique — impulsion de la particule, énergie, moment, etc. — non des valeurs numériques mais un certain opérateur (hermitien) dont les valeurs propres forment un spectre de valeurs possibles, expérimentalement observables, de la grandeur considérée.

En mécanique quantique, chaque état d'un système dynamique, d'un atome par exemple, se décrit par une fonction d'onde qui satisfait à **l'équation de Schrödinger.** La fonction d'onde d'une particule, par exemple d'un électron se trouvant à un état quelconque, est directement liée à la conception probabiliste de la mécanique quantique: le carré du module de la fonction d'onde détermine la distribution de probabilités de présence de la particule pour chacune de ses positions possibles dans l'espace.

La mécanique quantique doit être une théorie physique cohérente, non contradictoire. A cet effet, il est nécessaire que non seulement les électrons mais la matière toute entière, en particulier le champ électromagnétique, possèdent des propriétés quantiques. En effet, si la lumière ne présentait pas les propriétés quantiques, on pourrait, en rendant suffisamment faible l'intensité du faisceau lumineux utilisé dans l'expérience de Heisenberg examinée plus haut, déterminer avec une précision totale la position de l'électron (en l'illuminant avec une lumière de longueur d'onde suffisamment courte) sans changer son impulsion. Autrement dit, la relation d'incertitude, qui est à la base de la mécanique quantique, ne serait pas vérifiée.

Mais la lumière jouit des propriétés quantiques. Cela signifie qu'elle peut être considérée comme étant constituée de particules distinctes, appelées photons, qui se déplacent à une vitesse déterminée et possèdent une énergie déterminée et une impulsion déterminée. On peut donc construire pour le photon, de même que pour l'électron, une mécanique quantique.

En tenant compte de la « structure » corpusculaire de la lumière, on peut montrer que le faisceau lumineux tombant sur l'électron dans l'expérience de Heisenberg exerce une pression sur l'électron quelle que soit l'intensité lumineuse, si bien que la relation d'incertitude sera « sauvée ».

Ainsi, la lumière se caractérise tant par les propriétés ondulatoires que par les propriétés corpusculaires, mais ces propriétés sont complémentaires. Cela signifie que les appareils qui déterminent l'une de ces propriétés exercent sur la lumière une action telle que la deuxième propriété ne se manifeste pas dans les mesures considérées. Une situation analogue se produit pour les électrons et toutes les autres particules parce qu'elles possèdent toutes tant les propriétés corpusculaires que les propriétés ondulatoires.

Ces propriétés des électrons se manifestent par exemple dans les expériences d'interférence des électrons sur les cristaux (ou dans les expériences, effectuées par la pensée, de passage des électrons à travers deux ouvertures pratiquées dans un écran). Mais les propriétés ondulatoires des électrons cessent de se manifester dès que les appareils mettent en évidence leurs propriétés corpusculaires.

Nous pouvons maintenant expliquer la stabilité de l'atome dans le cadre de la mécanique quantique.

Si l'atome est à un état quantique d'énergie minimale, il ne peut pas émettre des ondes électromagnétiques parce que l'émission se fait par des photons distincts qui emportent des portions finies d'énergie. Quand à l'électron se trouvant à l'état fondamental (état d'énergie minimale), il ne peut pas céder son énergie. Au contraire, aux états excités le transfert d'énergie devient possible et par suite de l'émission, c'est-à-dire du départ d'un photon, l'atome perd une partie de son énergie et passe à l'état fondamental.

La mécanique quantique (complétée par l'hypothèse sur la nature corpusculaire de la lumière) permet de calculer le temps moyen au cours duquel se produit ce changement d'état interne de l'atome, c'est-à-dire la durée de vie moyenne de l'atome à l'état excité.

Dans le cadre de la mécanique quantique on peut également calculer l'intensité de l'émission, décrire les propriétés d'absorption de la lumière par les atomes et les molécules. Dans ces cas on utilise l'électrodynamique classique de Maxwell en lui adjoignant la condition quantique qui tient compte des propriétés corpusculaires de la lumière.

C'est ainsi que prend naissance une nouvelle théorie physique, **l'électrodynamique quantique,** c'est-à-dire la théorie quantique des interactions électromagnétiques.

Le développement de l'électrodynamique quantique a été précédé de la création par Dirac de la mécanique quantique relativiste de l'électron qui réunissait une description quantique de l'électron à l'exigence de la théorie de la relativité restreinte concernant l'invariance des équations de toute théorie physique par rapport aux transformations de Lorentz.

En mécanique quantique relativiste, l'électron se caractérise non par une seule fonction d'onde, comme en mécanique quantique non relativiste, mais par quatre fonctions d'onde dont l'ensemble constitue une grandeur mathématique unique appelée bispineur et subissant les transformations de Lorentz suivant une loi bien déterminée. Etant des fonctions des coordonnées et du temps, les quatre composantes du bispineur se décrivent par les équations différentielles de Dirac. A partir des équations de Dirac, qui constituent une généralisation de l'équation de Schrödinger au cas relativiste on a tiré deux conclusions physiques importantes.

Premièrement, il a été établi que l'électron doit posséder un moment interne de quantité de mouvement appelé spin et égal à 1/2 (en unités de $\hbar$). Ainsi, le spin n'est pas introduit artificiellement dans la théorie, il y apparaît d'une façon toute naturelle.

Deuxièmement, les équations de Dirac admettent des solutions correspondant à des états d'énergie négative de l'électron. Il semblerait que de tels états n'ont pas de sens et leur existence causait au début de grandes difficultés pour la théorie de Dirac. Pourtant, ces difficultés ont pu être vaincues dans le cadre d'une hypothèse étonnante. Conformément à cette hypothèse, le continuum des états d'énergie négative est rempli par les électrons. Alors, en vertu du **principe d'exclusion de Pauli** qui indique que chaque état quantique ne peut être occupé que par un seul électron tout au plus, les électrons ne peuvent pas passer d'un état d'énergie négative à un autre et un tel fond infini d'électrons situés à des niveaux d'énergie négative (appelé vide électronique) ne se manifestera pas de par lui-même.

Ce sont des trous qui se manifestent dans cette distribution infinie appelée « mer » d'électrons de Dirac. Les trous se comportent comme des particules possédant des énergies positives, une masse et une charge électrique. Leur masse est égale à celle de l'électron et leur charge ne diffère de celle de l'électron que par le signe. Ces particules, que l'on appelle positrons, sont des antiparticules relativement aux électrons.

On peut imaginer qu'à l'aide de champs électromagnétiques un électron est « soutiré » du « fond » d'états électroniques négatifs et envoyé dans le continuum d'états d'énergie positive. Il y a alors

l'apparition d'un électron réel et d'un trou réel, c'est-à-dire d'un positron. Cela signifie que le champ électromagnétique a donné naissance à une paire électron-positron. Imaginons maintenant qu'un électron « tombe » dans un trou. Il en résulte la libération d'une énergie qui est emportée par les photons. Ainsi, une paire électron-positron peut s'annihiler avec émission de photons. D'après les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion l'annihilation d'une paire électron-positron doit donner naissance à deux photons au moins.

Les deux phénomènes — la création de paires électron-positron et leur annihilation — ont été d'abord prédits pour des raisons théoriques par Dirac. Par la suite, les expériences ont confirmé ces prédictions géniales.

Les effets qui viennent d'être examinés signifient que le champ électromagnétique, c'est-à-dire les photons, est aussi matériel que les électrons et les positrons. En électrodynamique quantique, le champ électromagnétique et les électrons (les positrons) sont considérés comme deux formes, égales en droits, de la matière unique.

On peut dire que l'idée de réalité du champ, émise par Faraday et Maxwell, a reçu une confirmation excellente et un développement ultérieur.

L'électrodynamique quantique est basée sur les équations de Maxwell qui décrivent le champ électromagnétique classique et sur les équations de la mécanique quantique de Dirac qui décrivent un électron relativiste.

Les équations de Dirac, de même que celles de Maxwell, sont des équations de champ, elles reflètent, avec les équations de Maxwell, la nature ondulatoire de la matière.

La remarquable prédiction de Dirac sur la possibilité d'existence d'une particule qui ne diffère de l'électron que par le signe de charge électrique — le positron — a conduit à une conclusion importante que les équations de Dirac décrivent non seulement les électrons mais également les positrons. En raisonnant par analogie, on peut dire que les équations de Maxwell décrivent le champ électromagnétique, et celles de Dirac, le champ d'électrons-positrons.

Les notions de champs électromagnétique et d'électrons-positrons sont fondamentales en électrodynamique quantique. Ces notions doivent traduire non seulement les propriétés ondulatoires de la matière. Etant des fonctions des coordonnées et du temps, le champ électromagnétique et le champ d'électrons-positrons satisfont à des équations d'onde bien déterminées. Elles doivent aussi traduire les propriétés corpusculaires de la matière et se décrire mathématiquement par certains opérateurs. Nous sommes ainsi conduits à la notion de champs quantifiés qui satisfont, en tant que fonctions des coordonnées et du temps, au système d'équations différentielles

liées de Maxwell et Dirac et obéissent, en tant qu'opérateurs, à des relations de permutation déterminées.

Les champs et les particules qui leur sont associées interagissent les uns avec les autres. Par suite de cette interaction certaines particules disparaissent et d'autres apparaissent. Par exemple, le processus d'émission donne naissance au photon, alors que la création par le photon d'une paire électron-positron fait disparaître le photon et apparaître un électron et un positron. De même que tous les effets quantiques, les processus en électrodynamique quantique se caractérisent par des probabilités bien déterminées. Ces dernières se déterminent par les carrés des modules des éléments d'une certaine matrice appelée matrice de diffusion. Pour trouver cette matrice (ce qui constitue le problème principal de l'électrodynamique quantique) il faut résoudre un système lié d'équations différentielles opératorielles de l'électrodynamique quantique, c'est-à-dire des équations de Maxwell et Dirac. Une solution générale stricte de ce problème n'est pas encore connue. On n'arrive à trouver qu'une solution approchée des équations de l'électrodynamique quantique dans le cadre de la théorie des perturbations.

Pourtant, les approximations d'ordre supérieur de la théorie des perturbations comprennent des expressions divergentes dont le sens n'a été compris que plus tard.

Une nouvelle étape dans le développement de l'électrodynamique quantique, qui peut être qualifiée à juste titre comme sa deuxième naissance, a commencé dans les années 50 de notre siècle, quand on a mis en évidence les causes physiques des divergences en électrodynamique quantique et a élaboré les méthodes de leur élimination.

Pour comprendre la situation qui s'est produite en électrodynamique quantique il convient d'avoir en vue que les champs quantifiés présentent des propriétés physiques déterminées même dans le cas où les nombres de particules liées aux champs sont nuls. On dit dans ce cas que le système de champs est à l'état de **vide** physique. Ce dernier possède des propriétés physiques déterminées. Ce n'est pas un « néant », un « rien » mais un milieu physique particulier présentant toute une série de propriétés.

Toute charge électrique extérieure provoque une polarisation du vide, ce qui fait dire, d'une façon imagée, que chaque électron se trouve revêtu d'une « pelisse » électron-positron de polarisation qui est perçue par un observateur extérieur comme une réduction effective de la charge de l'électron. Autrement dit, si e_0 est la charge d'un électron « nu » se trouvant dans la « pelisse », la charge observée de l'électron est $e = e_0 + \Delta e$, où Δe est la variation de la charge, due à la polarisation du vide.

Mais l'interaction de l'électron avec le vide ne se limite pas à la diminution de sa charge. L'électron émet de façon continue des

photons et ensuite les absorbe, ce qui doit avoir pour effet une variation de l'énergie ou, ce qui revient au même, de la masse de l'électron.

La variation de la masse de l'électron, due à son interaction avec le vide, est appelée masse électromagnétique de l'électron. Si m_0 est la masse d'un électron « nu » hypothétique, la masse observée d'un électron réel $m = m_0 + \Delta m$, où Δm est la masse électromagnétique de l'électron.

Le problème est donc de déterminer les valeurs de Δe et Δm. Or, sa résolution se heurte à une difficulté de principe qui consiste en ce que si l'on suit la théorie littéralement, on obtient pour Δe et Δm des expressions infinies ayant la forme d'intégrales divergentes. La théorie a encore besoin d'une procédure de régularisation déterminée, c'est-à-dire d'élimination des infinités dans les expressions de diverses grandeurs ayant un sens physique direct. Cette procédure est basée sur une idée physique simple de changement de norme, selon laquelle les valeurs de $e_0 + \Delta e$ et $m_0 + \Delta m$ doivent être identifiées aux valeurs finies observées de la charge et de la masse de l'électron.

Ainsi, on ne tient pas compte des valeurs infinies de la charge électromagnétique et de la masse électromagnétique de l'électron. Ceci est justifié puisque dans la théorie actuellement en vigueur la charge et la masse des particules sont introduites de façon purement phénoménologique! Mais une chose importante est que les divers types de divergences qui se rencontrent en électrodynamique quantique ne sont pas une infinité mais seulement au nombre de deux. Ils se réduisent, les deux, aux grandeurs divergentes Δe et Δm. C'est pourquoi toutes les divergences peuvent être éliminées en électrodynamique quantique simultanément par un changement de norme. Cela explique le nom de **théorie à norme changeable** que l'on donne à l'électrodynamique quantique.

L'idée de changement de norme s'est révélée d'une fécondité extrême, elle a permis de prédire plusieurs phénomènes physiques remarquables et de développer leur théorie quantitative. Citons parmi ces phénomènes l'existence d'un moment magnétique anormal de l'électron, le déplacement de niveaux atomiques dû au rayonnement et, enfin, divers effets électrodynamiques non linéaires (par exemple, la diffusion de la lumière par la lumière dans le vide) qui prouvent que le vide est réellement un milieu physique dont les valeurs de la permittivité ε et de la perméabilité μ dépendent des intensités de champ.

Les prédictions de l'électrodynamique quantique sont confirmées dans un gigantesque intervalle d'énergie.

En plus d'un intérêt purement physique, les nouveaux effets prédits par l'électrodynamique quantique présentent un intérêt philosophique général. Leur étude confirme la thèse bien connue de Lé-

nine selon laquelle les propriétés de l'électron sont inépuisables et celles de la matière le sont également.

Actuellement, on construit, à l'image de l'électrodynamique quantique, une **théorie quantique générale des champs.**

ANNEXE

FORMULES DE L'ALGÈBRE VECTORIELLE ET DE L'ANALYSE VECTORIELLE

Algèbre vectorielle

Composition des vecteurs

$$\mathbf{a}=\mathbf{i}a_x+\mathbf{j}a_y+\mathbf{k}a_z\,; \qquad a_l=a_x\cos\widehat{lx}+a_y\cos\widehat{ly}+a_z\cos\widehat{lz}$$

Produit scalaire

$$\mathbf{ab}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

Produit vectoriel

$$[\mathbf{ab}]=-[\mathbf{ba}]=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix},$$

$$[\mathbf{ab}]_x=a_yb_z-a_zb_y,\ \ldots,$$

$$\mathbf{a}\,[\mathbf{bc}]=\mathbf{b}\,[\mathbf{ca}]=\mathbf{c}\,[\mathbf{ab}]=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix},$$

$$[\mathbf{a}\,[\mathbf{bc}]]=\mathbf{b}\,(\mathbf{ac})-\mathbf{c}\,(\mathbf{ab})$$

Champs vectoriels

Opérateur nabla

$$\nabla=\mathbf{i}\,\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\,\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

Gradient

$$\operatorname{grad}\varphi\equiv\nabla\varphi=\mathbf{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\mathbf{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\mathbf{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

Divergence

$$\operatorname{div}\mathbf{a}\equiv\nabla\mathbf{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Rotationnel

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}\equiv[\nabla\mathbf{a}]=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix},$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{a})_x=\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z},\ \ldots$$

Formules à deux ∇

$$\nabla\nabla\varphi = \Delta\varphi, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$[\nabla[\nabla \mathbf{a}]] = \nabla(\nabla \mathbf{a}) - \Delta \mathbf{a},$$

$$[\nabla\nabla\varphi] = 0,$$

$$\nabla[\nabla \mathbf{a}] = 0$$

Formules pour des champs combinés

$$\nabla(\varphi + \psi) = \nabla\varphi + \nabla\psi, \quad \nabla(\varphi\psi) = (\nabla\varphi)\psi + \varphi(\nabla\psi),$$

$$\nabla(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \nabla \mathbf{a} + \nabla \mathbf{b}, \quad [\nabla(\mathbf{a} + \mathbf{b})] = [\nabla \mathbf{a}] + [\nabla \mathbf{b}],$$

$$\nabla(\varphi \mathbf{a}) = \mathbf{a}\nabla\varphi + \varphi\nabla \mathbf{a}, \quad [\nabla(\varphi \mathbf{a})] = [\nabla\varphi \mathbf{a}] + \varphi[\nabla \mathbf{a}],$$

$$\nabla(\mathbf{ab}) = (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} + [\mathbf{a}[\nabla \mathbf{b}]] + [\mathbf{b}[\nabla \mathbf{a}]],$$

$$\nabla[\mathbf{ab}] = \mathbf{b}[\nabla \mathbf{a}] - \mathbf{a}[\nabla \mathbf{b}],$$

$$[\nabla[\mathbf{ab}]] = \mathbf{a}(\nabla \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla \mathbf{a}) + (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b}.$$

Relations intégrales

$$\int_V \nabla\varphi \, dV = \int_\Sigma \varphi \mathbf{n} \, ds,$$

$$\int_V \nabla \mathbf{a} \, dV = \int_\Sigma \mathbf{an} \, ds,$$

$$\int_V [\nabla \mathbf{a}] \, dV = \int_\Sigma [\mathbf{na}] \, ds,$$

$$\int_\Sigma [\nabla \mathbf{a}] \, \mathbf{n} \, ds = \int_C \mathbf{a} \, d\mathbf{l}$$

(le volume V est limité par la surface Σ, **n** est le vecteur unitaire normal à la surface et dirigé vers son extérieur; la surface Σ est limitée par le contour C).

BIBLIOGRAPHIE

Абрикосов А. А. Введение в теорию нормальных металлов. М., 1972.
Ахиезер А. И. и др. Электродинамика плазмы. М., 1974.
Ахиезер А. И., **Барьяхтар** В. Г., **Пелетминский** С. В. Спиновые волны. М., 1967.
Ахиезер А. И., **Берестецкий** В. Б. Квантовая электродинамика. М., 1969.
Бараш Ю. С., **Гинзбург** В. Л. — УФН, 1976, т. 118, вып. 3, с. 523.
Блохинцев Д. И. Введение в квантовую механику. М., 1944.
Владимиров В. В., **Волков** А. Ф., **Мейлихов** Е. З. Плазма полупроводников. М., 1979.
Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика. М., 1981.
Зельдович Я. Б., **Новиков** И. Д. Релятивистская астрофизика. М., 1967.
Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., 1973.
Киттель К. Физическая теория доменной структуры ферромагнетиков. — УФН, 1950, т. 151, вып. 4, с. 452-544.
Ландсберг Г. С. Оптика. М., 1976.
Мандельштам Л. И. Лекции по некоторым вопросам теории колебаний. — В кн.: Мандельштам Л. И. Полное собрание трудов. Под ред. М. А. Леонтовича. М., 1950, т. 5, с. 428-467.
Островский Ю. И. Голография. М., 1970.
Тамм И. Е. Основы теории электричества. М., 1966.
Тамм И. Е., **Франк** И. М. Излучение электрона при равномерном движении в преломляющей среде. — В кн.: Тамм И. Е. Собрание научных трудов. М., 1975, т. 1, с. 113-120.
Шавлов А. Оптические мазеры. — УФН, 1961, т. 75, вып. 3, с. 569-582.
Энгель А., **Штенбек** М. Физика и техника электрического разряда в газах. М., 1935, т. 1, т. 2.
Bednorz J. G., **Müller** K. A. Possible high-T_c superconductivity in the Ba-La-Cu-O system. — Z. Phys. B: Cond. Matter 1986, B64, N° 2, 189-193.
Bloembergen N. Nonlinear Optics. A Lecture Note, New York, 1965.
Born M., **Wolf** E. Principles of Optics. 2ne edition. Pergamon Press, Oxford, 1964.
De Jennes P. Superconductivity of Metals and Alloys. New York, 1966.
Fermi E. Notes on Quantum Mechanics. New York, 1961.
Fermi E. Nuclear Physics. Chicago, 1950.
Feynman R., **Leighton** R. a.o. The Feynman Lectures on Physics. Vol. 3. London, 1963, 1965.
Jackson J. Classical Electrodynamics. New York, 1962.
Kadomtsev B. Phénomènes collectifs dans les plasmas. Editions Mir, Moscou, 1979.
Landau L., **Lifchitz** E. Physique statistique. Editions Mir, Moscou, 1984.
Landau L., **Lifchitz** E. Théorie des champs. Editions Mir, Moscou, 1970.
Landau L., **Lifchitz** E. Electrodynamique des milieux continus. Editions Mir, Moscou, 1969.
Longmire C. L. Elementary Plasma Physics. Interscience Publishers, N. Y., 1963.

Optique et électronique quantiques. Quantum Optics and Electronics. New York, 1965.

Orlando T. P., Delin K. A., Foner S., McNiff J., Jr, Tarascon J. M., Greene L. H., McHinnon W. R., Hull G. W. — Upper critical fields of high-T_c superconductivity $La_{2-x}Sr_xCuO_{4-y}$. Possibility of 140 tesla. — Phys. Rev. B: Cond. Matter 1987, B35, N° 10, 5347-5349.

Pantell R., Puthoff H. Fundamentals of Quantum Electronics, New York, 1969.

Pauli W. Relativitätstheorie. Encyklopedie der mathematischen Wissenschaften. V_2, art. 15, 1921.

Singer J. Masers. New York, 1959.

Stratton J. A. Electromagnetism Theory. Mc Graw-Hill, New York-London, 1941.

Verkin B. I., Banduryan B. B., Barylnik A. S., Bobrov A. G., Braude I. S., Gal'chinetskaya Yu. L., Gaiduk A. L., Gurevich A. M., Demirskii V. V., Dotsenko V. I., Eropkin V. I., Zherlitsyn S. V., Isakina A. P., Kislyak I. F., Konovodchenko V. A., Lavrent'ev F. E., Litinskaya L. S., Mikheev V. A., Momot G. I., Natsik V. D., Netchiporenko I. N., Panfilov A. S., Pokhil Yu. A., Prokhvatilov A. I., Rudavskii E. A., Rybal'chenko L. F. Svechkarev I. V., Stepanenko A. M., Strzhmechny M. A., Fedorchenko I. I., Fil' V. D., Fisun V. V., Khomenko V. D., Chagovets V. K., Shashin G. A., Yanson I. K.— Structure and physical properties of superconducting compounds Y(La)-Ba(Sr)-Cu-O. — ФНТ, 1987, 13, N° 7, 771-783.

Wu M.K., Ashburn J.R. et al. Superconductivity at 93 K in a new mixed-phase Y-Ba-Cu-O compound system at ambient pressure. — Phys. Rev. Lett. 1987. 58, N° 9, 908-910.

Yariv A. Quantum Electronics. 2nd edition. Wiley and Sons, N. Y., 1975.

INDEX

TABLE DES MATIÈRES